

Skriptum

Einführung in die Differentialgeometrie

CHRISTOPHER R. NERZ

Basierend auf Mitschriften von
MARKUS KLEIN & CHRISTOPHER R. NERZ

der Vorlesungen von
PROF. DR. FRANZ PEDIT
in den Wintersemestern 2007/08 & 2009/10
an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Letzte Änderung: 30. Juli 2014



Dieses Skriptum von CHRISTOPHER R. NERZ steht unter einer Creative Commons Namensnennung–NichtKommerziell–KeineBearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz, wie sie unter <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/legalcode> eingesehen werden kann.

Anderweitige Verwendung bedarf der Zustimmung durch den Autor.

Vorwort

Dieses Skriptum entstand im Wintersemester 2010/2011 und Sommersemester 2011 aus den unkorrigierten \LaTeX Live-Mitschriften der Differentialgeometrie I Vorlesung im Wintersemester 2007/08 von MARKUS KLEIN und der Differentialgeometrie II Vorlesung im Wintersemester 2009/2010 von mir. Beide Vorlesungen wurden von PROF. DR. FRANZ PEDIT an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen gehalten. Des Weiteren wurden Abschnitt II.4, „Wirkung von Lie-Gruppen“ und Teile von Abschnitt VI.4, „Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe“ aus dem Mitschrieb von FLORIAN BECK, bei dem ich mich für diesen Mitschrieb bedanken möchte, der Differentialgeometrie I Vorlesung im Sommersemester 2009 entnommen, die ebenfalls von PROF. PEDIT an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen gehalten wurde.

Diese Mitschriften wurden zusammengefügt und teilweise umsortiert, erweitert, umformuliert, vervollständigt, geTeXt sowie bebildert – einige der Änderungen sind hervorgehoben oder in den einleitenden Texten zu dem jeweiligen Teil beschrieben.

Für Korrekturen von Rechtschreib-, Grammatik-, Tipp-, TeX - und sonstigen Fehlern möchte ich mich bei KATHARINA RADERMACHER und NILS RUDOLPH bedanken.

Dieses Skriptum ist derart sortiert, dass alle Kenntnisse, die für ein Kapitel bzw. einen Abschnitt benötigt werden, in den vorangehenden Kapiteln und Abschnitten bearbeitet werden – davon ausgenommen sind die im Anhang zu findenden Aussagen und Eigenschaften elliptischer Differentialoperatoren, Theorem X.2.15 aus Kapitel X, „Hodge Theorie und Differentialoperatoren“, die nur zitiert werden. Allerdings kann auch ein alternatives Vorgehen gewünscht sein. Für diesen Fall ist auf Seite ix veranschaulicht, wie die Kapitel bzw. Abschnitte aufeinander aufbauen. Dabei sind Abschnitte, die gemeinsam in einem „node“ stehen aufeinander aufbauend geschrieben.

Wie die original Mitschriften erhebt auch dieses Skriptum definitiv *keinen* Anspruch auf Richtigkeit, Vollständigkeit oder irgendetwas anderes. Es ist des Weiteren *nicht* durch PROF. PEDIT autorisiert.

Bei Fragen, Wünschen oder Verbesserungsvorschlägen freue ich mich über E-Mails an studium@phoenixes.de.

CHRISTOPHER R. NERZ

Dieses Skriptum ist in \LaTeX unter Verwendung von MikTeX gesetzt. Das Layout ist für einen doppelseitigen, randlosen Druck optimiert. Dies ist die korrigierte Fassung vom 30. Juli 2014. Die immer aktuellste Version ist unter

<https://svn.phoenixes.de/scripts/diffgeo/diffgeo.pdf>

zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Aufbau.....	ix
I. Differentialgeometrie I	1
Vorwort zum ersten Teil.....	3
Inhaltsverzeichnis – Differentialgeometrie I.....	7
I. Mannigfaltigkeiten	9
II. Tangentialräume und Tangentialbündel.....	19
III. Differentialgleichungen	45
IV. Vektorbündel.....	59
V. Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung.....	79
II. Differentialgeometrie II	111
Vorwort zum zweiten Teil	113
Inhaltsverzeichnis – Differentialgeometrie II.....	117
VI. Äußere Ableitung	119
VII. Integration.....	133
VIII. Cohomologie	147
IX. Riemannsche Mannigfaltigkeiten.....	163
X. Hodge Theorie und Differentialoperatoren	195
III. Anhang und Verzeichnisse	209
Vorwort zum Anhang.....	211
Inhaltsverzeichnis – Anhang	213
A. Wiederholungen.....	215
B. Weiteres aus anderen Gebieten	225
Verzeichnisse	235

Aufbau

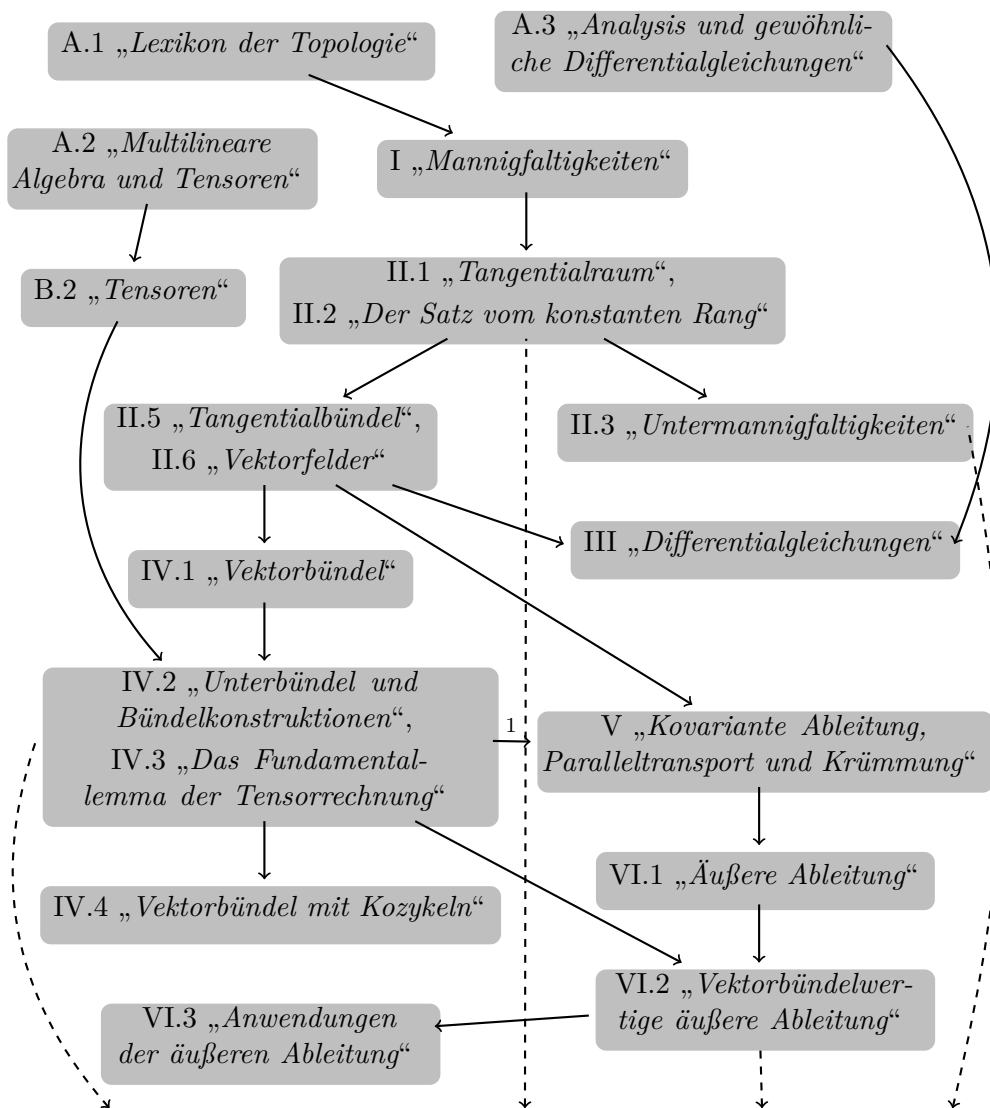


Abbildung 1.: Abhängigkeiten der Skript-Abschnitte

¹Für den Spezialfall des Tangentialbündels TM gilt diese Abhängigkeit nicht.

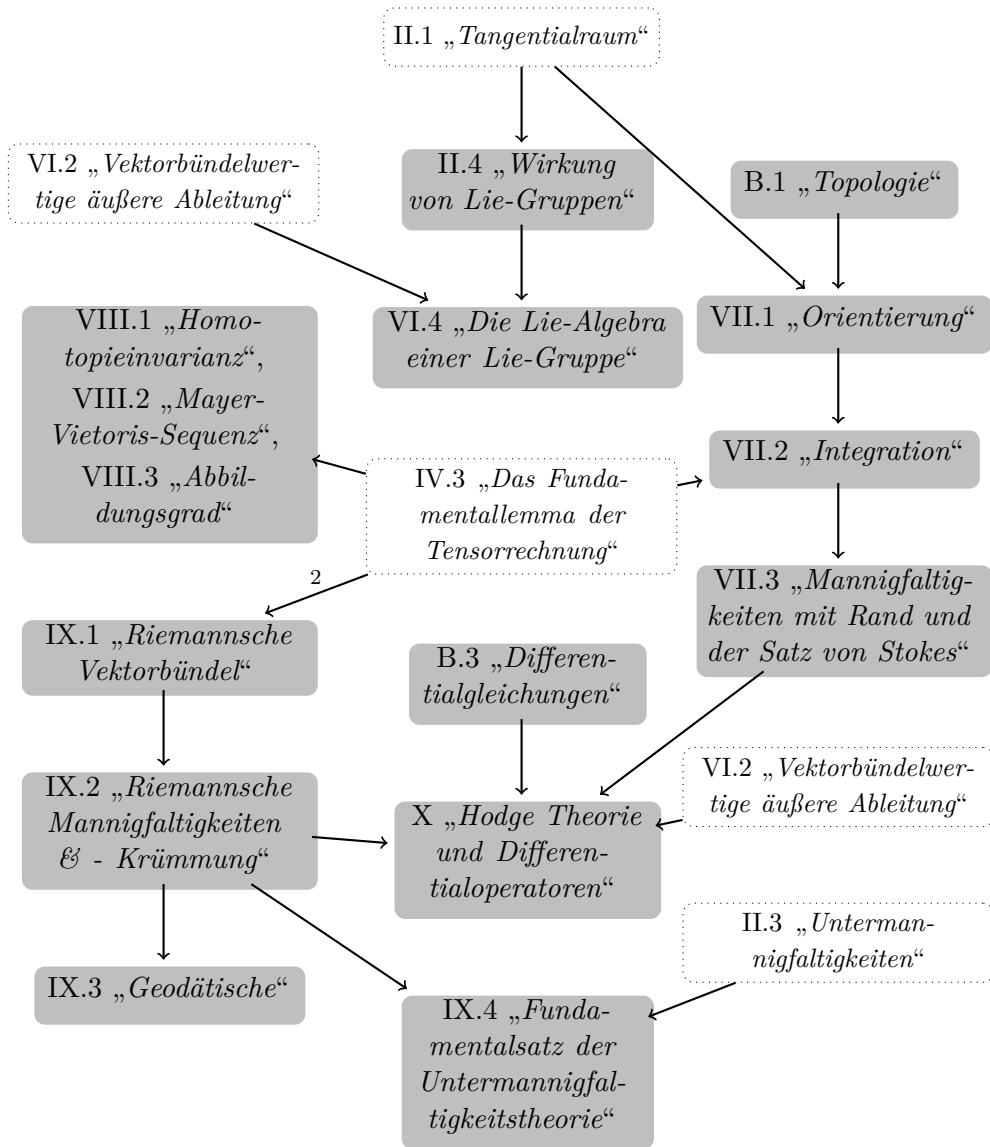


Abbildung 2.: Abhängigkeiten der Skript-Abschnitte – Teil 2

²Für den Spezialfall des Tangentialbündels TM wird statt diesem Abschnitt nur II.6, „Vektorfelder“ benötigt.

Differentialgeometrie I

Vorwort zum ersten Teil

Dieser erste Teil basiert auf dem unkorrigierten L^AT_EX Live-Mitschrieb von MARKUS KLEIN der *Differentialgeometrie I* Vorlesung von PROF. DR. FRANZ PEDIT im Wintersemester 2007/2008 an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

Die Mitschriften wurden dabei von CHRISTOPHER R. NERZ erweitert, umsortiert sowie stückweise umformuliert und bebildert – einige der Änderungen sind hervorgehoben.

- Der Einschub „Lexikon der Topologie“ im ersten Kapitel „Mannigfaltigkeiten“ wurde deutlich umsortiert und um einiges (ursprünglich in den anderen Kapiteln eingeführtes) erweitert und in den Abschnitt A.1, „Lexikon der Topologie“ im Anhang A, „Wiederholungen“ im Teil III, „Anhang und Verzeichnisse“ verschoben.
- Der Abschnitt I.1, „Mannigfaltigkeiten“ des I. Kapitels „Mannigfaltigkeiten“ entspricht etwa dem Rest des ersten Kapitels „Mannigfaltigkeiten“ des original Mitschriebs. Auch hier wurde ein wenig umsortiert und etwas erweitert.
- Der Abschnitt I.2 „Differenzierbare Abbildungen“ des Kapitels „Mannigfaltigkeiten“ folgt dem zweiten Kapitel „Differenzierbare Abbildungen“ aus dem original Mitschriebs und wurde nur maginal verändert.
- Die Abschnitte II.1 „Tangentialraum“ und II.2 „Der Satz vom konstanten Rang“ des II. Kapitels „Tangentialräume und Tangentialbündel“ beinhalten den leicht veränderten Stoff des dritten Kapitels „Tangentialraum“.
- Der Abschnitt II.4, „Wirkung von Lie-Gruppen“ des II. Kapitels „Tangentialräume und Tangentialbündel“ wurde aus den Teile über „Lie-Gruppen“ erstellt, die im Mitschrieb der Differentialgeometrie I Vorlesung des Sommersemesters 2009 von FLORIAN BECK verteilt waren.
- Im Abschnitt II.3, „Untermannigfaltigkeiten“ im Kapitel II, „Tangentialräume und Tangentialbündel“ wurde der Inhalt des vierten Kapitels „Untermannigfaltigkeiten“ und einige weitere Anmerkungen ausgearbeitet. Dabei wurden diverse Beweise abgeändert, Beispiele ausgearbeitet und Anmerkungen umgeschrieben.
- In den Abschnitten II.5 „Tangentialbündel“ und II.6 „Vektorfelder“ des II. Kapitels „Tangentialräume und Tangentialbündel“ wird das fünfte Kapitel „Tangentialbündel“ verarbeitet, wobei die Formale Definition des Tangentialbündels etwas verändert wurde, was ein paar weitere Veränderungen zur Folge hat. Auch wurden bspw. Koordinatenvektorfelder aus den späteren Kapiteln in dieses verschoben.

- Der Abschnitt III.1 „Differentialgleichungen“ des III. Kapitels „Differentialgleichungen“ entspricht dem sechsten Kapitel „Differentialgleichungen“, wobei einige Beweise und Bemerkungen erweitert bzw. vervollständigt sowie diverse Fehler ausgemerzt wurden.

Selbiges gilt für den Abschnitt III.2 „Satz von Frobenius“ des III. Kapitels „Differentialgleichungen“, der dem siebten Kapitel „Satz von Frobenius (erster Version)“ entspricht. Des Weiteren wurde in diesen Abschnitt mit Proposition III.2.19 eine alternative Interpretation der Aussage von Satz III.2.10 gegeben und mittels dieser auf Seite 57 ein alternativer Beweis für diesen Satz gegeben.

- Aus dem achten Kapitel „Vektorbündel“ wurden die Abschnitte IV.1 „Vektorbündel“, IV.2 „Unterbündel und Bündelkonstruktionen“ und IV.3 „Das Fundamentallemma der Tensorrechnung“ des IV. Kapitels „Vektorbündel“. Dabei wurden diverse Dinge, die ursprünglich in den späteren Kapiteln lagen, eingefügt. Die Beispiele des Koktangential-, Homomorphismenbündels etc. wurden aus Bemerkungen ausgelagert und zu Definitionen und Sätzen etc. ausgelagert. Das Pullbackbündel etc. wurde eingefügt. Das Fundamentallemma der Tensorrechnung wurde kommentiert und der Beweis vervollständigt.
- Die Konstruktion der Vektorbündel aus Kozykeln des 9. Kapitels „Vektorbündel mit Kozykeln“ wurde im Abschnitt IV.4 „Vektorbündel mit Kozykeln“ weiter ausgeführt.

- Aus dem zehnten Kapitel „Zusammenhänge, Kovariante Ableitungen“ wurde der Abschnitt V.1 „Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge“ des V. Kapitels „Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung“, wobei Zusammenhänge und Kovariante Ableitung etwas klarer eingeführt wurden.

Außerdem wurden diverse Beispiele, Bemerkungen etc. aus dem Skript von Differentialgleichungen 2 eingefügt und die Konstruktion des Zusammenhangs aus lokalen Daten umgeschrieben und vervollständigt, ebenso die des zurückgeholtten Zusammenhangs.

- Das elfte Kapitel „Paralleltransport und Krümmung“ wurde in die Abschnitte V.2 „Paralleltransport“ und V.3 „Krümmung und Holonomie“ des V. Kapitels „Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung“ zerteilt.

Dabei wurden die Sätze zu den parallelen Schnitten ausgearbeitet und vervollständigt, die Motivation der Krümmung vollkommen neu geschrieben und einiges über die Krümmung umgeschrieben. Des Weiteren wurde der Beweis des lokalen Holonomietheorems vereinfacht, der vom Maurer-Cartan Lemma überarbeitet. Die topologische Ausführungen wurden in das erste Kapitel verschoben.

Außerdem wurde der Abschnitt „Schleifen und Holonomien“ des zweiten Kapitels „Parallele Schnitte, Holonomie und Krümmung“ des Differentialgeometrie II Mitschriebs in Abschnitt V.3, „Krümmung und Holonomie“ in Kapitel V, „Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung“ eingearbeitet.

- Die drei Seiten des zwölften Kapitels „Zwei fundamentale Sätze der Differentialgeometrie“ wurden entsprechend der Thematik in den Teil II „Differentialgeometrie II“ eingebaut. Genauer wurde der erste Teil dieses Kapitels in Abschnitt IX.1, „Riemannsche Vektorbündel“ und Abschnitt IX.2, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten & - Krümmung“ im Kapitel IX, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ verschoben und der zweite Teil über den Einbettungssatz mit der Behandlung des Einbettungssatzes aus Differentialgeometrie II zu Abschnitt IX.4, „Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie“ in Kapitel IX, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ zusammengefasst, da diese Thematik in Differentialgeometrie II ausführlicher behandelt wurde und auch thematisch dort besser passt.

Wie die original Mitschriebe erhebt auch dieses Scriptum definitiv keinen Anspruch auf Richtigkeit, Vollständigkeit oder sonst irgendetwas. Es ist *nicht* durch PROF. PEDIT autorisiert.

Bei Fragen, Wünschen oder Verbesserungsvorschlägen freue ich mich über jede E-Mail an studium@phoenixes.de.

Vielen Dank!
CHRISTOPHER R. NERZ

Inhaltsverzeichnis – Differentialgeometrie I

I. Mannigfaltigkeiten	9
I.1. Mannigfaltigkeiten	9
I.2. Differenzierbare Abbildungen	15
II. Tangentialräume und Tangentialbündel	19
II.1. Tangentialraum	19
II.2. Der Satz vom konstanten Rang	28
II.3. Untermannigfaltigkeiten	30
II.4. Wirkung von Lie-Gruppen	35
II.5. Tangentialbündel	38
II.6. Vektorfelder	40
III. Differentialgleichungen	45
III.1. Differentialgleichungen	45
III.2. Satz von Frobenius	49
IV. Vektorbündel	59
IV.1. Vektorbündel	59
IV.2. Unterbündel und Bündelkonstruktionen	63
IV.3. Das Fundamentallemma der Tensorrechnung	72
IV.4. Vektorbündel mit Kozykeln	74
V. Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung	79
V.1. Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge	79
V.2. Paralleltransport	92
V.3. Krümmung und Holonomie	96

Kapitel I.

Mannigfaltigkeiten

I.1. Mannigfaltigkeiten

Wir setzen die Begriffe der Topologie voraus, die im Anhang A, „Wiederholungen“ im Teil III, „Anhang und Verzeichnisse“ enthalten sind.

I.1.1 Definition (Mannigfaltigkeit, Karte, Atlas)

Sei M eine Menge.¹

1. Eine *Karte* auf (von) M ist ein Paar (U, φ) mit
 - a) $U \subseteq M$
 - b) $\varphi : U \rightarrow V$ injektive Abbildung, wobei V ein endlichdimensionaler normierter \mathbb{K} -VR ist
 - c) $\varphi(U) \subseteq V$ offen, insbesondere ist dann $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq V$ eine Bijektion. U heißt *Kartenbereich* und φ die *Kartenabbildung* bzw. *Koordinatenabbildung*.
2. Zwei Karten (U, φ) und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ auf M heißen *C^k -verträglich*, falls
 - a) Bild φ und Bild $\tilde{\varphi}$ offene Mengen im selben Vektorraum sind.²
 - b) $\varphi(U \cap \tilde{U}) \subseteq V$ und $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$ beide offen sind.
 - c) $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \varphi(U \cap \tilde{U})$ sowie $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ beide C^k -Diffeomorphismen sind.

Die Funktionen $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ bzw. $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ heißen *Kartenübergangsfunktionen* bzw. *Kartenwechsel*.

3. Ein *Atlas* \mathcal{A} von M ist eine Familie paarweiser verträglicher Karten von M , deren Kartenbereiche M überdecken, d. h. $\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U = M$.

¹Wir definieren hier nur Mannigfaltigkeiten *ohne* Rand und führen Mannigfaltigkeiten *mit* Rand erst in Definition VII.3.7 im Abschnitt VII.2, „Integration“ im Kapitel VII, „Integration“ im Teil II, „Differentialgeometrie II“ ein. Wir merken jedoch an, dass alle Konstruktionen, die wir im Folgenden durchführen sich ebenso auf Mannigfaltigkeiten mit Rand übertragen lassen, wenn jeweils statt der Topologie auf \mathbb{R}^m jeweils die von H^m betrachtet wird.

²Man kann auch zulassen, dass die Bilder in unterschiedlichen Vektorräumen liegen, die jedoch homöomorph zueinander sind. Dies ist jedoch eine formale Feinheit auf die wir nicht weiter eingehen wollen.

4. Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf M heißen *äquivalent*, falls $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ wieder ein Atlas ist, d. h. falls jede Karte von \mathcal{A}_1 ist mit jeder Karte von \mathcal{A}_2 verträglich ist.

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^k -Atlanten und die Äquivalenzklassen $[\mathcal{A}]$ heißen *C^k -differenzierbare Strukturen* auf M .

5. Eine C^k -differenzierbare *Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(M, [\mathcal{A}])$ aus einer Menge M und einer C^k -differenzierbarer Struktur³ auf M .

I.1.2 Bemerkung

1. Wenn klar ist, welchen Atlas bzw. welcher differenzierbare Struktur wir verwenden, schreiben wir lediglich M .
2. Jeder Atlas \mathcal{A} definiert „seine“ differenzierbare Struktur $[\mathcal{A}]$.
3. C^∞ -Mannigfaltigkeiten werden schlicht *Mannigfaltigkeiten* oder *glatte (differenzierbare) Mannigfaltigkeiten* genannt.
4. C^ω -Mannigfaltigkeiten heißen *reellanalytische Mannigfaltigkeiten*.
5. C^0 -Mannigfaltigkeiten heißen *topologische Mannigfaltigkeiten*.
6. Ein Atlas \mathcal{A}_{\max} heißt *maximal*, falls \mathcal{A}_{\max} ein Atlas auf M ist und für jeden anderen dazu äquivalenten Atlas \mathcal{A} bereits $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$ gilt.
Wir können nun $[\mathcal{A}] \mapsto \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B}$ betrachten, welches sich als eine Bijektion zwischen differenzierbaren Strukturen und maximalen Atlanten herausstellt.
7. Eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ einer Mannigfaltigkeit heißt *Karte* von p , falls sie in p definiert ist, d. h. $p \in U$ gilt. Sie heißt *um $p \in U$ zentriert*, falls $\varphi(p) = 0$ gilt.
8. Ist $p \in M$ ein Punkt in einer Mannigfaltigkeit $(M, [\mathcal{A}])$ und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte um $p \in U$, so können wir eine verträgliche um p zentrierte Karte (V, ψ) wählen so, dass Bild $\psi = B_1(0)$: Nach Definition ist $\varphi(U)$ offen und $\varphi(p) \in \varphi(U)$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(\varphi(p)) \subseteq \varphi(U)$ und wir erkennen, dass

$$\psi : \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(\varphi(p))\right) \rightarrow B_1(0) : q \mapsto \frac{1}{\varepsilon}(\varphi(q) - \varphi(p))$$

die Behauptung erfüllt.

I.1.3 Definition (Dimension einer Manigfaltigkeit)

Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine C^k -differenzierbare Manigfaltigkeit. Dann heißt $\dim M := \dim V$ die *Dimension* der Mannigfaltigkeit, wobei V der Vektorraum des Wertebereichs einer Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte ist.

³Wir beachten, dass wir nach Bemerkung I.1.11 in den folgenden Kapiteln annehmen, dass die Differenzierbare Struktur jeder Mannigfaltigkeit eine Hausdorffsche Topologie induziert⁴, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

⁴siehe dafür Satz I.1.10.

Wir bemerken, dass die Dimension wohldefiniert ist, da nach Voraussetzung alle Karten in den selben Vektorraum abbilden.

I.1.4 Schreibweise (Mannigfaltigkeit mit Dimension)

Im Folgenden verwenden wir für eine Mannigfaltigkeit M die Schreibweise M^m , wenn m die Dimension von M ist.

I.1.5 Beispiel

1. Für einen endlich dimensionalen Vektorraum $M = V$ ist $\mathcal{A} = \{(V, \text{id})\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Man bezeichnet diese als die *Standardstruktur* auf V .
2. Ist $M = U \subseteq V$ offen, so heißt $\mathcal{A} = \{(U, \text{id}|_U)\}$ die *induzierte Standardstruktur* auf der offenen Menge U .
3. Für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ erkennen wir dass $M \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist. Außer den natürlichen Atlas $\mathcal{A}_1 = \{(M, \text{id}|_M)\}$ erhalten wir noch einen weiteren Atlas, indem wir die Abbildung

$$(0; \infty) \times (0; 2\pi) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^2 : (r, \vartheta) \mapsto r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

betrachten. Wir nennen $\mathcal{A}_2 := \{(M, \varphi)\}$ dann *Polarkoordinaten*. Wir erkennen durch Rechnung, dass \mathcal{A}_1 äquivalent zu \mathcal{A}_2 ist.

4. Auf der *Einheitssphäre*

$$\mathcal{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

können wir die so genannte *stereographische Projektion* betrachten – siehe Abbildung I.1. Dafür definieren wir für $p \in \mathcal{S}^n$ den Wert $\varphi_+(p)$ als den Schnittpunkt der Geraden zwischen p und dem *Nordpol* $N = (1, 0, \dots, 0)$ mit $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dies ergibt eine Bijektion $\varphi_+ : \mathcal{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Sphäre ohne den Nordpol zum \mathbb{R}^n . Führen wir selbige Konstruktion für den *Südpol* $S = (-1, 0, \dots, 0)$ durch, so erhalten wir eine Abbildung φ_- und $\mathcal{A} = \{(U_{+/-}, \varphi_{+/-})\}$ ist ein \mathcal{C}^ω Atlas auf \mathcal{S}^n , wie berechnen der Übergangsabbildungen⁵ ergibt.

5. Die Menge $\mathbb{R}\mathcal{P}^n := \{\mathbb{R}x := \{r \cdot x \mid r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : 0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ heißt der *projektive Raum*. Das heißt, dies ist die Menge aller Geraden in \mathbb{R}^{n+1} durch die Null. Dabei ist $\mathbb{R}x = \{tx : t \in \mathbb{R}\} = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Die letzte Schreibweise bezeichnen wir auch als *homogene Koordinaten*.

Im Speziellen bezeichnen wir $\mathbb{R}\mathcal{P}^1$ als die *projektive Geraden* und betten \mathbb{R} durch $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}^1 : t \mapsto \mathbb{R}(t, 1)^T$ ein. Dadurch erkennen wir, dass $\mathbb{R}\mathcal{P}^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\mathbb{R}(1, 0)^T\}$

⁵Sie ergeben $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \mapsto \frac{1}{\|x\|^2}x$, also eine „Spiegelung an \mathcal{S}^{n-1} “.

In der Abbildung ist diese an den Beispielen $(\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})(\varphi_-(q))$ und $(\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})(\varphi_-(p))$ erkenntlich.

Abbildung eingefügt

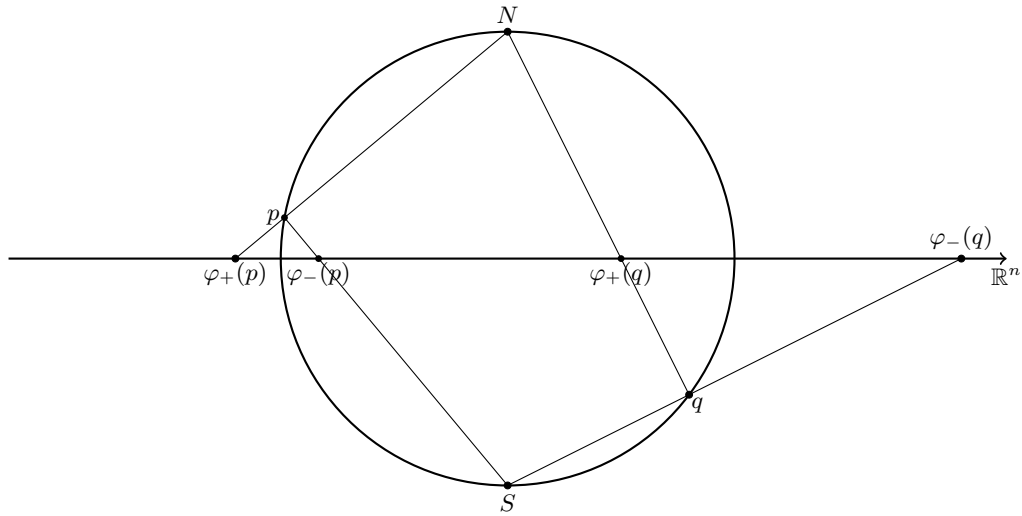


Abbildung I.1.: Stereographische Projektion

und daher bezeichnen wir $\mathbb{R}(1, 0)^T = \infty \in \mathbb{R}\mathcal{P}^1$ als den unendlich fernen Punkt. Wir konstruieren nun eine glatte Struktur auf $\mathbb{R}\mathcal{P}^n$: Wir betrachten

$$U_k = \{\mathbb{R}x \in \mathbb{R}\mathcal{P}^n \mid x_k \neq 0\} \quad k = 0, \dots, n$$

und erkennen $\bigcup_{k=0}^n U_k = \mathbb{R}\mathcal{P}^n$ und

$$\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbb{R}x \mapsto \frac{1}{x_k}(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ist eine wohldefinierte Bijektion mit der Umkehrabbildung

$$\varphi_k^{-1}(t) = \mathbb{R}(t_1, \dots, t_k, 1, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Dies ergibt den \mathcal{C}^ω -Atlas $\{(U_k, \varphi_k)\}$ auf \mathbb{R}^n indem wir, o.B.d.A. für $i < j$, die Übergangsabbildungen berechnen

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(t) &= \varphi_i(\mathbb{R}(t_1, \dots, t_{i+1}, \dots, t_j, 1, t_{j+1}, \dots, t_n)) \\ &= \frac{1}{t_{i+1}}(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_j, 1, t_{j+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

I.1.6 Satz und Definition (Produktmannigfaltigkeit)

Sind (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Mannigfaltigkeiten, so definiert

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(U \times V, \varphi \otimes \psi) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

eine glatte Struktur auf $M \times N$, dabei bezeichnet $\varphi \otimes \psi$ die Abbildung $(p, q) \mapsto (\varphi(p), \psi(q))$. Die so erhaltene Mannigfaltigkeit $(M \times N, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ heißt *Produktmannigfaltigkeit*.

Eingefügt, da es später verwendet wird.

BEWEIS

Sind $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ und $(V, \psi), (\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{B}$ Karten, so gilt per Definition für $(p, q) \in U \times V$

$$\begin{aligned} ((\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) \circ (\varphi \otimes \psi)^{-1})(p, q) &= (\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi})(\varphi^{-1}(q), \psi^{-1}(p)) \\ &= (\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(p)), \tilde{\psi}(\psi^{-1}(q))) \\ &= ((\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(p), (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})(q)). \end{aligned}$$

Dies ist k -fach differenzierbar, da $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ und $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ k -fach differenzierbar sind. ///

I.1.7 Definition (Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Untermannigfaltigkeit* der Dimension m , falls für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine Submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ existiert so, dass $g^{-1}(0) = M \cap U$. Dabei heißt g *Submersion*, falls Dg in jedem Punkt $q \in U$ vollen Rang hat.

I.1.8 Satz (Geometrische Version des Satz über implizite Funktionen)

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\Phi(U \cap M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Wir erhalten damit die Karten $(U \cap M, \Phi|_{U \cap M})$.

BEWEIS

Übungsaufgabe

///

I.1.9 Beispiel

Die Einheitskugel $\mathcal{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Untermannigfaltigkeit, da die Gleichung

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|^2 - 1$$

eine Submersion ist.

I.1.10 Satz (Über die Mannigfaltigkeitstopologie)

Eine C^k Mannigfaltigkeit M mit einer differenzierbaren Struktur $[\mathcal{A}]$ besitzt eine natürliche Topologie, indem wir

$$\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]} := \{O \subseteq M \mid \varphi(U \cap O) \subseteq V \text{ offen für alle Karten } (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

betrachten. Dies ist unabhängig von der Atlantenwahl $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$ der differenzierbaren Struktur. Außerdem sind die Kartenbereiche offen⁶ sowie die Kartenabbildungen Homöomorphismen, sprich $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ impliziert $U \in \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$ und dass $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

⁶Im Falle von Mannigfaltigkeiten mit Rand „offen in H^m “.

BEWEIS

Beweis umgeschrieben

Sei $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ eine offene Menge der Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte. Damit ist $\varphi(U \cap V)$ offen und damit $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Homöomorphismus.

Wir erkennen, dass

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \left\{ \varphi^{-1}(W) \mid W \subseteq V \text{ offen, } (U, \varphi) \in \mathcal{A} \right\}$$

und dass dies eine Topologie ist. Wir zeigen also nun, dass dies nur von der differenzierbaren Struktur abhängt. Sei also $\tilde{\mathcal{A}} \in [\mathcal{A}]$ ein weiterer Atlas und es ist für $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ zu zeigen, dass für alle $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\mathcal{A}}$ bereits $\tilde{\varphi}(O \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$ offen ist.

Per Definition ist für $(U_0, \varphi_0) \in \mathcal{A}$ die Menge $\varphi_0(U_0) \subseteq V$ offen. Da für eine weitere Karte $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}$ die Kartenübergänge $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ auf ihrem Definitionsbereich zumindest Homöomorphismen sind, folgt, dass sie offene Abbildungen sind. Insbesondere ist

$$\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0(U_0 \cap U_1)$$

offen. Damit ist per Definition $U_0 \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{A}}}$. Mit selbiger Argumentation folgt dies für $(U_1, \varphi_1) \in \tilde{\mathcal{A}} \in [\mathcal{A}]$, da dieser Atlas mit \mathcal{A} verträglich ist. Damit ist die Topologie unabhängig von der Wahl des Atlanten. ///

I.1.11 Bemerkung (Abzählbarkeit und Trennungseigenschaft)

Wir werden im Folgenden häufig annehmen, dass eine Mannigfaltigkeit das zweite Abzählbarkeitsaxiom, siehe Definition A.1.7, erfüllt, indem wir annehmen, dass ein abzählbarer Atlas $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$ existiert. Anders formuliert heißt das, dass die Mannigfaltigkeit durch abzählbar viele Karten überdeckt wird, d. h.

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{für gewisse Karten } (U_i, x_i) \text{ der Mannigfaltigkeit } M.$$

Falls nicht anders angegeben, werden wir im Folgenden des Weiteren annehmen, dass jede Mannigfaltigkeit Hausdorffsch ist, siehe Definition A.1.16.

I.1.12 Satz (Charakterisierung der Mannigfaltigkeitstopologie)

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit dem Atlas \mathcal{A} und der Topologie \mathcal{T} . Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

1. die Topologie \mathcal{T} ist gleich der durch den Atlas gegebenen Topologie
2. für alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ist die Kartenabbildung φ ein Homöomorphismus bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} .

BEWEIS

Beweis eingefügt

Mit Satz I.1.10 impliziert die erste Aussage die zweite.

Ist jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ein Homöomorphismus bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} , so ist für jede bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} offenen Mengen $O \in \mathcal{T}$ die

Bildmenge $\varphi(U \cap O)$ offen. Per Definition ist O auch offen bezüglich der Atlas-Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, d. h. $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Ist dagegen $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ offen bezüglich der Atlas-Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte, so gilt per Definition der Atlas-Topologie, dass $\varphi(O \cap U)$ offen ist. Da φ bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} ein Homöomorphismus ist, ist φ^{-1} stetig bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} und bijektiv. Insbesondere ist $O \cap U = \varphi^{-1} \circ \varphi(O \cap U) \in \mathcal{T}$ offen bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} . Da dies für alle Karten des Atlas gilt und diese die Mannigfaltigkeit überdecken, folgt aus den Axiomen einer Topologie, dass

$$O = M \cap O = \left(\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U \right) \cap O = \left(\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U \cap O \right) \in \mathcal{T}$$

offen bezüglich der gegebenen Topologie \mathcal{T} ist. ///

I.1.13 Korollar (Topologie einer Produktmannigfaltigkeit)

Die kanonische Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ einer Produktmannigfaltigkeit $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ist gleich der Produkttopologie der kanonischen Topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ der einzelnen Faktoren.

Eingefügt, da es später verwendet wird.

I.2. Differenzierbare Abbildungen

I.2.1 Schreibweise (Einstein Konvention)

Wir vereinbaren ab jetzt die sogenannte *Einstein-Konvention* zu verwenden, falls damit keine Doppeldeutigkeiten entstehen. Über freie, doppelt auftretende, gegen- gesetzte Indices⁷ wird also summiert. Das heißt, $w_i v^i$ steht für die Summe $\sum_i w_i v^i$.

Dabei vereinbaren wir, dass im Nenner eines Bruches auftretende Indices ver- tauschte Position erhalten. Das heißt $w_i \frac{1}{v^i}$ ist keine Summe, dagegen $w_i \frac{1}{v_i}$ schon. Wir vereinbaren weiter, dass ein im Index auftretender Index nicht vertauscht wird, d. h. auch $w_{i_j} v^j$ wird summiert. Als Beispiel betrachten wir für einen Vektor $x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ und erkennen, dass in dieser Schreibweise $x_i x^i = \|x\|^2$ gilt. Zu be- achten ist auch, dass $\sum_i x_i x^i$ nur eine einfache Summierung bedeutet, da der Index i im Produkt quantisiert ist.

Dies zunächst ungewohnte Vereinbarung wird sich im Folgenden als notwendig erweisen, um zu verhindern, dass entscheidende Ideen durch Summationen unlesbar werden.

Wurde teilweise verwendet, aber nie formal eingeführt. Sollte noch weniger umständlich formuliert werden.

I.2.2 Definition (k-fache Differenzierbarkeit)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeiten (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) heißt *k'-fach differenzierbar* in $p \in M$, falls $k' \leq k$ ist und für alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

Abbildung eingefügt

⁷und nur Indizes und nicht etwa auch über Potenzen

um $p \in U$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ um $f(p) \in V$ die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$ im Sinne einer Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen k' -fach differenzierbar ist. Diese Abbildung f heißt k' -fach differenzierbar, in Symbole $f \in C^{k'}(M; N)$, falls f

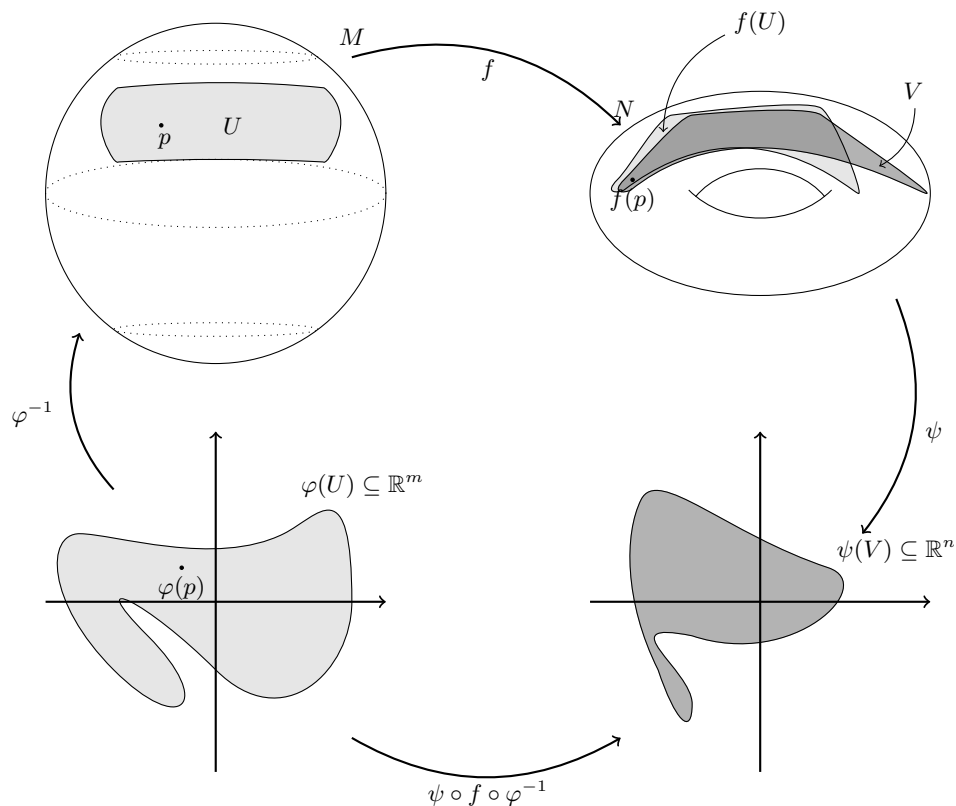


Abbildung I.2.: Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten mit Karten

für alle $p \in M$ k' -fach differenzierbar ist. Ist sie bijektiv und auch die Inverse-Abbildung f^{-1} k' -fach differenzierbar, so heißt f $C^{k'}$ -diffeomorph.

I.2.3 Satz (Charakterisierung der Differenzierbarkeit)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei C^k -Mannigfaltigkeiten (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) ist genau dann in $p \in M$ k' -fach differenzierbar, falls $k' \leq k$ und es zwei Karten (U, φ) um $p \in U$ und (V, ψ) um $f(p) \in V$ gibt so, dass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ k' -fach differenzierbar ist.

BEWEIS

Beweis umgeschrieben

Per Definition genügt es die Rückrichtung zu zeigen. Seien also $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ Karten um $p \in U \cap \tilde{U}$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ und $(\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{B}$ Karten um $f(p) \in V \cap \tilde{V}$ so, dass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ k' -fach differenzierbar ist. Per Definition der C^k -Mannigfaltigkeit sind

$\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ und $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ k -fach differenzierbar. Da die Verkettung k' -fach differenzierbarer Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen wiederum k' -fach differenzierbar ist und angenommen wurde, dass $k' \leq k$ ist, ist

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \tilde{\varphi} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$$

k' -fach differenzierbar. Damit erhalten wir die Aussage. ///

I.2.4 Beispiel

1. Die kanonische erste Projektion $\pi : M \times N \rightarrow M : (x, y) \mapsto x$ einer C^k -Produktmannigfaltigkeit in einen ihrer Faktoren ist k -fach differenzierbar.
2. Sind $M = V$ und $N = W$ Vektorräume mit den glatten Standardstrukturen $\mathcal{A} = \{(V, \text{id})\}$ und $\mathcal{B} = \{(W, \text{id})\}$, so ist eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ genau dann als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten differenzierbar, falls sie als Abbildung zwischen Vektorräumen differenzierbar ist.
3. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ eine glatte Abbildung in eine Mannigfaltigkeit N und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , so ist auch $f|_M : M \rightarrow N$ glatt.
4. Ist $f : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung von einer Mannigfaltigkeit N und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit $\text{Bild } f \subseteq M$, so ist auch $f : N \rightarrow M$ glatt.
5. Ist $f = (f_1, f_2) : M \rightarrow N_1 \times N_2$ eine Abbildung von einer Mannigfaltigkeit M in das Produkt $N_1 \times N_2$ zweier Mannigfaltigkeiten N_1 und N_2 , so ist f genau dann differenzierbar, wenn $f_1 : M \rightarrow N_1$ und $f_2 : M \rightarrow N_2$ differenzierbar sind.
6. Ist $f : M_1 \times M_2 \rightarrow N$ eine Abbildung von dem Produkt $N_1 \times N_2$ zweier Mannigfaltigkeiten N_1 und N_2 und $k \geq 1$, so ist f genau dann k -fach differenzierbar, wenn für alle $p_1 \in M_1$ und $p_2 \in M_2$ die Abbildungen $f_{p_1} : M_2 \rightarrow N : q_2 \mapsto f(p_1, q_2)$ und $f_{p_2} : M_1 \rightarrow N : q_1 \mapsto f(q_1, p_2)$ k -fach differenzierbar sind.
7. Die Komposition $f \circ g$ zweier k -differenzierbaren Abbildungen $g : P \rightarrow M$ und $f : M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten ist k -fach differenzierbar.

I.2.5 Satz (Karten sind Diffeomorphismen)

Ist (U, φ) eine Karte einer C^k -Mannigfaltigkeit M , so ist $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ eine C^k -Diffeomorphismus.

BEWEIS

Da es nach Satz I.2.3 genügt die Differenzierbarkeit für eine Karte nachzurechnen. Wir wählen dafür die Karte (U, φ) und die kanonische Karte $(\varphi(U), \text{id}|_{\varphi(U)})$ im Vektorraum und erkennen mit

$$\text{id}|_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}|_{\varphi(U)}$$

die k -fache Differenzierbarkeit von φ . Ebenso folgt mit

$$\text{id}|_U \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}|_U$$

die Differenzierbarkeit von φ^{-1} .

///

I.2.6 Definition ((stückweise) glatter Weg)

Wird später verwendet

Ein Weg heißt *glatter Weg* (oder *glatte Kurve*), falls er als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten glatt ist.

Ein Weg $\gamma : I \rightarrow M$ heißt *stückweise glatt* (oder *stückweise glatte Kurve*), falls endlich viele Intervalle I_i mit $\bigcup_i I_i = I$ existieren so, dass $\gamma|_{I_i}$ jeweils ein glatter Weg ist.

I.2.7 Definition ((stückweise) glatte Homotopie)

Wird später verwendet

Die Homotopie $h : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow M$ für zwei glatte Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0; 1] \rightarrow M$ heißt *glatt*, falls sie als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten glatt ist.

Sind die Wege stückweise glatt, so heißt sie *stückweise glatt*, falls endlich viele Intervalle $I_i \subseteq [0; 1]$ mit $\bigcup_i I_i = [0; 1]$ existieren so, dass $h|_{[0;1] \times I_i}$ jeweils eine glatte Abbildung ist.

Zitate eingefügt

Wir zitieren die Existenz der Zerlegung der Eins aus bspw. [Con08, Thm. 1.4.11] bzw. dessen glatte Version aus bspw. [Con08, Thm. 3.5.4].

I.2.8 Satz (Partition der Eins)

Wurde ab und an erwähnt und unter anderem im Abschnitt VII.2, „Integration“ verwendet.

Ist $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung einer Hausdorffsche Mannigfaltigkeit M , die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt⁸, so existiert eine *Partition der Eins* bezüglich U_i , also eine Familie $\{\varphi_i\}_i$ glatter Funktionen auf M mit

1. $0 \leq \varphi_i \leq 1$ und $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_i$;
2. $\{\varphi_i\}$ ist lokal endlich, d. h.

$$\forall p \in M \exists U_p \subseteq M \text{ offen} : p \in U_p, \quad |\{i \mid \text{supp } \varphi_i \cap U_p \neq \emptyset\}| < \infty;$$

3. $\sum_i \varphi_i \equiv 1$, d. h.

$$\forall p \in M : \quad \sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1.$$

⁸Beides nehmen wir, wie in Bemerkung I.1.11 angemerkt für gewöhnlich ohne Vermerk an.

Kapitel II.

Tangentialräume und Tangentialbündel

In diesem und allen folgenden Kapiteln nehmen wir, wie in Bemerkung I.1.11 angekündigt, dass jede Mannigfaltigkeit das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und ein Hausdorff-Raum ist. Außerdem gehen wir nicht mehr explizit auf die Differenzierbarkeitsstufe k einer C^k -Mannigfaltigkeit ein, sondern nehmen immer C^∞ -Mannigfaltigkeiten an. Allerdings lassen sich alle Aussagen in natürlicher Weise übertragen.

II.1. Tangentialraum

Bereits aus Analysis I ist das Prinzip der Tangente bekannt. Ebenso anschaulich ist es sich Tangenten an der Kugel vorzustellen und es ist klar, dass sich in diesem Beispiel eine ganze Tangentenfläche bildet – siehe Abbildung II.1.

Motivation und
Abbildung eingefügt

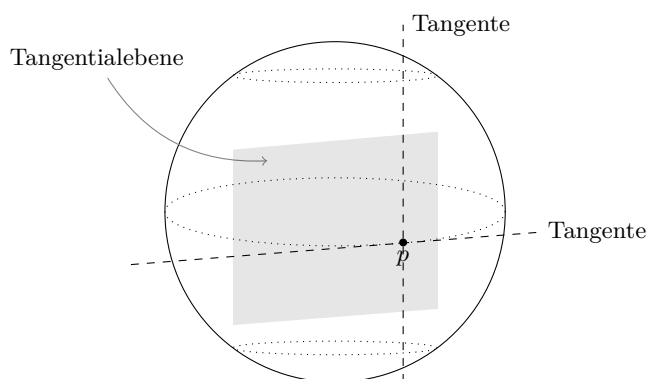


Abbildung II.1.: Tangentialraum der Sphäre

Dies wollen wir nun verallgemeinern. Zunächst beschränken wir uns auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Dafür beachten wir, dass jede Bewegung entlang einer Kurve auf der Mannigfaltigkeit in jedem Punkt in tangentieller Richtung erfolgt. Beispielsweise ist die Bewegung entlang des „Äquators“ einer Kugel immer Richtung Osten oder Westen – mit einer nicht näher bestimmten Geschwindigkeit. Führen wir äquivalentes in einem Punkt für alle „Himmelsrichtungen“, d. h. alle Tangentialrichtungen, durch, so haben wir die Tangentialebene durch Wege durch diesen Punkt bestimmt. Dies motiviert die folgende Definition des Tangentialraums:

II.1.1 Definition (Tangentialraum für Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n)

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $p \in M$, so bezeichnet

$$T_p M := \{ \gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Kurve mit } \gamma(0) = p, \text{ Bild } \gamma \subseteq M \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

den *Tangentialraum* von M in p . Dieser ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n .

Ist M eine Untermannigfaltigkeit, so können wir M lokal, d. h. in einer Umgebung U eines Punkte $p \in M$, durch eine Submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ beschreiben. Das heißt, wir finden eine solche Submersion mit $g^{-1}(0) = M \cap U$. Dies ist gleichwertig dazu, dass wir eine Immersion $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ finden mit $\text{Bild } \varphi = M \cap U$. Diese Abbildungen erlauben uns den Tangentialraum näher zu beschreiben:

II.1.2 Lemma (Charakterisierung für Untermannigfaltigkeiten)

Unter den Bezeichnungen von oben gilt

$$T_p M = \text{Ker } g'(p) = \text{Bild } \varphi'(0) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

II.1.3 Beispiel

Die Sphäre \mathcal{S}^n ist durch

$$\mathcal{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sum x_i^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

gegeben. Wählen wir $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x, x\| - 1 = \langle x|x \rangle - 1$, so erkennen wir, dass dies eine Submersion wie oben gefordert ist. Da des Weiteren $\frac{\partial}{\partial v} g(x) = \langle x|v \rangle$ gilt also nach dem vorangehenden Lemma II.1.2

$$T_p M = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x|v \rangle = 0 \right\} = \{x\}^\perp.$$

Dies entspricht der natürlichen Anschauung.

Motivation
umgeschrieben

Es stellt sich nun die Frage, wie wir das Konzept der Definition II.1.1 auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen können. Bisher können wir nämlich nicht erklären, was $\gamma'(0)$ für eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ in eine Mannigfaltigkeit M bedeuten soll, falls M *keine* Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Wir verwenden nun die gleiche Idee, wie wir sie schon die ganze Zeit benutzen und im weiteren Verlauf der Vorlesung auch noch häufiger anwenden werden: Wir gehen zu Karten über.

Das heißt, wir wählen um den betrachteten Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) . Betrachten wir nun wieder einen Weg $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ durch $p = \gamma(0) \in U$, so können wir annehmen, dass der gegebene Weg den Kartenbereich U nicht verlässt, d. h. $\text{Bild } \gamma \subseteq U$. Dafür müssen wir höchstens $\varepsilon > 0$ verkleinern, was für die zu betrachtende „Ableitung“ in 0 jedoch keine Rolle spielt. Verknüpfen wir nun diesen Weg mit der Karte, so erhalten wir mit $\varphi \circ \gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ wieder einen Weg in den euklidischen Raum durch den Punkt $x = \varphi(p)$, dessen Ableitung für uns verständlich ist. Diese Konstruktion ist jedoch offensichtlich von der gewählten Karte abhängig.

Da es natürlich keinen Sinn macht zu sagen, dass der selbe Weg je nach gewählter Karte unterschiedliche „Tangenten ergibt“, betrachten wir eine geeignete Äquivalenzrelation auf allen solchen Tupeln $(U, \varphi, (\varphi \circ \gamma)'(0)) =$ „(Karte, Ableitung des mit der Karte verknüpften Weges)“.

II.1.4 Definition (Tangentialraum)

Ist M eine C^1 -Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so ist der *Tangentialraum* von M in p durch

$$T_pM := \{(U, \varphi, \xi) \mid (U, \varphi) \text{ Karte um } p \in M, \xi \in V\} / \sim$$

definiert, wobei die Äquivalenzrelation \sim durch

$$(U, \varphi, \xi) \sim (V, \psi, \zeta) : \iff \zeta = D\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(\xi)$$

definiert ist. Ein Element $v = [(U, \varphi, \xi)] \in T_pM$ heißt *Tangentialvektor* von M in p .

Wir definieren für eine Karte (U, φ) mittels der Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM : \xi \mapsto [U, \varphi, \xi]$ eine Vektorraumstruktur auf T_pM :

$$T_pM \ni 0 = [U, \varphi, 0] \quad r[U, \varphi, \xi] = [U, \varphi, r\xi] \quad [U, \varphi, \xi] + [U, \varphi, \eta] = [U, \varphi, \xi + \eta].$$

II.1.5 Satz (Vektorraumstruktur des Tangentialraums)

Die Vektorraumstruktur T_pM eines Tangentialraumes einer Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ wie oben definiert, hängt nicht von der Wahl der Karte (U, φ) ab.

BEWEIS

Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten um $p \in M$. Insbesondere ist $\varphi \circ \psi^{-1}$ ein Diffeomorphismus, also insbesondere ist $D_p\varphi \circ D_{\psi(p)}\psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Ist $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ nun ein Weg mit $\gamma(0) = p$ so können wir durch Verkleinerung von ε annehmen, dass $\text{Bild } \gamma \subseteq U \cap V$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \xi &= (\varphi \circ \gamma)'(0) = \left((\varphi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \gamma) \right)'(0) \\ &= \left(D_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \right) \left((\psi \circ \gamma)'(0) \right). \end{aligned}$$

Somit folgt aus $[U, \varphi, \xi] = [V, \psi, \zeta]$ bereits $\xi = (D_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1}))\zeta$. Damit erhalten wir für $r \in \mathbb{R}$

$$r\xi = r\left(D_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1})\right)\zeta = \left(D_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1})\right)(r\zeta)$$

und somit ist die Multiplikation mit Skalaren wohldefiniert. Äquivalent folgt die Wohldefiniertheit der Vektorraumaddition. ///

II.1.6 Korollar (Basis von T_pM)

Ist $(U, \varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq V)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M und $p \in U \subseteq M$, so induziert jede Basiswahl $(e_i)_i$ des Vektorraums V eine Basis in T_pM .

BEWEIS

Die Abbildung $T : V \rightarrow T_p M : \xi \mapsto [(U, \varphi, \xi)]$ ist ein Isomorphismus, also wird auch jede Basis in eine Basis abgebildet. Wir definieren $T(e_i) := \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p M$, welche wir *Koordinatenbasisvektoren* nennen.

Bekannterweise gilt für eine Abbildung $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ immer

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ (t \mapsto p + tv)).$$

Dies motiviert die folgende Definition von Richtungsableitung.

II.1.7 Definition (Richtungsableitung)

Ist $v = [U, \varphi, \xi] \in T_p M$ ein Tangentialvektor einer Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in U \subseteq M$, so definieren wir die *Richtungsableitung* einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ durch

$$v \bullet f := \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p f := \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi))$$

Offensichtlich ist die Richtungsableitung eine *lokale Eigenschaft*, d. h. gilt für eine Umgebung $U \subseteq M$ von p und zwei Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$, dass $f|_U = g|_U$, so gilt für alle $v \in T_p M$ bereits $v \bullet f = v \bullet g$.

II.1.8 Lemma (Wohldefiniertheit der Richtungsableitung)

Unter den Voraussetzungen von II.1.7 ist die Richtungsableitung wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von $v \in T_p M$ und erfüllt die

1. Linearität: $v \bullet (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 (v \bullet f_1) + c_2 (v \bullet f_2) \quad \forall c_i \in \mathbb{R}, f_i \in C^\infty(M)$
2. Leibnizregel: $v \bullet (f_1 f_2) = (v \bullet f_1) f_2(p) + f_1(p) (v \bullet f_2) \quad \forall f_i \in C^\infty(M)$

BEWEIS

Dies ist wohldefiniert, denn für $v = [(U, \varphi, \xi)] = [(V, \psi, \zeta)]$ gilt auf Grund der Kettenregel

$$D_{\psi(p)}(f \circ \psi^{-1})(\zeta) = D_{\psi(p)}\left(\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\right)(\zeta) = D_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(\xi). \quad ///$$

Nach der *extrinsischen*¹ Definition der Tangentialräume, folgt nun eine weniger anschauliche, dafür *intrinsische*² Definition deren Gleichwertigkeit wir in Theorem II.1.12 erkennen werden.

¹Darunter verstehen wir eine von Karten kommende Definition oder Aussage. Bei solchen ist des häufigeren nachzuweisen, dass sie unabhängig von Kartenwahlen sind, wie wir es auch bei der Definition des Tangentialvektors zeigen mussten.

²Darunter verstehen wir eine nur durch innere, algebraische bzw. topologische Strukturen der Mannigfaltigkeit induzierte Definition oder Aussage. Diese sind a priori unabhängig von Kartenwahlen.

II.1.9 Definition (Derivation)

Für zwei \mathbb{K} -Algebren, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A und B und einen Algebrehomomorphismus $\varrho : A \rightarrow B$ nennen wir eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $v : A \rightarrow B$ *Derivation* längs ϱ , falls sie die *Leibnizregel* erfüllt, d. h.

$$v(a \cdot b) = v(a) \cdot \varrho(b) + \varrho(a) \cdot v(b) \quad \forall a, b \in A$$

gilt. Wir bezeichnen mit

$$\text{Der}_\varrho(A, B) := \{v : A \rightarrow B \mid v \text{ ist Derivation längs } \varrho\}$$

die Menge aller Derivationen bezüglich ϱ und mit $\text{Der}(A) := \text{Der}_{\text{id}}(A, A)$ die Menge der Derivationen von A in sich selbst längs der Identität.

II.1.10 Bemerkung

Die Derivationen $\text{Der}_\varrho(A, B)$ bilden offensichtlich einen \mathbb{K} -Untervektorraum der Homomorphismen $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$.

II.1.11 Beispiel

Sei $A = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K})$ und $B = \mathbb{K}$ und $\text{ev}_p : A \rightarrow B : f \mapsto f(p)$ die Auswertung in $p \in M$. Wir haben bisher gezeigt, dass $T_p M \rightarrow \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K}), \mathbb{K}) : v \mapsto (f \mapsto v \bullet f)$ ein linearer Homomorphismus ist.

II.1.12 Theorem (Tangentialvektoren und Derivationen)

Ist M eine \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit, so ist durch die Abbildung $\theta : T_p M \rightarrow \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{R})$ mit $\theta(v)(f) := v \bullet f$ ein linearer Isomorphismus gegeben. Das heißt Derivation und Tangentialvektoren entsprechen einander.

BEWEIS

Zunächst zeigen wir die Injektivität: Die Abbildung ist klarerweise linear, also genügt es für die Injektivität zu zeigen, dass

$$(v \bullet f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

bereits $v = 0$ impliziert, also der Kern trivial ist. Sei (U, φ) eine Karte um $p \in U \subseteq M$ und f eine Fortsetzung von $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^n$ auf M so, dass für eine offene Umgebung V von p bereits $f|_V = \varphi|_V$ gilt. Damit gilt

$$(v \bullet \varphi_i) = \left(\varphi_i \circ \varphi^{-1} \right)'_{\varphi(p)}(\xi) = \pi_i(\xi) = \xi_i$$

und es war $v = [(U, \varphi_i, \xi)]$. Also ist $\xi = 0$ und damit $v = 0$. Also ist der Kern der Abbildung trivial und die Abbildung ist damit injektiv.

Wir kommen nun zur Surjektivität: Sei dafür $\delta \in \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M); \mathbb{R})$ eine beliebige Derivation. Wir müssen die Existenz eines Tangentialvektors v mit $\theta(v) = \delta$ zeigen.

Beweis umgeschrieben

Lokalisierung: Wir zeigen zunächst, dass für zwei Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$ mit $f|_U = g|_U$ für eine $U \subseteq M$ offen mit $p \in U$ immer $\delta(f) = \delta(g)$ gilt. Klar ist, dass dies gleichwertig dazu ist, dass $\delta(f - g) = 0$. Also genügt es zu zeigen, dass für jede Funktion $f \in C(M)$ für die eine offene Menge $U \ni p$ mit $f|_U \equiv 0$ existiert, bereits $\delta f = 0$ gilt. Wir wählen für eine solche eine Hutfunktion ψ mit $\psi|_{M \setminus U} \equiv 1$ und $\psi(p) = 0$, dann gilt $f \cdot \psi = f$ und damit

$$\delta(f) = \delta(f\psi) = \delta(f) \cdot \psi(p) + f(p) \cdot \delta(\psi) = 0.$$

Wir können also Derivationen auf lokal definierten Funktionen anwenden, indem wir die Funktionen in irgendeiner Form auf M fortzusetzen, da das Ergebnis unabhängig von der Erweiterung ist.

Verschwinden auf Konstanten: Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$ eine konstante Funktion, so gilt $\delta(f) = c\delta(\mathbb{1}) = c \cdot (\mathbb{1}(p) \cdot \delta(\mathbb{1}) + \delta(\mathbb{1}) \cdot \mathbb{1}(p)) = 2c \cdot \delta(\mathbb{1}) = 2\delta(f)$, also $\delta(f) = 0$.

Surjektivität: Sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte um diesen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $\varphi(U) = B_1(0)$ und $\varphi(p) = 0$. Wir definieren für $q \in U$ den Weg $\gamma : [0; 1] \rightarrow B_1(0) : t \mapsto (1-t)\varphi(p) + t\varphi(q)$ und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, wobei wir die Einstein-Konvention beachten,

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= (f \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)(1) - (f \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)(0) \\ &= \int_0^1 (f \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^1 (D_{\gamma(t)}(f \circ \varphi^{-1}))(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial e^i} \Big|_{\gamma(t)} (f \circ \varphi^{-1}) \cdot (\gamma^i)'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(\gamma(t))} f \cdot (\varphi^i(q) - \varphi^i(p)) dt \\ &= (\varphi^i(q) - \varphi^i(p)) \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(\gamma(t))} f dt}_{=: g_i(q)}. \end{aligned}$$

Wir erkennen $g_i(p) = \partial f / \partial x^i|_p$ und da δ auf Konstanten verschwindet, gilt $\delta = \theta(v)$, da

$$\begin{aligned} \delta(f - f(p)) &= \delta\left((\varphi^i - \varphi^i(p)) \cdot g_i\right) \\ &= \left(\delta(\varphi^i - \varphi^i(p)) \cdot g_i(p)\right) + \underbrace{(\varphi^i(p) - \varphi^i(p))}_{=0} \delta(g_i) \\ &= \left(\delta(\varphi^i) - \underbrace{\delta(\varphi^i(p))}_{=0}\right) \cdot g_i(p) = \delta(\varphi^i) g_i(p) \\ &= \left(\delta(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial p^i}\right) =: v \bullet f. \end{aligned} \quad ///$$

II.1.13 Definition (Ableitung)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N , dann heißt

$$D_p f := f'_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N : v \mapsto (h \mapsto v \bullet (h \circ f))$$

das *Differential* der Abbildung f im Punkte $p \in M$.

II.1.14 Lemma

Es gilt: $D_p f \in \text{Hom}(T_p M, T_{f(p)} N)$, d. h. dies ist eine lineare Abbildung.

BEWEIS

Dies gilt, da für beliebige $v_1, v_2 \in T_p M$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(D_p f(\alpha v_1 + v_2)) \bullet h = (\alpha v_1 + v_2) \bullet (h \circ f) = \alpha v_1 \bullet (h \circ f) + v_2 \bullet (h \circ f)$$

und damit ergibt sich die Aussage. ///

II.1.15 Satz (Kettenregel)

Sind $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$D_p(g \circ f) = D_{f(p)}g \circ D_p f.$$

BEWEIS

Sind $v \in T_p M$ und $h \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} D_p(g \circ f)(v) \bullet h &= v \bullet \underbrace{(h \circ g) \circ f}_{\in C^\infty(N; \mathbb{R})} \\ &= (D_p f(v)) \bullet (h \circ g) = \left((D_{f(p)}g)(D_p f(v)) \right) \bullet h. \end{aligned} \quad ///$$

II.1.16 Bemerkung (Lokale Beschreibung von Funktionen)

Als nächsten Schritt möchten wir Karten ausnützen, um eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N lokal in Koordinaten zu beschreiben. Dafür seien (U, x) und (V, y) Karten auf M um einen Punkt $p \in M$ bzw. auf N um $f(p)$ – vergleiche Abbildung I.2 (S. 16). Indem wir U durch $U \cap f^{-1}(V)$ ersetzen, können wir annehmen, dass $f(U) \subseteq V$ gilt und damit kommutiert das Diagramm

Erklärungen und
Berechnung
umgeschrieben

$$\begin{array}{ccc} U \subseteq M & \xrightarrow{f} & V \subseteq N \\ \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\ x^{-1} \ x & & y^{-1} \ y \\ \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \\ x(U) \subseteq \mathbb{R}^m & \xrightarrow{y \circ f \circ x^{-1}} & y(V) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Mittels der Kettenregel, Satz II.1.15 kommutiert daher auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T_p M & \xrightarrow{\quad Df \quad} & T_{f(p)} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 Dx^{-1} & & Dy^{-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_{x(p)} M \cong \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad D(y \circ f \circ x^{-1}) \quad} & T_{y(f(p))} N \cong \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Die Karten induzieren nach Korollar II.1.6 die Tangentialraum-Basen $(\partial/\partial x^i|_p)_i$ von $T_p M$ und $(\partial/\partial y^i|_{f(p)})$ von $T_{f(p)} N$, dabei gilt per Definition der Koordinatenbasisvektoren

$$\frac{\partial}{\partial p^i} g = \frac{\partial}{\partial e^i} \Big|_{x(p)} (g \circ x^{-1}) \quad \forall g \in C^\infty(M)$$

also gilt $\partial/\partial x^i|_p = d(x^{-1})_{x(p)}(e^i)$ und das äquivalente für y . Mit der Kettenregel, Satz II.1.15 und der euklidischen Differentiation von $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen gilt damit für alle $v = (v_i)_i \in \mathbb{R}^m$ – wir erinnern an die Einstein-Konvention –

$$\begin{aligned}
 D_{f(p)} y \left(D_p f \left(D_{x(p)} x^{-1} \left(v^j \frac{\partial}{\partial e^j} \Big|_{x(p)} \right) \right) \right) &= D(y \circ f \circ x^{-1}) \left(v^j \frac{\partial}{\partial e^j} \Big|_{x(p)} \right) \\
 &= D(y \circ f \circ x^{-1})(v) \\
 &= \left(\frac{\partial(y^i \circ f \circ x^{-1})}{\partial e^j} \right)_{ij} \cdot v \\
 &= \left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j} \right)_{ij} \cdot v,
 \end{aligned}$$

wobei wir $\partial g/\partial x^j|_p$ als Schreibweise für $\partial/\partial x^j|_p g$ verwendet haben. Schreiben wir f_j für $f \circ y^j$ – dies ist abhängig von der Karte – so erhalten wir für $\zeta = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$

$$D_p f(\zeta) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_p \zeta^j \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{f(p)}.$$

II.1.17 Korollar (Koordinatenwechsel)

Sind (U, x) und (V, y) Karten einer Mannigfaltigkeit M um einen Punkt $p \in U \cap V \subseteq M$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

BEWEIS

Folgt aus der Bemerkung II.1.16 mittels Betrachtung von $N = M$ und $f = \text{id}$. ///

Als Korollar aus der Bemerkung ausgelagert

II.1.18 Schreibweise (Gewöhnliche Richtungsableitung)

Ist $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ ein glatter Weg in eine glatte Mannigfaltigkeit M , so schreiben wir $\gamma'(t)$ für $D_t\gamma(1)$, wobei 1 die Standardbasis von \mathbb{R} ist.

$$\gamma'(t) := \gamma'_t(1) \in T_{\gamma(t)}M$$

wobei die 1 die Standardbasis von \mathbb{R} ist.

Wir kehren nocheinmal kurz zur ursprünglichen Motivation für die abstrakte Definition des Tangentialraums zurück.

II.1.19 Bemerkung (Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit)

Ist $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$, so existiert ein „realer“, anschaulicher Tangentialraum $T_p^{\text{affin}}M \subseteq \mathbb{R}^n$, welcher ein affiner Unterraum von \mathbb{R}^n ist. Verschieben wir diesen erhalten wir den Unterraum $T_p^{\text{real}}M$ von \mathbb{R}^n und es gilt, wie in Definition II.1.1,

$$T_p^{\text{real}}M = \{\gamma'(0) \in V : \mid \gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n, \gamma(0) = p \in M\}.$$

Ist g eine beschreibende Submersion bzw. φ eine parametrisierende Immersion in $p \in M$, so gilt

$$T_p^{\text{real}}M = \text{Ker}(dg_p) = \text{Bild}(d\varphi_0).$$

II.1.20 Lemma

Ist $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist die Abbildung

$$T_p^{\text{real}}M \rightarrow T_pM = \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{R}) : v \mapsto (h \mapsto (h \circ \gamma)'(0)),$$

wobei $\gamma : I \rightarrow M \subseteq V$ und $\gamma'(0) = v$ ist, ein linearer Isomorphismus.

BEWEIS

Mit der Kettenregel ist dies wohldefiniert, da jede Abbildung $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Fortsetzung \tilde{h} auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ hat und wir erhalten wiederum mit der Kettenregel

$$(h \circ \gamma)'(0) = (\tilde{h} \circ \gamma)'(0) = \tilde{h}'_{\gamma(0)}(\gamma'(0)).$$

Damit ist die Linearität offensichtlich erfüllt. Die Injektivität folgt, da

$$(h \circ \gamma)'(0) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

für die i -te Projektion $h = \pi_{M|i}$ bereits

$$(h \circ \gamma)'(0) = (\pi_i \circ \gamma)'(0) = \gamma'_i(0)$$

impliziert, also $\gamma'(0) = 0$ gilt. Die Surjektivität folgt aus Dimensionsgründen. ///

II.2. Der Satz vom konstanten Rang

II.2.1 Definition (Immersion, Submersion, Bimersion)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ist

1. eine *Immersion* in $p \in M$, falls $f'_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ injektiv ist. Dann gilt insbesondere $m \leq n$.
2. eine *Submersion* in $p \in M$, falls $f'_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ surjektiv ist. Dann gilt insbesondere $m \geq n$.
3. eine *Bimersion* in $p \in M$, falls f in p eine Immersion und eine Submersion ist, also $f'_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ bijektiv ist. Dann gilt insbesondere $m = n$.

Aus dem Satz über implizierte Funktionen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n folgt mittels Betrachtung von Karten sofort eine Charakterisierung von Sub- bzw. Immersionen:

II.2.2 Satz (Normalformensatz)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ist genau dann eine Immersion in $p \in M$, wenn es Karten (U, x) um $p \in M$ und (V, y) um $f(p) \in N$ gibt so, dass $y \circ f = (x, 0)$ für $m \leq n$. Sie ist genau dann eine Submersion in p , falls $y \circ f = (x^1, \dots, x^n)$.

II.2.3 Definition (Rang)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n , so ist der *Rang* von f in $p \in M$ durch $\text{rg}_p(f) := \text{rg } d_p f$ definiert. Bei Immersionen bzw. Submersionen ist dieser Rang maximal.

Mit Betrachtung von Karten folgt wiederum aus dem Satz über implizierte Funktionen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n eine Charakterisierung von Sub- bzw. Immersionen:

II.2.4 Korollar

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ist genau dann eine Immersion bzw. Submersion in $p \in M$, wenn es eine Umgebung U von p gibt so, dass f in allen Punkten $q \in U$ eine Immersion bzw. Submersion ist.

II.2.5 Korollar (Charakterisierung von Bimersion bzw. lokalem Diffeom.)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n , so sind für $p \in M$ die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f ist eine Bimersion in p
2. f ist ein lokaler Diffeomorphismus um p .
3. Es gibt Karten (U, x) von M um p und (V, y) von N um $f(p)$ mit

$$y \circ f \circ x^{-1} = \text{id}_{x(U \cap f^{-1}(V))}.$$

BEWEIS

Der Normalformensatz liefert, dass aus (1) die anderen Aussagen folgen.

Ist $f : U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus für eine Umgebung U von p so liefert die Kettenregel, dass f in p eine Bimersion ist.

Ist dagegen $y \circ f \circ x^{-1} = \text{id}_{x(U \cap f^{-1}(V))}$, so ist auch $f = y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x$ auf einer Umgebung von p als Verkettung von Diffeomorphismen selbst ein Diffeomorphismus. Das vorangehende Argument liefert wieder, dass f in p eine Bimersion ist. ///

Aus dem Satz vom konstanten Rang im euklidischen Raum \mathbb{R}^n , folgt durch Kartenbetrachtung sofort sein Pendant auf Mannigfaltigkeiten:

II.2.6 Satz (Vom konstanten Rang)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n und $p_0 \in M$ ein Punkt in M so, dass f um p_0 von lokal konstanten Rang ist, d. h. es existiert eine Umgebung $U \subseteq M$ so, dass für alle $p \in U$ bereits $\text{rg}_p f = k = \text{rg}_{p_0}$ gilt. Es existieren Karten (U, x) um p_0 und (V, y) um $f(p_0)$ so, dass $y \circ f = (x^1, \dots, x^k, 0)$ bzw.

$$y \circ f \circ x^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

II.2.7 Lemma

Ist $X_0 \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\text{rg} : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$ unterhalbstetig, d. h. falls $\text{rg} X_0 = k$, dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{R})$ von X_0 so, dass $\text{rg}(X) \geq k$ für alle $X \in U$.

BEWEIS

Der Rang von X ist genau dann k , falls es eine $k \times k$ Untermatrix mit nicht verschwindender Determinante gibt. Das Lemma folgt nun aus der Stetigkeit der Determinante. ///

II.2.8 Korollar (Sub-/Immersionen sind von lokal konstanten Rang)

Ist eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n eine Immersion oder Submersion in $p \in M$, so gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von p so, dass f auf U konstanten Rang hat.

BEWEIS

Nach Kartenwahl können wir annehmen, dass $f : O \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p = 0$ und $\text{rg} D_0 f = \min\{m, n\}$. Da dies der maximal mögliche Rang ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}^m$ bereits $\text{rg} D_x f \leq \text{rg} D_0 f$. Da f glatt ist, folgt dass $x \mapsto D_x f$ stetig ist, also ist $x \mapsto D_x f \mapsto \text{rg} D_x f$ unterhalb stetig und es folgt die Aussage. ///

II.3. Untermannigfaltigkeiten

II.3.1 Idee

Umgeschrieben

Man kann zumindest zwei verschiedene Ideen haben, was eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit ist: Eine durch – eventuell nicht-lineare – Gleichungen beschriebene Teilmenge von letzterer oder eine Teilmenge so, dass die Karten der umliegenden Mannigfaltigkeit nach gewisser „Begrädigung“ auch Karten dieser (kleineren) Mannigfaltigkeit sind. Wir betrachten zunächst die erste dieser Ideen:

II.3.2 Definition (Untermannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge $M \subseteq N$ einer Mannigfaltigkeit N^n heißt *Untermannigfaltigkeit* der *Codimension* $n - m$, falls M lokal die Nullstellenmenge einer glatten Abbildung ist, die auf M eine Submersion ist, d. h.

$$\forall p \in M \exists U \subseteq M \text{ offen, } p \in U, g \in C^\infty(U; \mathbb{K}^{n-m}) : \begin{cases} g^{-1}(0) = M \cap U \\ \text{rg } D_q g = n - m \quad \forall q \in M \cap U \end{cases}$$

II.3.3 Beispiel

Als erstes Beispiel zeigen wir, dass die Gruppe der *unitären Matrizen* $M = U(n) := \{A \in \text{gl}(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I_n\}$ eine reelle Untermannigfaltigkeit von $N = \text{gl}(\mathbb{C}^n)$ der Dimension (und Codimension) n^2 ist. Dafür betrachten wir für den \mathbb{R} -VR $W = \{X \in \text{gl}(n, \mathbb{C}) : X^* = X\}$ der Dimension n^2 die Abbildung

$$g : \text{gl}(\mathbb{C}^n) \rightarrow W \quad g(A) = AA^* - I_n.$$

Offensichtlich gilt $g(\cdot)^* = g(\cdot)$, also ist g wohldefiniert. Außerdem gilt für alle Matrizen $A \in \text{gl}(\mathbb{C}^n)$

$$g(A) = 0 \iff AA^* - I_n = 0 \iff AA^* = I_n \iff A \in u(\mathbb{C}^n).$$

Die Aussage gilt also (mit $U = \text{gl}(\mathbb{C}^n) = N$), falls g für alle $A \in U(\mathbb{C}^n) = M$ eine Submersion ist. Es gilt

$$D_A g(X) = XA^* + AX^* \quad \forall A, X \in \text{gl}(\mathbb{C}^n).$$

Ist also $Y \in W$ und $A \in U(\mathbb{C}^n)$, so setzen wir $X = \frac{1}{2}YA$ und erhalten

$$D_A g(X) = \frac{1}{2}(YAA^* + A(YA)^*) = \frac{1}{2}(YAA^* + AA^*Y^*) = \frac{1}{2}Y + Y^* = Y,$$

und damit ist $D_A g$ surjektiv für alle $A \in U(\mathbb{C}^n)$, also gilt – mittels der Identifikation von $T_{g(A)}W = W$ und $T_A \text{gl}(\mathbb{C}^n) = \text{gl}(\mathbb{C}^n)$, da beides Vektorräume sind – dass $g|_M$ eine Submersion ist und wir erhalten die Aussage.

II.3.4 Definition (Angepasste Karte und Lokale Parametrisierung)

Ein Abbildung $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ von einer offenen Teilmenge $U \subseteq N$ einer Mannigfaltigkeit N^n heißt *eine an $M^m \subseteq N$ angepasste Karte*³, falls Φ ein Diffeomorphismus ist und $\Phi(U \cap M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ gilt, wobei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist.

Eine Abbildung $\varphi : O \rightarrow N^n$ von einer offenen Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ des euklidischen Raums in eine Mannigfaltigkeit N^n heißt *lokale Parametrisierung*⁴ einer Teilmenge $M^m \subseteq N$, falls φ eine injektive Immersion ist und für eine offene Teilmenge $U \subseteq N$ der Mannigfaltigkeit $\varphi(O) = M \cap U$ gilt.

Aus dem Satz als einzelne Definition herausgezogen.

II.3.5 Satz

Ist $M \subseteq N^n$ eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit N^n , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

Umformuliert

1. $M \subseteq N$ ist eine m -dim. Untermannigfaltigkeit,
2. um jeden Punkt $p \in M$ existiert eine an M^m angepasste Karte,
3. um jeden Punkt existiert eine lokale Parametrisierung von M^m .

BEWEIS

Es sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt.

„1. \Rightarrow 3.“: Wir wählen nach Voraussetzung eine glatte Submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ von einer Umgebung $U \subseteq N$ von $p \in U$ in den euklidischen Raum mit $g^{-1}(0) = M \cap U$. Mit dem Normalformensatz, Satz II.2.2 existieren Karten (\tilde{U}, x) um $p \in \tilde{U} \subseteq U \subseteq N$ und (\tilde{V}, y) um $0 = g(p) \in \mathbb{R}^{n-m}$ so, dass $y \circ g = (x^1, \dots, x^{n-m})$. Wir erkennen, dass für alle Punkte $q \in \tilde{U}$ und $\tilde{x}^k := x^{n-m+k}$ sowie $y_0 := y(0)$ bereits

Als Kreisschluss umgebaut und dafür „1. \Rightarrow 3.“ eingefügt. Andere Teile ausgearbeitet

$$x(q) = (y_0, \tilde{x}^1(q), \dots, \tilde{x}^m(q)) \iff y(g(q)) = y_0 \iff g(q) = 0 \iff q \in M$$

gilt. Damit ist $\tilde{x} = (\tilde{x}^1|_M, \dots, \tilde{x}^m|_M) : M \cap \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ wohldefiniert und injektiv, da für $q, \tilde{q} \in M \cap \tilde{U}$ mit $\tilde{x}(q) = \tilde{x}(\tilde{q})$ bereits

$$\begin{aligned} x(q) &= (x^1(q), \dots, x^{n-m}(q), (\tilde{x})(q)) = (y(g(q)), (\tilde{x})(q)) = (y(0), (\tilde{x})(q)) \\ &= (y(g(\tilde{q})), (\tilde{x})(\tilde{q})), = (x^1(\tilde{q}), \dots, x^{n-m}(\tilde{q}), (\tilde{x})(\tilde{q})) = x(\tilde{q}) \end{aligned}$$

gilt, also mit der Injektivität der Karte $q = \tilde{q}$ folgt. Da die Koordinatentangententialvektoren linear unabhängig sind, ist \tilde{x} eine Submersion. Damit ist \tilde{x} aus Dimensionsgründen eine Bimersion auf ihr Bild und damit $\tilde{x}^{-1} : \tilde{x}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}$ wie gefordert eine lokale Parametrisierung von M um p .

³Üblicherweise wird dieser Begriff nur verwendet, wenn eine Überdeckung von M durch solche an M angepasste Karten existiert, d. h. nach Satz II.3.5, falls M eine Untermannigfaltigkeit von N ist.

⁴Auch dieser Begriff wird üblicherweise nur verwendet, wenn eine Überdeckung von M durch Bilder solcher Parametrisierungen von M existiert, d. h. nach Satz II.3.5 wiederum, falls M eine Untermannigfaltigkeit von N ist.

„3. \Rightarrow 2.“: Wir wählen nach Voraussetzung eine lokale Parametrisierung $\varphi : O \rightarrow N^n$ von einer offenen Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ des euklidischen Raums, d.h. φ ist eine injektive Immersion mit $\varphi(O) = M \cap U$ für eine Umgebung $U \subseteq N$ von $p \in U$. wiederum mit dem Normalformensatz, Satz II.2.2 wählen wir Karten (\tilde{U}, x) und (\tilde{O}, y) von N bzw. \mathbb{R}^m mit $(y, 0) = x \circ \varphi$, also $x \circ \varphi = \text{inc} : O \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und da φ eine injektive Immersion und x eine bijektive Bimersion ist, ist $x \circ \varphi$ ebenfalls eine injektive Immersion und daher gilt für einen Punkt $q \in \tilde{U}$ genau dann $g(q) := (x^{m+1}(q), \dots, x^n(q)) = 0$, falls $q \in \varphi(O) = M \cap U$. Damit ist g wie gewünscht.

„2. \Rightarrow 1.“: Wir wählen nach Voraussetzung eine an M^m angepasste Karte $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ um $p \in U$. Definieren wir

$$g = (\text{pr} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m})|_{\Phi(U)} \circ \Phi,$$

so erkennen wir

$$g^{-1}(0) = \Phi^{-1}(\text{pr}^{-1}(0)) = \Phi^{-1}(\Phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})) = U \cap M.$$

Da nach Voraussetzung Φ ein Diffeomorphismus ist, ist $D_p\Phi$ ein Isomorphismus. Außerdem ist $\text{rg pr} = n - m$ und damit ist

$$D_p g = D_{\Phi(p)} \text{pr} \circ D_p \Phi = \text{Pr} \circ D_p \Phi$$

surjektiv. Damit ist g wie gewünscht eine Submersion. ///

II.3.6 Satz (Über die Inklusion von Untermannigfaltigkeiten)

Ist $M^m \subseteq N^n$ eine Untermannigfaltigkeit, so bilden die angepassten Karten einen Atlas von M und für die so definierte differenzierbare Struktur auf M ist die kanonische Einbettung $\text{inc} : M \hookrightarrow N$ glatt und ein Diffeomorphismus auf ihr Bild, insbesondere ist die Topologie dieser differenzierbaren Struktur gleich der induzierten Topologie.

Des Weiteren gilt die *universelle Eigenschaft*, dass eine Abbildung $f : P \rightarrow N$ von einer Mannigfaltigkeit P mit Bild in der Untermannigfaltigkeit, d.h. $f(P) \subseteq M$, genau dann glatt ist, wenn $f : P \rightarrow M$ glatt ist.

BEWEIS

Umgeschrieben

Nach Satz II.3.5 existiert für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq N$ von $p \in U$ und eine angepasste Karte (U, x) , d.h. $x(U \cap M) = x(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Insbesondere überdecken diese ganz M . Sind (U, x) und (\tilde{U}, \tilde{x}) zwei solche Karten, so ist $x \circ x^{-1}$ ein Isomorphismus und damit ist auch $x \circ x^{-1}|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$ ebenfalls ein Diffeomorphismus. Damit bilden die Einschränkungen $\{(U \cap M, x|_M)\}$ einen Atlas von M .

Ist $p \in M$ ein beliebiger Punkt und (U, x) eine an M angepasste Karte um $p \in U$, so ist insbesondere $\tilde{x} := x|_M$ diffeomorph als Abbildung von $M \rightarrow x(M) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$ und damit ist auch

$$\text{id}|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} = x \circ \tilde{x}^{-1} = x \circ \text{inc}_{M \rightarrow N} \circ \tilde{x}^{-1}$$

glatt als Abbildung von $M \cap U \rightarrow N$. Da die an M angepassten Karten, wenn wir sie auf M einschränken, einen Atlanten von M bilden und diese Karten das Bild der Inklusion überdecken, ist also $\text{inc}_{M \rightarrow N}$ glatt. wiederum erkennen wir, dass $\text{inc}_{M \rightarrow N}$ sogar eine Immersion ist, da für alle solchen Karten (U, x) auch $\text{id}|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$ dies ist. Klarer Weise ist $\text{inc}_{M \rightarrow N}$ offensichtlich injektiv, also ist $\text{inc}_{M \rightarrow N}$ eine injektive Immersion, also ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Insbesondere sind die beiden Topologien gleich.

Wir zeigen nun die universellen Eigenschaft. Ist $f : P \rightarrow N$ eine Abbildung mit $f(P) \subseteq M$ und (U, x) eine an M angepasste Karte, so ist $x \circ f = x|_M \circ f$. Insbesondere ist $x \circ f$ genau dann glatt, wenn $x|_M \circ f$ glatt ist. Da die auf M eingeschränkten an M angepassten Karten einen Atlanten von M bilden, erhalten wir damit, dass $f : P \rightarrow M$ glatt ist, falls $f : P \rightarrow N$ glatt ist und da diese Karten auch Bild f überdecken erhalten wir auch die umgekehrt Folgerung. ///

II.3.7 Frage

Wir haben soeben in Satz II.3.6 nachgewiesen, dass die $\text{inc} : M \hookrightarrow N$ einer Untermannigfaltigkeit eine glatte, injektive Immersion ist. Es stellt sich die Frage, ob dieses Kriterium hinreichend ist, also ob das Bild jeder glatten, injektiven Immersion eine Untermannigfaltigkeit des Zielraums ist.

II.3.8 Beispiel

Betrachten wir die reellen Zahlen $M = \mathbb{R}$ mit ihrer natürlichen Mannigfaltigkeitsstruktur und den Torus $N = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der üblichen differenzierbaren Struktur und definieren für einen Vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 : t \mapsto [tv]$. Wir erkennen leicht, dass Bild f abgeschlossen ist, falls $v_1/v_2 \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahlen ist und sonst Bild f dicht im Torus \mathbb{T}^2 liegt. Insbesondere gilt im zweiten Fall für jede stetige Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ von einer offenen Menge in \mathbb{T}^2 in einen euklidischen Raum mit $g|_{\text{Bild } f} = 0$ bereits $g \equiv 0$, also gibt es keine beschreibende Abbildung.

Wir erkennen bereits an diesem Beispiel, dass *lokal* eine Untermannigfaltigkeit entsteht, also das Bild eines kleinen Intervalls $f((a; b))$ eine Untermannigfaltigkeit des Torus ist. Erst *global* ergeben sich weitere Probleme. Dies ist genau das allgemeine Problem.

II.3.9 Definition (Einbettung)

Eine injektive Immersion $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißt *Einbettung*, falls f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

II.3.10 Satz (Bilder von Einbettungen sind Untermannigfaltigkeiten)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung, dann ist $f(M) \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit von N der Codimension $\dim N - \dim M$.

BEWEIS

Wir wählen eine solche offene Teilmenge $U \subseteq N$ von N , dass ihr Urbild $\tilde{U} := f^{-1}(U)$ unter f ein Kartenbereich einer Karte (\tilde{U}, x) in M ist. Insbesondere ist $f(\tilde{U}) = U \cap M$ offen in $f(M)$ und durch $f \circ x^{-1} : x(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow N$ eine injektive Immersion, da x eine

bijektive Bimersion ist, und es gilt $\text{Bild } f \circ x^{-1} = f(\tilde{U}) = U \cap M$. Damit ist $f \circ x^{-1}$ eine lokale Parametrisierung von M . Da wir um jeden Punkt $p \in f(M)$ eine solche offene Menge U finden, erkennen wir, dass Bild f eine Untermannigfaltigkeit von N ist. //

II.3.11 Korollar (Injektiv-immersive Bilder kompakter Mannigfaltigkeiten)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine injektive Immersion von einer kompakten Mannigfaltigkeit M in eine Hausdorffsche Mannigfaltigkeit N , so ist Bild $f \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $\dim M - \dim N$.

BEWEIS

Umgeschrieben

Nach Satz II.3.10 genügt es nachzuweisen, dass $f : M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus ist. Wir wissen bereits, dass f stetig und injektiv ist, also ist zu zeigen, dass $f : M \rightarrow f(M)$ eine offene Abbildung ist, also für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ von M eine offene Menge $V \subseteq N$ von N mit $f(U) = V \cap f(M)$ existiert. Da f injektiv ist, ist dies gleichwertig dazu, dass

$$f(M \setminus U) = f(M) \setminus f(U) = f(M) \setminus V = f(M) \cap (N \setminus V)$$

für eine offene Menge $V \subseteq N$ gilt. Dies wiederum ist jedoch gleichwertig dazu, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ in M eine abgeschlossene Menge $B \subseteq N$ von N mit $f(A) = f(M) \cap B$ existiert.

Sei also $A \subseteq M$ eine solche abgeschlossene Menge. Da M kompakt ist, ist jedoch jede abgeschlossene Teilmenge von M kompakt. Insbesondere folgt mit der Stetigkeit von f , dass $f(A) \subseteq N$ kompakt ist. Da N Hausdorffsch ist, folgt dass $f(A)$ abgeschlossen ist, also gilt die Behauptung für $B = f(A)$. Damit ist f wie gefordert ein Homöomorphismus und wir erhalten die Aussage mit Satz II.3.10. //

II.3.12 Satz

Ist $M \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt der Untermannigfaltigkeit, so ist die natürliche Inklusion

$$T_p M \rightarrow T_p N : v \mapsto (h \mapsto v \bullet h|_M)$$

der Tangentialräume eine lineare Injektion und in diesem Sinn ist $T_p M$ ein m -dimensionaler Unterraum von $T_p N$.

Ist um $p \in M$ durch g eine beschreibende Funktion bzw. durch φ eine lokale Parametrisierung bzw. durch (U, x) eine an M angepasste Karte gegeben, so gilt für $x = \varphi^{-1}(p)$

$$T_p M = \ker D_p g = \text{Bild } D_x \varphi = \text{lin} \left(\frac{\partial}{\partial p^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p^m} \right).$$

BEWEIS

Identifizieren wir die Tangentialräume mit den Derivationen, also beachten, dass $T_p M = \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M))$ und $T_p N = \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(N))$ gilt, so ist obige Abbildung $v \mapsto (h \mapsto v \bullet h|_M)$ wohldefiniert und linear. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{v} = (h \mapsto v \bullet h|_M) = 0$

bereits $v = 0$ impliziert, diese Abbildung also injektiv ist. Wir zeigen dies mittels Kontraposition. Ist also $g \in C^\infty(M)$ mit $v \bullet g \neq 0$, so wählen wir eine an M angepasste Karte (U, x) von N um p und definieren

$$\tilde{g} : U \rightarrow \mathbb{R} : q \mapsto g(\tilde{x}^{-1}(x^1(q), \dots, x^m(q))),$$

wobei $\tilde{x} = (x^1|_M, \dots, x^m|_M)$ wie üblich die auf M induzierte Karte bezeichnet. Anschaulich bedeutet dies, dass wir g in die „von M wegführenden Richtungen“ konstant fortsetzen. Wählen wir nun eine Hutfunktion $\varphi : N \rightarrow [0; 1]$, d. h. $\varphi|_V \equiv 1$, $\varphi_{N \setminus U} \equiv 0$, wobei $V \subseteq N$ eine offene Umgebung von $p \in V$ ist, so erkennen wir, dass wir $\varphi \cdot \tilde{g}$ durch 0 glatt auf ganz N fortsetzen können. Damit erhalten wir

$$\tilde{v} \bullet (\varphi \cdot \tilde{g}) = v \bullet (\varphi|_M \tilde{g}|_M) = \varphi(p)(v \bullet \tilde{g}|_M) + g(p)(v \bullet \tilde{\varphi}|_M).$$

Da die Ableitung eine lokale Eigenschaft ist, folgt aus $\varphi|_{M \cap V} \equiv 1$ bereits $v \bullet \tilde{\varphi}|_M = 0$, also folgt die behauptete Injektivität mit

$$\tilde{v} \bullet (\varphi \cdot \tilde{g}) = \varphi(p)(v \bullet \tilde{g}|_M) = v \bullet \tilde{g}|_M = v \bullet g \neq 0.$$

Ist $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ eine Submersion mit $g^{-1}(0) = M \cap U$ und $p \in U \subseteq M$, so gilt für $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-m})$ bereits

$$D_p g(v) \bullet h = v \bullet (h \circ g) \quad \forall v \in T_p N,$$

nach dem ersten Teil gilt also wie behauptet $T_p M \subseteq \ker D_p g$, da $g|_{M \cap U} \equiv 0$. Dergleichen gilt für jede Parametrisierung $\varphi : O \rightarrow N$ von M um $p \in \varphi(O)$ bereits $g \circ \varphi \equiv 0$, also nach der Kettenregel $\text{Bild } \varphi \subseteq \ker D_p g$. Da alle Dimensionen übereinstimmen, folgt $\text{Bild } D_x \varphi = T_p M = \text{Bild } \varphi$.

Da für jede an M angepasste Karte (U, x) durch $(U \cap M, x|_{U \cap M}) =: (\tilde{U}, \tilde{x})$ eine Karte von M gegeben ist, ist $\partial/\partial \tilde{x}^1[p], \dots, \partial/\partial \tilde{x}^m[p]$ eine Basis des $T_p M$, da dies für jede Karte gilt. Damit gilt die letzte Aussage. ///

II.4. Wirkung von Lie-Gruppen

II.4.1 Definition (Lie-Gruppe)

Eine Gruppe \mathcal{G} mit glatter Mannigfaltigkeitsstruktur heißt *Lie-Gruppe*, falls die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind, d. h. falls \mathcal{G} eine Mannigfaltigkeit mit glatten Abbildung

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} : (g, h) \mapsto g \cdot h \quad \text{und} \quad \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} : g \mapsto g^{-1}$$

ist, die die Gruppenaxiome

$$\begin{aligned} \exists 1 \in \mathcal{G} : \forall f \in \mathcal{G} \quad 1 \cdot f = f \cdot 1 = f & \quad \text{(Neutralen Elements)} \\ \forall f \in \mathcal{G} \quad f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1 & \quad \text{(Inverses Element)} \\ \forall f, g, h \in \mathcal{G} \quad f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h & \quad \text{(Assoziativität)} \end{aligned}$$

erfüllen.

Der gesamte Abschnitt ist neu eingefügt & geTeXt und basiert auf Mitschriften von FLORIAN BECK der Differentialgeometrie I Vorlesung von PROF. PEDIT im Sommersemester 2009 in der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

II.4.2 Beispiel (Matrizen Lie-Gruppen)

Das klassische Beispiel für eine Lie-Gruppe sind die invertierbaren Matrizen $GL(\mathbb{R}^n)$, deren Multiplikation und Invertierung durch Polynome der Matrixeinträge und Division durch die Determinante, welche ebenfalls ein Polynom der Matrixeinträge ist, gegeben ist. Insbesondere sind diese Abbildungen glatt bezüglich der natürlichen Differenzierbaren Struktur dieses Vektorraums.

II.4.3 Definition ((Links-)Gruppenwirkung)

Ist $\Phi : \mathcal{G} \times M \rightarrow M$ eine glatte Abbildung bezüglich einer Mannigfaltigkeit M und einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , so heißt Φ (*Links-Gruppenwirkung*) (oder (*Links-Gruppenaktion*) oder (*Links-Gruppenoperation*)) von \mathcal{G} auf M , falls

$$\Phi(1_{\mathcal{G}}, p) = p \quad \Phi(fg, p) = \Phi(f, \Phi(g, p)) \quad \forall f, g \in \mathcal{G}, p \in M,$$

wobei $1_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ das Einselement bezeichnet.

Äquivalent definiert sich die Rechtsgruppenwirkung.

II.4.4 Schreibweise

Ist $\Phi : \mathcal{G} \times M \rightarrow M$ eine Links-Gruppenwirkung bezüglich einer Mannigfaltigkeit M und einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , so schreiben wir kurz $g \cdot p$ für $\Phi(g, p)$ und sagen, \mathcal{G} operiert auf M . Des Weiteren bezeichnet $\lambda_g : M \rightarrow M : p \mapsto g \cdot p$ die links-Multiplikation mit einem Element $g \in \mathcal{G}$.

II.4.5 Bemerkung

Da für ein Gruppenelement $g \in \mathcal{G}$ insbesondere ein Inverses-Element $g^{-1} \in \mathcal{G}$ existiert, folgt mit den Gruppenwirkungsaxiomen

$$(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g)(p) = \Phi(g^{-1}, \Phi(g, p)) = \Phi(g^{-1}g, p) = \Phi(1_{\mathcal{G}}, p) = p \quad \forall p \in M,$$

also $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \text{id}_M$ und aus Symmetriegründen $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \text{id}_M$, also ist die links-Multiplikation ein Diffeomorphismus mit $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$. Somit ist

$$\mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M) : g \mapsto \lambda_g$$

ein Gruppenhomomorphismus.

II.4.6 Definition (Orbitabbildung, Bahn)

Für einen Punkt $p \in M$ heißt die Abbildung $\beta_p : \mathcal{G} \rightarrow M : g \mapsto g \cdot p$ *Orbitabbildung* (oder *Bahnabbildung*) von $p \in M$, falls \mathcal{G} eine Lie-Gruppe ist, die links auf M operiert. Das Bild dieser Abbildung $\sigma_p := \text{Bild } \beta_p \subseteq M$ heißt *Orbit* (oder *Bahn*) von $p \in M$ unter \mathcal{G} .

II.4.7 Beispiel

Für die natürliche links-Wirkung $SO(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : (A, v) \mapsto A \cdot v$ der *speziellen Orthogonalengruppe*

$$SO(\mathbb{R}^n) := \{A \in GL(\mathbb{R}^n) \text{ orthogonal und } \det A = 1\}$$

gilt

$$\sigma_v = \{Av \mid A \in SO(\mathbb{R}^n)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \|v\|\} =: \mathcal{S}^{n-1}(\|v\|).$$

II.4.8 Bemerkung (Natürliche Äquivalenzrelation)

Die Operation einer Lie-Gruppe \mathcal{G} auf einer Mannigfaltigkeit M induziert auf natürliche Weise mittels

$$p \sim q \iff \exists g \in \mathcal{G} : g \cdot p = q$$

eine Äquivalenzrelation \sim auf M .

II.4.9 Definition (Isotropiegruppe, Stabilisator, Standgruppe)

Die Teilmenge $\mathcal{G}_p := \{g \in \mathcal{G} \mid g \cdot p = p\} \subseteq \mathcal{G}$ einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , die links auf einer Mannigfaltigkeit M operiert heißt *Stabilisator* (oder *Stand-* oder *Isotropiegruppe*).

II.4.10 Bemerkung (Isotropiegruppe)

Der Begriff Isotropiegruppe ist korrekt, da \mathcal{G}_p eine Untergruppe von \mathcal{G} ist. Wir erhalten in natürlicher Weise die Abbildung $\beta_p : \mathcal{G}/\mathcal{G}_p \rightarrow M$, welche injektiv und damit bijektiv auf σ_p ist.

II.4.11 Frage

Es stellen sich die natürlichen Frage, ob M/\mathcal{G} eine Mannigfaltigkeit ist, wie das Beispiel der projektiven Geraden $\mathbb{P}^n = \mathcal{S}^n/\{\pm \text{id}\}$ motiviert. Des Weiteren stellt sich die Frage, ob in diesem Fall $\beta_p : \mathcal{G}/\mathcal{G}_p \rightarrow \sigma_p$ ein Diffeomorphismus ist.

II.4.12 Definition (Frei und transitive Operation)

Eine Lie-Gruppe \mathcal{G} operiert *frei* auf einer Mannigfaltigkeit M , falls alle Isotropiegruppen nur das neutrale Element beinhalten, d. h. falls

$$\mathcal{G}_p = \{1_{\mathcal{G}}\} \quad \text{d. h.} \quad g \cdot p = p \iff g = 1_{\mathcal{G}}.$$

Die Lie-Gruppe \mathcal{G} operiert *transitiv* auf M , falls die Bahn σ_p eines Punktes $p \in M$ ⁵ die ganze Mannigfaltigkeit ist, also falls

$$\sigma_p = M \quad \text{bzw.} \quad M/\mathcal{G} = \{p\} \quad \text{d. h.} \quad \forall q \in M \exists g \in \mathcal{G} : g \cdot p = q.$$

⁵Sind $q, \tilde{q} \in M$ weitere Punkte, so existieren Gruppenelemente $h, \tilde{h} \in \mathcal{G}$ mit $h \cdot p = q$ und $\tilde{h} \cdot p = \tilde{q}$, also auch $\tilde{h}h^{-1} \cdot q = \tilde{q}$. Also operiert \mathcal{G} genau dann transitiv, falls jeder Punkt transitiv ist.



II.4.13 Definition (Eigentliche Gruppenwirkung)

Eine Lie-Gruppe \mathcal{G} operiert *eigentlich* auf einer Mannigfaltigkeit M , falls die variierte Gruppenwirkungsabbildung

$$\Phi : \mathcal{G} \times M \rightarrow M \times M : (g, p) \mapsto (p, g \cdot p)$$

eigentlich ist, d. h. falls Urbilder von in $M \times M$ kompakten Mengen unter Φ kompakt in $\mathcal{G} \times M$ sind.

Die Beweise von Lemma II.4.14 und Satz II.4.15 werden nicht erbracht.

II.4.14 Lemma (Kompakte Gruppen wirken eigentlich)

Die Operation einer kompakten Lie-Gruppe \mathcal{G} auf einer Mannigfaltigkeit M , ist eigentlich, falls die Operator $\mathcal{G} \times M \rightarrow M$ abgeschlossen ist. Insbesondere ist die Operation jeder endlichen Gruppe eigentlich.

Im Original-Skript aus Differentialgeometrie I aus dem Sommersemester 2009 wurden diese unter Anwendung einer Übung und eines Satzes bewiesen, dessen Beweis nicht erbracht wurde. Ich habe auf diesen Teilbeweis verzichtet.

II.4.15 Satz

Wirkt eine Lie-Gruppe \mathcal{G} frei und eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit M , so ist M/\mathcal{G} eine Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{G}$ eine Submersion.

II.5. Tangentialbündel

II.5.1 Definition (Tangentialbündel, -projektion)

Ist M^m eine Mannigfaltigkeit, so heißt⁶ $TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M)$ das *Tangentialbündel* von M . Die kanonische Projektion auf die erste Komponente $\pi : TM \rightarrow M : (p, \xi) \mapsto p$ heißt *Tangentialbündelprojektion*.

Da später teilweise verwendet und der Einfachheit wegen die Definition als $\bigcup_p \{p\} \times T_p M$ statt $\dot{\bigcup}_p T_p M$

II.5.2 Bemerkung

Es gilt für $p \in M$ insbesondere $\pi^{-1}(p) = T_p M$. Wir werden nicht zwischen $(p, \xi) \in TM$ und $\xi \in T_p M$ unterscheiden, also den Fußpunkt je nach Situation und Notwendigkeit vernachlässigen.⁷

II.5.3 Beispiel (Trivialbündel)

Ist $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so gilt für $x \in U$ immer $T_x U = \mathbb{R}^n$. Damit ist $TU = U \times V$. Dieses Bündel heißt *Trivialbündel* von U .

⁶Üblicherweise wird TM als $TM := \dot{\bigcup}_p T_p M$ definiert und dies als topologische Summe bzw. disjunkte Vereinigung gelesen. Um diese Formalitäten zu umgehen und den *Fußpunkt* von Tangentialvektoren mit aufzufassen, formalisieren wir dies auf diese unübliche Weise.

⁷Diese Identifikation entstammt der in ⁶ angesprochenen Problematik.

II.5.4 Schreibweise

Für eine Mannigfaltigkeit M und eine Menge U schreiben wir $TM|_U$ oder $T|_UM$ für $\pi^{-1}(U)$.

II.5.5 Satz (Mannigfaltigkeitsstruktur des Tangentialbündels)

Ist M^m eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, so ist TM eine $2m$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit und $\pi : TM \rightarrow M$ ist eine surjektive Submersion. Insbesondere ist $\pi^{-1}(p) = T_pM \subseteq TM$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension m .

BEWEIS

Wir verwenden die Idee, dass die Mannigfaltigkeit lokal wie \mathbb{R}^n aussieht und übertragen dies auf die Tangentialräume. Sei dafür (U, φ) eine Karte auf M . Wir definieren eine *Bündelkarte*

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n : (p, v) \mapsto (\varphi(p), D_p\varphi(v)),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $D'_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}V \cong \mathbb{R}^n$ gilt.⁸ Wir schreiben $\Phi = (\varphi, D\varphi)$ – oder, falls wir den Fußpunkt unterdrücken wollen, $\Phi = (\varphi \circ \pi, \varphi' \circ \pi)$. Wir müssen nun zeigen, dass diese Karten verträglich sind. Sind (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten von M mit den zugehörigen Bündelkarten $(\pi^{-1}(U), (\varphi, D\varphi) =: \Phi)$ und $(\pi^{-1}(V), (\psi, D\psi) =: \Psi)$, so gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi^{-1})(x, \xi) &= \Psi(\Phi^{-1}(x, \xi)) = \Psi(\varphi^{-1}(x), D_x\varphi^{-1}(\xi)) \\ &= (\psi(\varphi^{-1}(x)), D_{\varphi^{-1}(x)}\Psi(D_x\varphi^{-1}(\xi))) \\ &= (\psi(\varphi^{-1}(x)), D_x(\Psi \circ \varphi)(\xi)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1}))(x, \xi). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist nach Voraussetzung C^{k-1} und die Definitionsbereiche überdecken per Definition das Tangentialbündel. Die weiteren Aussagen folgen aus den Definitionen. ///

II.5.6 Definition (Ableitung)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N , dann heißt

$$Df := f' : TM \rightarrow TN : (p, v) \mapsto (f(p), D_p f(v))$$

das *Differential* (oder die *Ableitung*) der Abbildung f .

⁸Wieder sei erwähnt, dass dies auch ohne Verwendung des Fußpunktes in der Definition von TP formalisiert werden kann, indem p durch $\pi(v)$ ersetzt wird.

Wir erinnern noch einmal daran, dass wir den Fußpunkt oft unterdrücken und in dies dann als $Df : TM \rightarrow TN : v \mapsto D_{\pi(v)}f(v)$ interpretieren. Offensichtlich gilt $D_p f = Df|_{T_p M}$.

II.5.7 Lemma (Differential als glatte Abbildung)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung zwischen C^k -Mannigfaltigkeiten M^m und N^n , so ist $Df : TM \rightarrow TN$ eine C^{k-1} -Funktion.

BEWEIS

Wir drücken Df in Bündelkarten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ von M und $(\pi^{-1}(V), \Psi)$ von N aus und erhalten für $(x, \xi) \in \Phi(\pi^{-1}(U))$ mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\Psi \circ Df \circ \Phi^{-1})(x, \xi) &= (\Psi \circ Df)(\varphi^{-1}(x), D_x \varphi^{-1}(\xi)) \\ &= \Psi\left(f(\varphi^{-1}(x)), D_{\varphi^{-1}(x)} f(D_x \varphi^{-1}(\xi))\right) \\ &= \Psi\left((f \circ \varphi^{-1})(x), D_x(f \circ \varphi^{-1})(\xi)\right) \\ &= \left((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D_x(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\xi)\right). \end{aligned}$$

Da dies nach Voraussetzung eine C^{k-1} -Abbildung ist, gilt die Aussage. ///

Nun können wir die Kettenregel etwas eleganter schreiben.

II.5.8 Theorem (Kettenregel)

Für zwei Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten sind $Df : TM \rightarrow TN$ und $Dg : TN \rightarrow TP$ glatt und es gilt

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df.$$

Insbesondere ist die Verkettung glatter Funktionen glatt.

BEWEIS

Folgt direkt aus der „alten“ Kettenregel, Satz II.1.15. ///

II.6. Vektorfelder

II.6.1 Definition (Vektorfeld)

Eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM$ heißt (*glattes*) *Vektorfeld*, falls $\pi \circ X = \text{id}_M$. d. h. falls für alle Punkte $p \in M$ immer $X(p) \in T_p M$ gilt.

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor der Mannigfaltigkeit in diesem Punkt zu. Man könnte sich beispielsweise einen Fluß – bzw. die Menge aller Ortspunkte eines Flusses – als Mannigfaltigkeit vorstellen. Dann wäre – in grober Näherung – die Strömungskarte, also die Abbildung, die jedem Punkt die Strömungsrichtung des Flusses in diesem Punkt zuordnet, ein Vektorfeld.

II.6.2 Schreibweise

Wir schreiben

$$\mathfrak{X}(M) := \{X \in C^\infty(M; TM) \mid \pi \circ X = \text{id}_M\}$$

für die Menge aller glatten Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M . Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ so schreiben wir oft X_p für $X(p)$.

II.6.3 Lemma (Lokale Beschreibung von Vektorfeldern)

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld einer Mannigfaltigkeit M^m und (U, φ) eine Karte von M , so existieren glatte Funktionen $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$X_p = \sum_{i=1}^m X^i(p) \frac{\partial}{\partial p^i}$$

BEWEIS

Sei $(TM|_U, \Phi)$ die zu (U, φ) gehörende Bündelkarte und $x \in \varphi(U)$. Es gilt

$$(\Phi \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x, \xi(x)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $\xi : \varphi(U) \rightarrow V$ glatt ist. Insbesondere können wir dies in Koordinaten als

$$(\Phi \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x, \xi^i e_i) = (x, \xi^i(x) e_i) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

schreiben, wobei die $\xi^i : \varphi(U) \rightarrow V$ glatt sind. Es folgt

$$\begin{aligned} X \circ \varphi^{-1}(x) &= \Phi^{-1}(x, \xi^i(x) e_i) = \left(\varphi^{-1}(x), D_x \varphi^{-1}(\xi^i(x) e_i) \right) \\ &= \left(\varphi^{-1}(x), \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right). \end{aligned}$$

Definieren wir nun $X^i(p) := \xi^i(\varphi(x))$ so erhalten wir die gewünschte Aussage. ///

Betrachten wir den Beweis, so erkennen wir, dass X genau dann glatt in U ist, falls ξ glatt ist. Also ist X genau dann in U glatt, wenn alle ξ^i glatt sind.

II.6.4 Definition (Koordinatenvektorfeld)

Ist M eine Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte dieser, so heißen die Vektorfelder

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow TM : p \mapsto \left(p, \frac{\partial}{\partial p^i} \right) = D_{\varphi(p)} \varphi^{-1}(\varphi(p), e_i)$$

Koordinatenvektorfelder von φ . Nach Lemma II.6.3 sind diese glatt.

Eingefügt, da es
später verwendet wird

II.6.5 Lemma (Karte mit vorgegebenen Koordinatenvektorfeldern)

Sind $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M so, dass für einen Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit $X_{1p}, \dots, X_{kp} \in T_p M$ paarweise verschieden sind, so existiert eine Karte mit (U, x) mit $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = X_i(p)$.

BEWEIS

Wir wählen eine beliebige um $p \in M^m$ zentrierte Karte $(U, \tilde{\varphi})$. Da die X_i punktweise linear-unabhängig sind, können wir eine Basis f_1, \dots, f_m von \mathbb{R}^m wählen so, dass für $i = 1, \dots, k$ bereits $f_i = X_{ip}$ gilt. Betrachten wir die Basiswechselabbildung $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\psi(f_i) = e_i$, wobei e_i die euklidischen Basisvektoren sind, so gilt für die um p_0 zentrierte Karte $\varphi := \psi \circ \tilde{\varphi}$ und alle $i \leq k$ bereits $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{p_0} = X_i(p_0)$. ///

II.6.6 Lemma (Vektorfelder sind ein freier $C^\infty(M)$ -Modul)

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist \mathfrak{X} ein lokal freier $C^\infty(M)$ -Modul bezüglich

1. Addition: $(X + Y)(p) := X(p) + Y(p)$, wobei $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
2. Skalarmultiplikation: $(fX)(p) := f(p)X(p)$, wobei $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

BEWEIS

Es genügt zu zeigen, dass die Addition und die Skalarmultiplikation glatt ist und dies folgt aus der lokalen Beschreibung von Vektorfelder, Lemma II.6.3. Für jede Karte (U, x) existieren nämlich gewisse Funktionen $\xi, \eta \in C^\infty(U, M)$

$$X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y|_U = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Insbesondere sind

$$(X + Y)|_U = \sum (\xi^i + \eta^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (fX)|_U = \sum (f\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ebenfalls glatt und die Moduleigenschaften folgen aus den VR-Eigenschaften von $T_p N$. Also ist $\mathfrak{X}(U)$ ein freier $C^\infty(U)$ -Modul. Da glatte Vektorfelder und glatten Funktionen eindeutig durch ihre lokale Beschreibung charakterisiert werden, folgt die Aussage. ///

II.6.7 Bemerkung

\mathfrak{X} ist eine lokal freie Garbe auf M .

II.6.8 Schreibweise

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $f \in C^k(M)$ eine glatte Funktion, so schreiben wir $X \bullet f$ für die $C^{k-1}(M)$ -Funktion $p \mapsto X_p f$. Dabei ist der Unterschied zu dem $C^k(M)$ -Vektorfeld fX mit $p \mapsto f(p)X_p$ zu beachten.

Wie in Theorem II.1.12 zeigen wir nach der extrinsischen Konstruktion der Vektorfelder nun auch eine intrinsische Charakterisierung.

II.6.9 Satz (Vektorfelder und Derivationen)

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist die Abbildung

$$\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)) : X \mapsto (f \mapsto X \bullet f),$$

in \mathbb{R} -Vektorraum-Isomorphismus.

Insbesondere⁹ ist $\mathfrak{X}(M)$ eine Lie-Algebra, d. h. es gibt einen Vektorfeldkommutator $[X, Y]_{\mathcal{C}^\infty} = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(M)$, der die folgenden Eigenschaften hat:

1. er ist \mathbb{R} -bilinear
2. er ist anti-symmetrisch: $[X, Y] = -[Y, X]$
3. er erfüllt die Jacobi-Identität: $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$
4. er erfüllt die Identität: $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y \bullet f)X$.

Lokal haben wir für $Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $X = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$[X, Y] = \left(\xi^i \frac{\partial x^i}{\partial \eta^k} - \eta^j \frac{\partial}{\partial \xi^k} x^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Also folgt, dass $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ eine unendlich-dimensionale \mathbb{R} -Liealgebra ist.

BEWEIS

Um die Isomorphie zu zeigen, gehen wir ähnlich wie in Theorem II.1.12 vor.

Linearität: Die \mathbb{R} -Linearität ergibt sich, da für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathfrak{X}$ sowie $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned} ((X + \alpha Y) \bullet f)(p) &= (X + \alpha Y)(p) \bullet f = (X(p) + \alpha Y(p)) \bullet f \\ &= X(p) \bullet f + \alpha Y(p) \bullet f = ((X \bullet f) + \alpha(Y \bullet f))(p) \end{aligned}$$

gilt.

Injektivität: Wir zeigen, dass der Kern nur die Null beinhaltet. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ so, dass für alle glatte Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ bereits $X \bullet f = 0$ gilt. Also gilt für alle $p \in M$ bereits $X_p \in T_p M = \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M))$ und $X_p \bullet f = 0$ für jeden Punkt $p \in M$ gilt. Also gilt nach Theorem II.1.12 für alle $p \in M$ bereits $X(p) = 0$, also $X = 0$.

Surjektivität: Sei $\delta \in \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$. Es ist $\text{ev}_p \circ \delta \in \text{Der}_{\text{ev}_p}(\mathcal{C}^\infty(M)) = T_p M$. Wir definieren in diesem Sinn für jeden Punkt $p \in M$ den Tangentialvektor

⁹da wir aus den Übungen wissen, dass $\text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$ eine \mathbb{R} -Liealgebra ist

$X_p := \text{ev}_p \circ \delta$. Per Definition gilt $\pi \circ X = \text{id} \mid_M$ und es verbleibt zu zeigen, dass X ein glattes Vektorfeld ist. In einer Karte (U, x) um $p_0 \in M$ gilt für gewisse Zahlen $\xi^i(p) \in \mathbb{R}$

$$X_p = \xi^i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial p^i}.$$

Setzen wir x_j zu einer Funktion f_j auf M fort so, dass für eine Umgebung V von p_0 bereits $x|_V = f|_V$ gilt, so folgt

$$(\text{ev}_p \circ \delta) f_j = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial p^i} \bullet f_j = \xi_j(p).$$

Damit gilt in U bereits $\xi_j = (p \mapsto (\text{ev}_p \circ \delta) f_j) = \delta(f_j) \in C^\infty(U)$ und damit ist X ein glattes Vektorfeld.

Nun kommen wir zu den Eigenschaften der Lie-Klammer. Die ersten beiden Eigenschaften sind klar.

3. Führen wir nicht aus, läuft über direktes Rechnen.

4. Wir bemerken zunächst, dass für $h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [fX, Y] \bullet h &= (fX) \bullet (Y \bullet h) - Y \bullet ((fX) \bullet h) \\ &= f(X \bullet (Y \bullet h)) - (Y \bullet f)(X \bullet h) - f(Y \bullet (X \bullet h)) \\ &= f[X, Y] \bullet h - (Y \bullet f)(X \bullet h) = (f[X, Y] - (Y \bullet f)X) \bullet h \end{aligned}$$

gilt. Nun kommen wir zur lokalen Beschreibung von $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y \bullet f)X$ für $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. In einer Karte (U, x) gilt für gewisse Glatte Funktionen $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \stackrel{4.}{=} \left(\xi^i \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] - \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &\stackrel{4.}{=} \left(\xi^i \eta^j \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] + \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \xi^i \eta^j \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass der hintere Term Null wird. Für alle $h \in C^\infty(M)$ gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \bullet h &= \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \bullet h \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet h \right) \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^i} = 0. \end{aligned} \quad ///$$

II.6.10 Bemerkung (Liekammer von Koordinatenvektorfeldern)

Wir haben im Beweis von Satz II.6.9 gesehen, dass die Lieklammer von Koordinatenvektorfeldern Null ist, d. h. für jede Karte (U, x) gilt $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^k] = 0$.

Kapitel III.

Differentialgleichungen

III.1. Differentialgleichungen

III.1.1 Definition ((maximale) Integralkurve)

Ist M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf dieser, dann heißt eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ *Integralkurve* von X , falls

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

gilt. Dabei bezeichnet $\dot{\gamma}$ die Ableitung in der Interpretation $\gamma' : TI \cong I \times \mathbb{R} \rightarrow TM$, dabei ist $TI = I \times \mathbb{R}$ und $\dot{\gamma}(t) := \gamma'_t(1) \in T_{\gamma(t)}M$.

Abbildung eingefügt

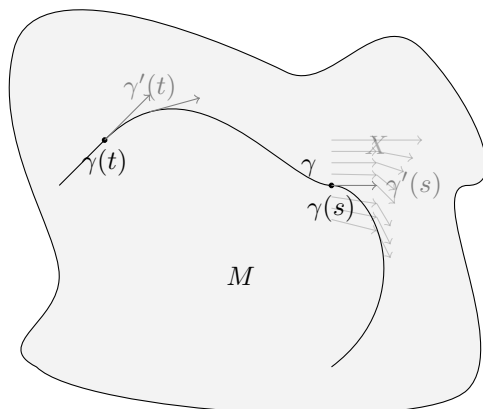


Abbildung III.1.: Integralkurve

Eine Integralkurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt *maximale* Integralkurve von X um $p_0 \in M$, falls $\text{Bild } \gamma \ni p_0$ und für jede weitere Integralkurve $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M$ mit $\text{Bild } \tilde{\gamma} \ni p_0$ bereits $\text{Bild } \tilde{\gamma} \subseteq \text{Bild } \gamma$ folgt.

III.1.2 Satz (Lokale Existenz von Integralkurven)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}$ ein Vektorfeld auf dieser und $p_0 \in M$ ein Punkt in dieser, so

1. gibt es eine Integralkurve $\gamma : I \rightarrow M$ von X um p_0 , d. h. $\gamma(0) = p_0$ und $\dot{\gamma}(t) = X \circ \gamma(t)$;
2. gilt Eindeutigkeit der Lösung, d. h. falls $\gamma : I \rightarrow M$ und $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M$ beides Integralkurven von X um p_0 sind, dann ist $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle Zeitpunkte $t \in I \cap \tilde{I}$.

BEWEIS

Umformuliert

Existenz: Sei $p \in M$ beliebig. Wir wählen eine Karte (U, φ) um $p \in U$ und erkennen, dass es genügt eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \varphi(U)$ mit $\gamma(0) = \varphi(p)$ und

$$\dot{\gamma}(t) = (D\Phi \circ X \circ \gamma)(t) = \underbrace{\left(D_{\varphi^{-1}(\gamma(t))} \Phi \circ X \right)}_{\varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n}(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

zu finden, da dann mittels Rückzug mit $\varphi^{-1} \circ \gamma$ die Integralkurve auf M um p gefunden ist. Die Existenz von γ folgt aber aus der Lösungstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen im \mathbb{R}^n .

Eindeutigkeit: Seien γ und $\tilde{\gamma}$ zwei Integralkurven von X um p_0 und $A := \{t \in I \cap \tilde{I} : \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}$. Insbesondere ist $A \neq \emptyset$, da nach Voraussetzung $0 \in A$ ist. Wir zeigen, dass $A \subseteq I \cap \tilde{I}$ offen und abgeschlossen in $I \cap \tilde{I}$ ist, da dies damit die ganze Menge ist, weil $I \cap \tilde{I}$ als Schnitt von Intervallen selbst ein Intervall, also zusammenhängend, ist.

Nach Voraussetzung sind $\gamma, \tilde{\gamma} : I \cap \tilde{I} \rightarrow M$ stetig, also ist auch $(\gamma, \tilde{\gamma}) : I \cap \tilde{I} \rightarrow M \times M$ stetig. Des Weiteren gilt genau dann $t \in A$, falls $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$, also falls $(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \in \Delta$, wenn $\Delta \subseteq M^2$ die Diagonale bezeichnet. Damit gilt $A = (\gamma, \tilde{\gamma})^{-1}(\Delta)$ und dies ist als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen – $\Delta \subseteq M^2$ ist abgeschlossen, da M Hausdorffsch ist. Also ist $A \subseteq I \cap \tilde{I}$ abgeschlossen.

Ist $t_0 \in I \cap \tilde{I}$ beliebig, so gilt $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$. Wählen wir eine Karte (U, φ) um $\gamma(t_0)$ und definieren $J = \gamma^{-1}(U) \subseteq I$ sowie $\tilde{J} = \tilde{\gamma}^{-1}(U) \subseteq \tilde{I}$, so sind diese Mengen offene in I bzw. \tilde{I} . Nach Konstruktion sind nun $\varphi \circ \gamma : J \rightarrow \varphi(U)$ und $\varphi \circ \tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow \varphi(U)$ Lösungen zur Differentialgleichung $\dot{\delta} = D\varphi \circ X \circ \delta$ mit dem Anfangswert $\delta(t_0) = \varphi(\gamma(t_0))$. Die lokale Theorie im \mathbb{R}^n liefert nun, dass in $J \cap \tilde{J}$ bereits $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ gilt. Damit gilt $s_0 \in J \cap \tilde{J} \subseteq A \subseteq I \cap \tilde{I}$. Da $J \cap \tilde{J}$ offen ist und $s_0 \in A$ beliebig war, folgt, dass A offen ist. ///

III.1.3 Definition (Fluss eines Vektorfelds)

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit, so heißt eine Abbildung $\Phi^X : D^X \rightarrow M$ Fluss von X mit dem Flussbereich D^X , falls

- $D^X = \bigcup_{p \in M} (I_p \times \{p\})$ für gewisse offene Intervalle $I_p \subseteq \mathbb{R}$ um $0 \in I_p$
- $\Phi(\cdot, p)$ ist eine maximale Integralkurve von X um $p = \Phi(0, p)$

Ist klar, welches Vektorfeld gemeint ist, so schreiben wir kurz $\Phi : D \rightarrow M$ statt $\Phi^X : D^X \rightarrow M$.

III.1.4 Definition (Vollständigkeit eines Vektorfelds)

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *vollständig*, falls ein Fluss zu X mit $D = \mathbb{R} \times M$ existiert.

Also heißt ein Vektorfeld vollständig, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit eine globale Lösungskurve gibt, d. h. falls für alle $p \in M$ ein Weg $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\gamma_p(0) = p$ und $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ existiert.

III.1.5 Lemma

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $\Phi : D \rightarrow M$ der Fluss zu X , so gilt

$$I_{\Phi(t,p)} = I_p - t \quad \text{und} \quad \Phi(s+t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p)) \quad \forall t, s+t \in I_p.$$

BEWEIS

Wir definieren den Weg

$$\gamma : I_p - t \rightarrow M : s \mapsto \Phi(s+t, p).$$

Da $\Phi(\cdot, p)$ eine Integralkurve, also insbesondere glatt ist, ist auch γ glatt. Des Weiteren gilt $\gamma(0) = \Phi(t, p)$ und

$$\dot{\gamma}(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_s \Phi(s+t, p) = X(\Phi(t+s, p)) = X(\gamma(s)).$$

Also ist γ eine Integralkurve zu X um $\gamma(0) = \Phi(t, p)$, ebenso wie $\Phi(\cdot, \Phi(t, p))$. Insbesondere sind diese auf dem gemeinsamen Definitionsbereich gleich und, da $\Phi(\cdot, \Phi(t, p))$ eine maximale Integralkurve ist, gilt $I_p - t \subseteq I_{\Phi(t,p)}$. Durch das umgekehrte Argument folgt Gleichheit. Außerdem haben wir damit

$$\Phi(t+s, p) = \gamma(s, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$$

nachgewiesen. ///

III.1.6 Korollar (Flüsse bestehen aus Diffeomorphismen)

Ist $\Phi : D \rightarrow M$ der Fluss zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M , so ist $\Phi_t := \Phi(t, \cdot) : D_t \rightarrow D_{-t}$ ein Diffeomorphismus mit $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, wobei $D_t := \{p \in M \mid (t, p) \in D\}$.

Aus einer Bemerkung
herausgezogen und
umformuliert

III.1.7 Bemerkung

Ist $\Phi : D \rightarrow M$ der Fluss zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit, so ist $\Phi \in C^\infty(D)$, also glatt in beiden Variablen. Dies folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen von ihren Anfangswerten. Auch ist $D \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen.

III.1.8 Bemerkung

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein vollständiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit, so besteht $\Phi := \Phi^X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ aus Diffeomorphismen auf M , also interpretieren wir dies als einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ ist Diffeomorphismus}\} : t \mapsto \Phi_t = \Phi(t, \cdot)$$

von der additiven Gruppe auf \mathbb{R} in die Diffeomorphismen auf M mit der Komposition. Wir nennen Φ daher auch *1-Parameter-Gruppe* von Diffeomorphismen auf M . Dabei gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(p) = X(\Phi_0(p)) = X(p) \quad \forall p \in M,$$

also ist $d/dt|_0 \Phi_t = X$.

III.1.9 Lemma (Über nicht maximale Integralkurven)

Ist $\Phi : D \rightarrow M$ der Fluss zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so gilt für $I_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in D^X\}$ entweder $\sup I_p = \infty$ oder für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ existiert ein Zeitpunkt $t_{p,K} \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(t, p) \notin K$ für alle späteren Zeitpunkte $t_{p,K} < t < \infty$.¹

BEWEIS

Es sei $\gamma = \Phi(\cdot, p) : I \rightarrow M$. Gilt $\sup I = \infty$, so ist nichts zu zeigen, also können wir annehmen, dass $I = (a, b)$ für $-\infty \leq a < b < \infty$.

Da $K \subseteq M$ kompakt und M Hausdorffsch ist, ist $K \subseteq M$ abgeschlossen, also ist $\gamma^{-1}(K) \subseteq I$ abgeschlossen und nach oben gegen b beschränkt. Also existiert

$$t_0 = \max \gamma^{-1}(K) < b.$$

Es folgt die Aussage, da damit für alle $t \in I$ mit $t_0 < t$ bereits $\gamma(t) \notin K$ folgt. ///

III.1.10 Satz

Ist $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ ein Vektorfeld mit kompakten Träger, so ist X vollständig. Insbesondere ist jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig.

BEWEIS

Bezeichne $\Phi : D \rightarrow M$ den Fluss zu X . Ist $p \notin \text{supp}(X)$, so gilt $\Phi(t, p) = p$, da $\Phi(\cdot, p) = X(p) = 0$. Insbesondere ist $I_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in D\} = \mathbb{R}$.

Ist $p \in \text{supp}(X)$, so gilt $I_p = \mathbb{R}$ oder es existiert nach Lemma III.1.9 ein Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\Phi(t, p) \notin \text{supp}(X)$, aber auch dann folgt $I_p - t = I_{\Phi(t,p)} = \mathbb{R}$. ///

¹Im Fall einer Mannigfaltigkeit mit Rand kann auch $\sup I_p < \infty$ gelten, falls $\Phi(\sup I_p, p) \in \frac{\partial}{\partial x} M$ und $X_{\Phi(\sup I_p, p)}$ „heraus aus der Mannigfaltigkeit“ zeigt.

III.2. Satz von Frobenius

Sind ein paar Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben, welche punktweise linear unabhängig sind, so ist eine natürliche Frage, zu fragen, ob es eine Untermannigfaltigkeit N gibt, deren Tangentialraum $T_p N$ gerade durch $X_1(p), \dots, X_k(p)$ aufgespannt wird, d. h.

$$T_p N = \text{lin}(X_i(p)) \quad \forall p \in N.$$

Falls es eine solche Untermannigfaltigkeit N gibt, so nennen wir diese *Integraluntermannigfaltigkeit* für X_1, \dots, X_k .

Wir können dies auch so auffassen, dass wir das Differentialgleichungssystem

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \right|_t = X_i(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = p_0$$

für ein $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ lösen wollen. Falls es so ein γ gibt, dann ist γ eine Immersion, da die Vektorfelder X_i punktweise unabhängig sind. Und damit existiert eine Umgebung $J \subseteq I$ von 0 in der γ injektiv ist. Damit ist $\gamma(J) := N \subseteq M$ wie gewünscht eine Untermannigfaltigkeit.

III.2.1 Bemerkung

Der Fall $k = 1$ wurde im letzten Abschnitt III.1, „Differentialgleichungen“ betrachtet.

III.2.2 Idee (Notwendige Bedingung für die Lösbarkeit)

Falls es um $p_0 \in N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit N gibt, so existiert eine angepasste Karte (U, x) um $p_0 \in M$ so, dass $(\partial/\partial p^1, \dots, \partial/\partial p^k)$ für alle Punkte $p \in U \cap N$ eine Basis von $T_p N$ ist. Insbesondere gilt für $X_j \in \text{lin}\{X_i\}_{i=1}^k = \text{lin}\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^k = T_p N$

$$[X_i, X_j]_p \in T_p N = \text{lin} \left\{ \frac{\partial}{\partial p^i} \right\}_{i=1}^k = \text{lin}\{X_i\}_{i=1}^k.$$

Also ist $[X_i, X_j] \in \text{lin}\{X_1, \dots, X_k\}$ eine notwendige Bedingung, damit das PDE-System lösbar ist.

III.2.3 Definition ((Integrables) Unterbündel)

Ist $E = \bigcup_p E_p \subseteq TM$ eine Teilmenge des Tangentialbündels TM einer Mannigfaltigkeit M , so heißt E ein *Unterbündel*² (vom Rang k) von TM , falls E_p jeweils ein k -dimensionaler Unterraum von $T_p M$ ist und für jeden Punkt $p_0 \in M$ eine offene Umgebung von p_0 und Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ existieren, welche punktweise linear unabhängig sind und E punktweise aufspannen, d. h.³

$$E_p = \text{lin}\{X_i(p)\} \quad \forall p \in U.$$

²Bündel und Unterbündel werden allgemeiner in Kapitel IV betrachtet. Mehr zu Unterbündel findet sich in Abschnitt IV.2.

³Wir sagen, ein Unterbündel ist eine glatte Zuordnung eines k -dimensionalen Untervektorraum von $T_p M$ für alle $p \in M$.

Ein Unterbündel $E \subseteq TM$ heißt *integrabel* (oder *involutiv*), falls der Kommutator zweier tangentialer Vektorfelder tangential ist, d. h.

$$[X, Y] \in \Gamma(E) \quad \forall X, Y \in \Gamma(E).$$

III.2.4 Definition (Integraluntermannigfaltigkeit)

Eine Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit M heißt *Integraluntermannigfaltigkeit* eines Unterbündels E , falls der Tangentialraum von N gerade E ist, d. h. falls für jeden Punkt $p \in N$ der Untermannigfaltigkeit $T_p N = E_p$ gilt.

III.2.5 Definition (Tangentiale Vektorfelder)

Ist E ein Unterbündel vom Rang k des Tangentialbündels TM einer Mannigfaltigkeit M , so heißt

$$\Gamma(E) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X(p) \in E_p \forall p \in M\}$$

die Menge der zu E *tangentialen Vektorfelder*⁴ auf M . Insbesondere ist $\Gamma(E)$ ein $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ -Modul.

III.2.6 Definition

Für eine Abbildung $f : N \rightarrow M$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M heißen zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(N)$ und $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *verwandt* bezüglich f , in Symbolen $X \overset{f}{\sim} Y$, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow X & & \downarrow Y \\ TN & \xrightarrow{Df} & TM \end{array}$$

kommutiert.

III.2.7 Lemma

Ist $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfelder auf dieser Mannigfaltigkeit, so ist X genau dann tangential zu N , falls ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(N)$ auf N existiert so, dass X und Y verwandt bezüglich $\text{inc} : N \hookrightarrow M$ ist.

BEWEIS

Offensichtlich ist X tangential, falls ein solches Y existiert. Existiert kein solches Y , so gilt $X_p \notin TN_p$ für ein $p \in N$, also ist X nicht tangential an N . ///

⁴Diese entsprechen den *Schnitten* auf E – siehe Definition IV.1.6

III.2.8 Lemma

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeit[en] M und N sowie $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(N)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich f verwandte Vektorfelder $X_i \stackrel{f}{\sim} Y_i$, so sind auch die Kommutatoren verwandt, d. h. es gilt $[X_1, X_2]_N \stackrel{f}{\sim} [Y_1, Y_2]_M$.

BEWEIS

Für $g \in C^\infty(N)$ gilt

$$\begin{aligned} (Y_1 Y_2)_{f(p)}(g) &= (Y_1 Y_2 g)(f(p)) = Y_{1f(p)}(Y_2 g) = (D_p f X_{1p})(Y_2 g) \\ &= X_{1p}((Y_2 g) \circ f) = X_{1p}(Y_{2f(\cdot)} g) = X_{1p}(D_{(\cdot)} f(X_{2(\cdot)} g)) \\ &= X_{1p}(X_{2(\cdot)}(g \circ f)) = (X_1 X_2)_p(g \circ f) = D_p f((X_1 X_2)_p)g. \end{aligned}$$

Indem wir selbige Rechnung für $Y_2 Y_1$ anstelle von $Y_1 Y_2$ durchführen, erhalten wir für alle Punkte $p \in M$ und alle Funktionen $g \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2]_{f(p)} g &= (Y_1 Y_2)_{f(p)} g - (Y_2 Y_1)_{f(p)} g \\ &= D_p f((X_1 X_2)_p) g - D_p f((X_2 X_1)_p) g = D_p f([X_1, X_2]_p) g. \end{aligned}$$

Da Tangentialvektoren mit ihrer Wirkung als Derivationen vollständig charakterisiert sind, folgt $[Y_1, Y_2] \circ f = Df([X_1, X_2])$, also die Behauptung. ///

III.2.9 Lemma

Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeit[en] M und N , dann ist der sogenannte *push forward*

$$f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N) : X \mapsto D_{f^{-1}(\cdot)} f(X_{f^{-1}(\cdot)})$$

ein Liealgebrenisomorphismus und für den Fluss Φ^X zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\Phi_t^{f_* X} = f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}$.

BEWEIS

Für $(t, p) \in D^{f_* X}$ und $g \in C^\infty(N)$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \Phi^{f_* X}(\cdot, p) \right) g &= ((f_* X)_p) g = (D_{f^{-1}(p)} f(X_{f^{-1}(p)})) g = X_{f^{-1}(p)}(g \circ f) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Phi^X(\cdot, f^{-1}(p)) \right) (g \circ f). \end{aligned}$$

Da $\Phi^X(\cdot, f^{-1}(p))$ ein Weg mit $0 \mapsto f^{-1}(p)$ und Ableitung $\frac{d}{dt} \Phi^X(\cdot, f^{-1}(p))$ ist, gilt per Beschreibung der Anwendung eines Tangentialvektors auf eine Funktion durch einen zugehörigen Weg

$$\left(\frac{d}{dt} \Phi^{f_* X}(\cdot, p) \right) g = \frac{d}{dt} (g \circ f \circ \Phi^X(\cdot, f^{-1}(p))) = \left(\frac{d}{dt} (f \circ \Phi^X(\cdot, f^{-1}(p))) \right) g.$$

Beweis war eine Übungsaufgabe

Beweis leicht verändert



Also gilt $d/dt \Phi^{f_* X}(\cdot, p) = d/dt(f \circ \Phi^X(\cdot, f^{-1}(p)))$ und

$$\Phi^{f_* X}(0, p) = p = f(f^{-1}(p)) = f \circ \Phi^X(0, f^{-1}(p)).$$

Damit ist $f \circ \Phi^X(0, f^{-1}(p))$ eine Integralkurve von $f_* X$ durch p und mit der Eindeutigkeit der Integralkurve ergibt sich die Behauptung. ///

Erklärung eingefügt

Es stellt sich nun die natürliche Frage, was passiert, wenn wir mehrere Flüsse „nacheinander“ durchlaufen, dass heißt zunächst s „Zeit“-Einheiten einen Fluss Φ^X und dann vom Zielpunkt $\Phi_t^X(p_0)$ noch t „Zeit“-Einheiten dem anderen Fluss Φ^Y zu $\Phi_s^Y(\Phi_t^X(p_0))$ folgen. Es ist nun einfach Beispiele anzugeben, bei denen es entscheidend ist, die Reihenfolge beizubehalten, d. h. bei denen dieser Zielpunkt $\Phi_s^Y(\Phi_t^X(p_0))$ ungleich dem der umgekehrter Reihenfolge $\Phi_t^X(\Phi_s^Y(p_0))$ ist. Wir geben nun eine infinitesimal Charakterisierung, wann diese Reihenfolge keine Rolle spielt, d. h. eine Charakterisierung durch eine Eigenschaft der zugehörigen Vektorfelder⁵:

III.2.10 Satz (über kommutierende Flüsse)

Sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei vollständige⁶ Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M , so gilt

$$[X, Y] = 0 \iff \Phi_s^X \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS

Beweis umgeschrieben

Wir bemerken zunächst, dass es sich um eine lokale Gleichung handelt, also dass es genügt die Aussage in einer Umgebung eines beliebigen Punktes $p_0 \in M$ nachzuweisen. Also betrachten wir eine um den beliebigen Punkt $p_0 \in M$ zentrierte Karte (U, φ) und können annehmen, dass Bild $\varphi = \mathbb{R}^n$. Nach Lemma III.2.9 genügt es die Gleichheit für $\varphi_* X$ und $\varphi_* Y$ anstelle von X und Y zu zeigen. Daher können wir annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n$ und dass die Gleichheit in $p = 0$ zu zeigen ist. Insbesondere gilt für geeignete Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ um $0 \in \mathbb{R}$ in dieser Interpretation $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Psi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} Y_p \bullet (X \bullet f) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 \Phi^Y(t, p) \right) \bullet \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \Phi^X(s, \cdot) \right) \bullet f \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 \Phi^Y(t, p) \right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 f(\Phi^X(s, \cdot)) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 f(\Phi^X(s, \Phi^Y(t, p))) \end{aligned}$$

⁵Dies wird in Proposition III.2.19 noch einmal neu formuliert.

⁶Falls die Vektorfelder nicht vollständig sind, so gilt ein äquivalenter Satz in dem nur der Definitionsbereich von s und t auf eine geeignete Umgebung $I_p \subseteq \mathbb{R}$ der $0 \in \mathbb{R}$ eingeschränkt ist, welche vom betrachteten Punkt $p \in M$ abhängt.

Anmerkung eingefügt

und genauso

$$X_p \bullet (Y \bullet f) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 f(\Phi^Y(t, \Phi^X(s, p))).$$

Damit haben wir bereits gezeigt, dass die Rückrichtung gilt, d. h. es gilt

$$\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X = \Phi_s^X \circ \Phi_t^Y \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \implies \quad [X, Y] = 0.$$

Für die Hinrichtung „ \implies “ sei nun $[X, Y] = 0$. Wir bemerken, dass falls für betragsmäßig kleine Zeiten $s, t \in \mathbb{R}$ und $\Psi(t, s) := \Phi_t^Y(\Phi_s^X(0))$ jeweils $\partial/\partial s \Psi = X_\Psi$ gilt, sofort die zu zeigende Aussage folgt, da dann $\Psi(t, \cdot)$ für jedes solches t eine Integralkurve zu X ist, also nach der Eindeutigkeit der Integralkurve bereits

$$\Psi(t, s) = \Phi^X(s, \Psi(t, 0)) = \Phi_s^X(\Phi_t^Y(p))$$

gilt. Also genügt es zu zeigen, dass $\partial/\partial s \Psi = X_\Psi$, d. h. $T_s(t) := \partial/\partial s \Psi - X_\Psi \equiv 0$. Dafür wiederum beachten wir zuerst, dass mit

$$\begin{aligned} T_s(0) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \Psi(0, s) - X_{\Psi(0,s)} = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \Phi_0^Y(\Phi_s^X(p)) - X_{\Psi(0,s)} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \Phi_s^X(p) - X_{\Psi(0,s)} = 0 \end{aligned}$$

T_s die Anfangsbedingung $T_s(t) = 0$ erfüllt. Mit der Kettenregel, Theorem II.5.8 und der Voraussetzung $[X, Y] = 0$, also $[Y, X] = 0$, gilt

$$\begin{aligned} T'_s(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Psi(t, s) - X_{\Psi(0,s)} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) - \frac{\partial}{\partial t} X_{\Psi(0,s)} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} Y_{\Psi(t,s)} - DX \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) \right) = DY \left(\frac{\partial}{\partial s} \Psi(t, s) \right) - DX \left(Y_{\Psi(t,s)} \right) \\ &= DY \left(\frac{\partial}{\partial s} \Psi(t, s) \right) - DY \left(X_{\Psi(t,s)} \right) + [Y, X] = DY \left(\frac{\partial}{\partial s} \Psi(t, s) - X_{\Psi(t,s)} \right) \\ &= DY(T_s(t)). \end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit der Lösung solcher linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen und dem Anfangswert $T_s(0) = 0$ folgt $T_s \equiv 0$. Somit liefert die obige Argumentation die Gültigkeit des Satzes. ///

Wir werden mit Proposition III.2.19 auf Seite 57 einen alternativen Beweis für Satz III.2.10 geben.

III.2.11 Korollar (Satz über die Simultane Flussabbildung)

Sind $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ paarweise kommutierende Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit, d. h. insbesondere gilt $[X_i, X_j] = 0$ für alle $i, j \leq k$, so ist die *simultane Flussabbildung*

$$\Phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M : (t, p) \mapsto (\Phi_{t_1} \circ \dots \circ \Phi_{t_k})(p)$$

eine glatte Gruppenoperation von der additiven Gruppe von \mathbb{R}^k auf M .

III.2.12 Korollar (Lokale Existenz von Integraluntermannigfaltigkeiten)

Umformuliert

Sind $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ vollständige, paarweise kommutierende und punktweise linear unabhängige Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M , so ist die simultane Flussabbildung $\Phi(\cdot, p) : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ lokal eine injektive Immersion.

Insbesondere ist für jeden Punkt $p_0 \in M$ das Bild von $\Phi(\cdot, p_0)$ lokal eine Untermannigfaltigkeit. Genauer gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von p_0 und eine Karte $(U, (x, y))$ mit $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ so, dass

$$\text{Bild } \Phi(\cdot, p) \cap U = \{q \in U : y(q) = y(p)\} \quad \forall p \in U$$

und für $i = 1, \dots, k$ gilt $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf U .

BEWEIS

Beweis umgeschrieben

Der erste Teil der Aussage folgt sofort mit Korollar III.2.11, da für die Bahn $\Phi_p : \mathbb{R}^k \rightarrow M : t \mapsto \Phi(t, p)$ eines Punktes $p \in M$ unter der simultanen Flussabbildung $\Phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ bereits $\partial/\partial e^i \Phi_p = X_i$ gilt und diese Vektorfelder punktweise linear unabhängig sind, also Φ_p eine Immersion ist. Die Injektivität von Φ_p erhalten wir durch Einschränkung auf eine geeignete Umgebung $I \subseteq \mathbb{R}^k$ um $0 \in I$. Die zweite Aussage folgt mit Satz II.3.5 aus der ersten. ///

III.2.13 Korollar

Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und ist $p_0 \in M$ keine Nullstelle von X , d. h. mit $X(p_0) \neq 0$, so gibt es eine Karte (U, x) um $p_0 \in M$ mit $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

III.2.14 Theorem (Satz von Frobenius)

Ist M^m Mannigfaltigkeit und $E \subseteq TM$ ein Unterbündel vom Rang k , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. E ist integrel, d. h. die Kommutatoren von tangentialen Vektorfelder sind tangential:

$$[X, Y] \in \Gamma(E) \quad \forall X, Y \in \Gamma(E).$$

2. Lokal besitzt E Integraluntermannigfaltigkeit[en], d. h. für jeden Punkt $p_0 \in M$ existiert eine Untermannigfaltigkeit $N_{p_0} \subseteq M$ um diesen Punkt $p_0 \in N_{p_0}$ so, dass für alle $p \in N_{p_0}$ bereits $T_p N_{p_0} = E_p$ gilt.
3. um jeden Punkt $p_0 \in M$ gibt es eine Karte $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ so, dass für alle $p \in U$ durch $\{y = y(p)\}$ eine Integraluntermannigfaltigkeit von E gegeben ist.

BEWEIS

Mit Satz II.3.5 sind „2.“ und „3.“ gleichwertig. Da die Notwendigkeit von „1.“ für „3.“ bereits bei Erklärung der Idee III.2.2 gezeigt wurde, bleibt nur „1. \Rightarrow 3.“ zu zeigen.

Wir wählen dafür nach Definition des Unterbündels für $p_0 \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ um p_0 und Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(E)$ tangential zu E , welche E_p für alle $p \in U$ aufspannen. Zudem wählen wir, nach eventueller Verkleinerung von U , eine um p_0 zentrierte Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nach Voraussetzung gilt $[X_i, X_j] \in \Gamma(E)$. Wir verändern $X_i \in \Gamma(E)$ nun derartig, dass sie weiterhin linear unabhängig sind, aber kommutieren, d. h. $[X_i, X_j] = 0$, da dann mit Korollar III.2.12 die Aussage folgt:

Nach Lemma II.6.5 können wir annehmen, dass die Karte $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ so gewählt ist, dass $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{p_0} = X_{i p_0}$ für $i = 1, \dots, k$. Per Basisdarstellung gibt es glatte Abbildungen $A : U \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ und $B : U \rightarrow \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ mit

$$X = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = A \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial}{\partial y},$$

wobei wir die Notation durch $X := (X_1, \dots, X_k)^T$, $\frac{\partial}{\partial x} := (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k)^T$ und $\frac{\partial}{\partial y} := (\partial/\partial x^{k+1}, \dots, \partial/\partial x^m)^T$ verkürzt haben. Da $A(p_0) = \text{id}$ gilt $\det A(p_0) \neq 0$, also gilt mit der Stetigkeit von A und der \det -Abbildung $\det A(p) \neq 0$ für $p \in U$ – wobei wir eventuell U verkleinern müssen. Somit ist $\tilde{X}_p := A(p)^{-1} \cdot X_p$ weiterhin eine Basis von E_p und zwar für alle $p \in U$. Damit gilt jedoch für alle Punkte $p \in U$

Argumentation etwas korrigiert

$$\tilde{X}_p = A(p)^{-1} X_p = A(p)^{-1} A(p) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + A_p^{-1} B(p) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + A_p^{-1} B(p) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p.$$

Da $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$ gilt, folgt damit $[X_i, X_j] \in \text{lin}(\partial/\partial y^i)_{i=1}^{m-k}$. Da aber nach Voraussetzung E integabel ist, folgt

$$[X_i, X_j] \in \text{lin}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^{m-k} \cap \text{lin}(X_i)_{i=1}^{m-k} = \{0\}.$$

Somit sind $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ paarweise kommutierende, vollständige punktweise lineare Vektorfelder auf U und indem wir Korollar III.2.12 anwenden, erhalten wir die Aussagen. ///

Wir erhalten sofort aus der Eindeutigkeit der Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen die Eindeutigkeit der Integraluntermannigfaltigkeit[en].

Das restliche Kapitel wurde umsortiert – z.B. aus einer Bemerkung wurde Satz III.2.15 und Definition III.2.16 herausgezogen

III.2.15 Satz (Eindeutigkeit von Integraluntermannigfaltigkeiten)
 Ist $E \subseteq TM$ ein integrales Unterbündel, so sind Integraluntermannigfaltigkeit eindeutig. Präziser gilt für jeden gemeinsamen Punkt $p \in N \cap U$ einer Integraluntermannigfaltigkeit[en] N von E und einer Karte $(U, (x, y))$ bereits $N \cap U \subseteq \{y = y(p_0)\}$, falls $\{y = y(p_0)\}$ eine Integraluntermannigfaltigkeit ist.

Wir erweitern den Begriff der Integralen Untermannigfaltigkeit um globale Theorie zu ermöglichen:

III.2.16 Definition (Untermannigfaltigkeit)

Ist $E \subseteq TM$ ein Unterbündel vom Rang k von einer Mannigfaltigkeit M und N^k eine weitere Mannigfaltigkeit, dann heißt eine Immersion $f : N^k \rightarrow M$ eine *Untermannigfaltigkeit* von E , falls

$$Df_p(T_p N) = E_{f(p)} \quad \forall p \in N.$$

Eine Untermannigfaltigkeit $f : N^k \rightarrow M$ zu E heißt *maximal*, falls für alle Untermannigfaltigkeit $\tilde{f} : \tilde{N} \rightarrow M$ zu E mit $\text{Bild } \tilde{f} \cap \text{Bild } f \neq \emptyset$ bereits $\text{Bild } \tilde{f} \subseteq \text{Bild } f$ gilt.

III.2.17 Bemerkung

Lokal unterscheiden sich die beiden Begriffe nicht, da jede Immersion lokal eine Einbettung ist. Aber nach Satz III.2.15 ist die maximale Untermannigfaltigkeit eindeutig.

III.2.18 Beispiel

1. Ist $M = \mathcal{T}^2 \cong \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, so ist durch das Vektorfeld $X(p) \equiv v = (v_1, v_2)$ mit $v_1/v_2 \notin \mathbb{Q}$ ein Unterbündel vom Rang 1 gegeben.

Die zugehörige maximale Untermannigfaltigkeit ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}^2$ mit $f(t) = [tv + p_0]$, insbesondere liegt $\text{Bild } f$ dicht in \mathcal{T}^2 und ist damit global definitiv keine Integraluntermannigfaltigkeit, sondern nur lokal.

2. Ist $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $X(p) = e_1$, so sind die Lösungen durch $f(t) = te_1 + p_0$ gegeben und hängen damit vom Anfangspunkt ab, wobei $p_{02} = 0$ ein Spezialfall ist.

Der Raum der maximalen Untermannigfaltigkeit[en] ist damit $\mathbb{R} \cup \{0'\}$, wobei wir diesen mit den Standardkarte auf \mathbb{R} versehen und eine zusätzliche Karte um $0'$ mit $(-\varepsilon; 0) \cup (0; \varepsilon) \cup \{0'\} \rightarrow (-\varepsilon; \varepsilon)$ mit der Identität und $0' \mapsto 0$ haben. Dies ergibt allerdings keine Hausdorffsche Mannigfaltigkeit, da 0 und $0'$ nicht getrennt werden können.

Neu aus [O'N83, Kapitel 1, Prop. 58] eingefügt.

Wir erhalten äquivalent zu obigen Ergebnissen, insbesondere zu Satz III.2.10, eine anschauliche Interpretation des Kommutators zweier Vektorfelder, als die Änderung des Verhaltens des Flusses eines Vektorfeldes entlang eines zweiten Vektorfeldes.

III.2.19 Proposition

Ist $\Phi^X : M \rightarrow M$ der Fluss zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M^m und $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein weiteres Vektorfeld, so gilt für den Kommutator in jedem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit M

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left(D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(p)}) \right).^7$$

BEWEIS

Es sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit. Es ist nun zu zeigen, dass für $F(t) := D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(p)})$ bereits $F'(0) = [X, Y]_p$ gilt.

Wir nehmen zunächst an, dass das Vektorfeld nicht in $p \in M$ verschwindet, d. h. $X_p \neq 0$. Nach Korollar III.2.12 können wir daher eine Karte (U, x) um $p \in U$ wählen so, dass $\partial/\partial x^1 = X$. Ohne Beschränkung können wir annehmen, dass diese Karte um p zentriert ist, also dass $x(p) = 0$ gilt. Per Definition gilt damit

$$x(\Phi_t^X(q)) = (x_1(q) + t, x_2(q), \dots, x_m(q)) \quad \forall q \in U, t : \Phi_t^X(q) \in U$$

und $\partial/\partial x^i \Phi_t^X = \partial/\partial x^i$ für alle Indices $i \in \{1, \dots, m\}$. In der Basisdarstellung $Y = Y^i \partial/\partial x^i$ gilt damit

$$F(t) = D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(p)}) = Y^i(\Phi_t(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\Phi_t(p)} \Phi_{-t}^X = Y^i(\Phi_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Die Aussage folgt damit für den Fall $X_p \neq 0$ mittels

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 Y^i(\Phi_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 Y^i(x^{-1}(t, 0, \dots, 0)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p - \underbrace{(Y \bullet \mathbb{1}) \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p}_{=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, Y \right]_p = [X, Y]_p. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass X nicht in einer ganzen Umgebung von p verschwindet, d. h. für alle Umgebungen U von p existiert ein $q \in U$ mit $X_q \neq 0$. Insbesondere existiert eine Folge $q_n \rightarrow p$, welche nach p konvergiert mit $X_{q_n} \neq 0$. Mit obigem Fall gilt damit $[X, Y]_q = \partial/\partial t^i|_{t=0} (D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(q)}))$ für alle $q \in \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Da beide Seiten der Gleichung stetig von q abhängen, gilt damit die Gleichung auch in $p \in \overline{q_n}_{n \in \mathbb{N}}$.

Verschwindet X dagegen in einer Umgebung $U \ni p$ von p , also $X|_U \equiv 0$ gilt, so gilt $\Phi_t^X|_U = \text{id}$. Damit sind jedoch beide Seite der Gleichung offensichtlichweise 0, insbesondere also gleich. ///

BEWEIS (ALTERNATIVER BEWEIS FÜR SATZ III.2.10)

Wir erkennen mit Lemma III.2.9, dass für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ genau dann $\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X$ gilt, falls

$$\Phi_t^Y = \Phi_s^{X^{-1}} \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X = \Phi_{-s}^X \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_{-s}^{X^{-1}} = \Phi_t^{(\Phi_{-s}^X)_* Y}$$

⁷Wir bemerken, dass wir bei der rechtseitigen Schreibweise verwendet haben, dass $D\Phi_{-(\cdot)}^X(Y_{\Phi_{(\cdot)}(p)}) : I \rightarrow T_p M$ von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in den festen Vektorraum $T_p M$ abbildet. Insbesondere also die Ableitung wiederum in diesem Raum liegt.

Neu zugefügt.

gilt, d. h. die Flüsse kommutieren genau dann, wenn $(\Phi_{-s}^X)_* Y = Y$ gilt. Nach Proposition III.2.19 gilt aber, falls X und Y kommutieren, also $[X, Y] = 0$ gilt, dass $D\Phi_{-t}^X(Y_{\Phi_t(p)})$ konstant in t ist. Wir erhalten daher mit

$$(\Phi_{-s}^X)_* Y = D\Phi_{-s}^X(Y \circ \Phi_s^X) = D\Phi_0^X(Y \circ \Phi_0^X) = Y,$$

dass die Flüsse kommutieren, falls die Vektorfelder kommutieren. ///

Kapitel IV.

Vektorbündel

IV.1. Vektorbündel

IV.1.1 Motivation

Das Tangentialbündel hat jedem Punkt $p \in M$ glatt einen Vektorraum, $T_p M$ zugeordnet. Dabei waren die Vektorfelder $\mathfrak{X}(M) = \{X : M \rightarrow TM : | X(p) \in T_p M \quad \forall p \in M\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ von besonderer Bedeutung. Dieses Konzept wollen wir nun verallgemeinern .

IV.1.2 Definition (Vektorbündel)

Eine Mannigfaltigkeit E^{m+k} heißt \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang r über einer Mannigfaltigkeit M^m , falls

1. $r \in \mathbb{N}$ und $k = r$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $k = 2r$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. eine surjektive Submersion $\pi : E \rightarrow M$, die sogenannte *Bündelprojektion* existiert und die *Bündelfaser* $\pi^{-1}(p) =: E_p$ eine \mathbb{K} -Vektorraumstruktur der Dimension r besitzt. Insbesondere gilt $E = \dot{\bigcup}_{p \in M} E_p$.
3. E in dem Sinn lokal über M trivialisiert, dass für jeden Punkt $p_0 \in M$ eine *trivialisierende Umgebung* $U \subseteq M$ und ein Diffeomorphismus, eine sogenannte *Bündelkarte* oder *Bündeltrivialisierung* $\Phi : E|_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ mit $V \cong \mathbb{K}^r$ existiert so, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E|_U & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & U \times \mathbb{K}^r \\
 \searrow \pi & & \swarrow \text{Pr}_2 \\
 & U &
 \end{array}$$

kommutiert und $\Phi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{K}^r$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Schlam-pig können wir für Karten (U, φ) von M und $(E|_U, \Phi)$ vereinfacht Φ an Stelle von (π, Φ) schreiben.

IV.1.3 Schreibweise

Wir schreiben kurz $\pi : E^r \rightarrow M^m$ oder $E^r \xrightarrow{\pi} \mathbb{K} M^m$ für „ E ist ein Vektorbündel vom Rang r über der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit der Bündelprojektion π “.

IV.1.4 Beispiel

1. Jeder Vektorraum ist ein Vektorbündel über einer 0-dimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeit.
2. Für eine Mannigfaltigkeit M^m ist TM ein reelles Vektorbündel mit Rang m .
3. Für eine Mannigfaltigkeit M^m ist $E = M \times \mathbb{K}^r$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel mit $\text{rg } E = r$. Dies heißt *triviales Vektorbündel* mit der Standardprojektion $\pi : M \times \mathbb{K}^r \rightarrow M : (x, \zeta) \mapsto x$.

Wie die lokale Trivialisierung aussagt, sieht jedes Vektorbündel $E \rightarrow M$ lokal wie ein triviales Bündel aus.

Entscheidend an einer Mannigfaltigkeit waren die Übergangsfunktionen. Auch im Fall von Vektorbündeln sind es diese, die *fast* ausreichen um ein Vektorbündel zu charakterisieren – siehe Abschnitt IV.4. Sei $E^r \rightarrow M^m$ ein Vektorbündel und seien $\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ und $\Phi_\beta : E|_{U_\beta} \rightarrow U_\beta \times \mathbb{K}^r$ zwei überschneidende Trivialisierungen. Indem wir $U_\alpha \cap U_\beta$ anstelle von U_α bzw. U_β betrachten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U = U_\alpha = U_\beta$. Da dies Trivialisierungen sind kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 U \times \mathbb{K}^r & \xleftarrow{\Phi_\alpha} & E|_U & \xrightarrow{\Phi_\beta} & U \times \mathbb{K}^r \\
 & \searrow \text{Pr}_1 & \downarrow \pi & \swarrow \text{Pr}_1 & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

und es gilt

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(p, \xi) = \Phi_\alpha(\underbrace{\Phi_\beta^{-1}(\xi)}_{\in E_p}) = (p, \Phi_{\alpha p} \circ \Phi_{\beta p}^{-1}(\xi)).$$

Es genügt also für alle $p \in U$, wenn wir jedes $\Phi_{\alpha p} \circ \Phi_{\beta p}^{-1}$ kennen. Da sowohl $\Phi_{\alpha p}$ als auch $\Phi_{\beta p}$ Isomorphismen sind, ist auch $\Phi_{\alpha p} \circ \Phi_{\beta p}^{-1}$ ein Isomorphismus und diese Abbildung ist als Verkettung glatter Abbildungen selbst glatt.

IV.1.5 Definition (Übergangsfunktion)

Für ein Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ und zwei Trivialisierungen $\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ und $\Phi_\beta : E|_{U_\beta} \rightarrow U_\beta \times \mathbb{K}^r$ heißt die glatte Abbildung

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(\mathbb{K}, r) : p \mapsto \left(\xi \mapsto \Phi_\alpha(\Phi_\beta^{-1}(\xi)) \right)$$

Übergangsfunktion des Vektorbündels $E \rightarrow M$ (bzgl. der Trivialisierungen Φ und $\tilde{\Phi}$)

IV.1.6 Definition (Schnitt eines Vektorbündels)

Eine C^∞ -Abbildung $\psi : M \rightarrow E$ in einem Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ heißt *glatter Schnitt*, falls $\pi \circ \psi = \text{id}|_M$, d. h. falls für jeden Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit $\psi(p) \in E_p$ gilt. Die Menge aller glatten, *globalen Schnitte* auf E wird mit

$$\Gamma(M; E) := \Gamma(E) := \{\psi \in C^\infty(M; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}|_M\}$$

bezeichnet, dagegen heißt für $U \subseteq M$

$$\Gamma(U; E) := \{\psi \in C^\infty(U; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}|_U\}$$

die Menge aller glatten, *lokalen Schnitte*. Entsprechend bezeichnen $\Gamma_c(M; E) = \Gamma_c(E)$ bzw. $\Gamma_c(U; E)$ die Menge aller glatten, globalen bzw. lokalen Schnitte über M bzw. U mit kompakten Träger.

IV.1.7 Beispiel

1. Ist $E = M \times \mathbb{K}^r$, dann ist $\Gamma(M; E) \cong C^\infty(M; \mathbb{K}^r)$.
2. Ist $E = TM$, dann ist $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, d. h. die Schnitte entsprechend wie in der Motivation angedeutet den Vektorfeldern.

IV.1.8 Lemma (Schnitte sind ein freier $C^\infty(M)$ -Modul)

Ist $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, so ist $\Gamma(M; E)$ ein lokal freier $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modul mit

$$(\psi_1 + \psi_2)(p) := \psi_1(p) + \psi_2(p) \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M; E), p \in M$$

und

$$(f\psi)(p) := f(p)\psi(p) = \psi(p)f(p) \quad \forall \psi \in \Gamma(M; E), f \in C^\infty(M), p \in M.$$

BEWEIS

Analog zu dem Beweis von Lemma II.6.6

///

IV.1.9 Bemerkung (Aus der Physik)

Die Schnitte ψ sind in der Physik die (linearen) Felder einer Theorie.

IV.1.10 Definition (Rahmen)

Ist $\pi : E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang r und $U \subseteq M$ eine offene Menge, so heißt eine Abbildung $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(U; E)^r$ (lokaler) *Rahmen* von E , falls für alle $p \in U$ durch $(\psi_1(p), \dots, \psi_r(p))$ eine Basis von E_p gegeben ist.

IV.1.11 Satz (Äquivalenz von lokalem Rahmen und Trivialisierung)

Ist $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, so liefert jeder lokale Rahmen eine Trivialisierung und andersrum.

BEWEIS

Sei $\Phi : E|_U \rightarrow U \times V$ eine Trivialisierung. Wir definieren für einen Punkt $p \in U$ der Trivialisierungsumgebung $\psi_i(p) := \Phi^{-1}(p, e_i)$. Da $\Phi^{-1}(p, \cdot)$ ein Vektorraumisomorphismus ist, ist $\Psi(p) := (\psi_1(p), \dots, \psi_r(p))$ für alle $p \in U$ eine Basis von E_p . Diese Schnitte sind glatt da Φ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(U; E)^r$ ein lokaler Rahmen. Wir definieren eine Abbildung

$$F : U \times \mathbb{K}^r \rightarrow E|_U : \left(p, \left(\xi^1, \dots, \xi^r \right) \right) \mapsto \psi_i(p) \xi^i$$

und erkennen, dass dies $\Phi := F^{-1}$ eine Trivialisierung ist. ///

IV.1.12 Bemerkung

Aus einer Bemerkung aus Kapitel V hierher verschoben

Ist $\Phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ die zu dem Rahmen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_U)^r$ korrespondierende Trivialisierung eines Vektorbündels $E^r \rightarrow M$, so gilt für alle Punkte $p \in M$ und $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r) \in \mathbb{K}^r$

$$\Phi_p(\psi_i(p) \xi^i) = (p, \xi).$$

IV.1.13 Definition (Rahmenwechselmatrizen)

Aus einer Bemerkung aus Kapitel V hierher verschoben

Sind $\Psi_\alpha \in \Gamma(E|_{U_\alpha})^r$ und $\Psi_\beta \in \Gamma(E|_{U_\beta})^r$ zwei Rahmen eines Vektorbündels $E^r \rightarrow M$ ein Bündel über einer Mannigfaltigkeit $M \supseteq U_\alpha, U_\beta$, so heißt die Abbildung $\mathbf{g}_{\alpha, \beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta; \text{GL}(\mathbb{K}^r))$ mit $\Psi_\beta = \Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha, \beta}$, d. h. $\psi_{\beta i} = \psi_{\beta j} \mathbf{g}_{\alpha, \beta}^j_i$, die *Rahmenwechselmatrix* von Ψ_α und Ψ_β .

IV.1.14 Bemerkung

Aus einer Bemerkung aus Kapitel V hierher verschoben und deutlich ausgeführt

Es gilt für zugehörigen Trivialisierungen $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ und $\Phi_\beta : U_\beta \rightarrow U_\beta \times \mathbb{K}^r$

$$\left(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \right) (p, \xi) = \left(p, \mathbf{g}_{\alpha, \beta}(p) \xi \right),$$

da

$$\left(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \right) (p, \xi) = \Phi_{\alpha p}(\Psi_\beta(p) \xi) = \Phi_{\alpha p}(\Psi_\alpha(p) \mathbf{g}_{\alpha, \beta}(p) \xi) = \left(p, \mathbf{g}_{\alpha, \beta}(p) \xi \right).$$

Wir vernachlässigen die erste Komponente der Übergangsfunktion oft und schreiben dann $\mathbf{g}_{\alpha, \beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$. Wir erkennen für $\varphi \in \Gamma(E)$ durch die beiden Basisdarstellung

$$\Psi_\alpha \varphi_\alpha = \psi_{\alpha i} \varphi_\alpha^i = \varphi = \psi_{\beta i} \varphi_\beta^i = \psi_{\alpha j} \mathbf{g}_{\alpha, \beta}^j_i \varphi_\beta^i = \Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \varphi_\beta,$$

also $\varphi_\alpha = \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \varphi_\beta$. Dagegen gilt $\Psi_\alpha = \Psi_\beta \mathbf{g}_{\beta, \alpha} = \Psi_\beta \mathbf{g}_{\alpha, \beta}^{-1}$.

Als Merkregel können wir uns merken, dass immer „links“ die Basis, „vektoren“ und „rechts“ die „Faktoren“ stehen, also schreiben wir $\psi_i \varphi^i$, falls Ψ die Basis und $\varphi = \Psi \varphi$ der einzelne Schnitt mit $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^r) \in C^\infty(U)^r$ ist, da dann $\mathbf{g}_{\alpha, \beta}$ passend in der „Mitte“ eingefügt wird so, dass der Index durch \mathbf{g} wechselt:

$$\varphi = \Psi_\alpha \varphi_\alpha = \Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \mathbf{g}_{\alpha, \beta}^{-1} \varphi_\alpha = \Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \mathbf{g}_{\beta, \alpha} \varphi_\alpha = \left(\Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \right) \left(\mathbf{g}_{\beta, \alpha} \varphi_\alpha \right) = \Psi_\beta \varphi_\beta.$$

IV.1.15 Definition (Bündelhomomorphismus)

Sind $\pi^i : E^i \rightarrow M^i$ für $i \in \{1, 2\}$ zwei \mathbb{K} -Vektorbündel und $f : M^1 \rightarrow M^2$ eine C^∞ -Abbildung, so heißt eine C^∞ -Abbildung $T : E^1 \rightarrow E^2$ mit $T|_{E_p^1} \in \text{Hom}(E_p^1; E_{f(p)}^2)$ *Bündelhomomorphismus* längs f . Das heißt, für die Abbildung kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E^1 \times \mathbb{K}^r & \xrightarrow{T} & E^2 \\
 \downarrow \pi^1 & & \downarrow \pi^2 \\
 M^1 & \xrightarrow{f} & M^2
 \end{array}$$

und $T|_{E_p}$ ist linear.

Alle weiteren Begriffe wie Isomorphie etc. übertragen sich auf natürliche Weise aus der linearen Algebra.

IV.1.16 Beispiel

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{Df} & TN \\
 \downarrow \pi^1 & & \downarrow \pi^2 \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

und $D_p f$ ist linear. Also ist Df ein Bündelhomomorphismus längs f .

IV.2. Unterbündel und Bündelkonstruktionen

Im Folgenden möchten wir aus alten Vektorbündeln neue konstruieren. Wir setzen dabei Abschnitt A.2, „Multilineare Algebra und Tensoren“ aus Anhang A, „Wiederholungen“ und Abschnitt B.2, „Tensoren“ aus Anhang B, „Weiteres aus anderen Gebieten“ voraus.

IV.2.1 Definition (Unterbündel)

Ist $\pi : E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel und ist für $p \in M$ durch $F_p \subseteq E_p$ ein s -dimensionaler Unterraum von E_p gegeben, so heißt $F = \dot{\bigcup}_{p \in M} F_p$ ein *Unterbündel* vom Rang s von E , falls es für jedes $p \in M$ Trivialisierungen $\Phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ mit $p \in U$ und $\Phi|_{F|_U} : F|_U \rightarrow U \times W$ gibt, wobei $W \subseteq \mathbb{K}^r$ ein s -dimensionaler Unterraum von \mathbb{K}^r ist.

IV.2.2 Bemerkung

Ist $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und $F \subseteq E$ ein Rang s Unterbündel, so ist $\pi|_F : F \rightarrow M$ ein Rang s Vektorbündel.



In Einklang mit der Äquivalenz von lokalen Rahmen und Trivialisierungen, Satz IV.1.11 erhalten wir eine Charakterisierung von Unterbündeln durch lokale Rahmen:

IV.2.3 Lemma (Unterbündel durch lokale Rahmen)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel, dann ist $F^s \subseteq E$ genau dann ein Untervektorbündel, falls es um jeden Punkt $p \in M$ einen lokalen Rahmen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ gibt so, dass (ψ_1, \dots, ψ_s) punktweise eine Basis von F ist.

BEWEIS

„ \Rightarrow “: Ist $\Phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ eine Trivialisierung mit $\Phi|_{F|_U} : F|_U \rightarrow U \times W$, wobei $W \subseteq \mathbb{K}^r$ ein s -dimensionaler Unterraum von \mathbb{K}^r ist, so wählen wir eine Basis v_1, \dots, v_r von \mathbb{K}^r so, dass v_1, \dots, v_s eine Basis von W ist. Durch $\psi_i(p) := \Phi^{-1}(p, v_i)$ ergibt sich ein Rahmen mit den gewünschten Eigenschaften.

„ \Leftarrow “: Sei durch $\Psi : U \rightarrow E^r$ ein Rahmen um $p_0 \in U$ mit den gewünschten Eigenschaften gegeben. Wir definieren den Unterraum $W := \text{lin}(\psi_1, \dots, \psi_s)$ von \mathbb{K}^r . Durch Drehung können wir annehmen, dass $W = \mathbb{K}^s$. Wir wählen die zu Ψ korrespondierende Trivialisierung $\tilde{\Phi} : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ um p_0 . Da \mathbb{K}^r endlich dimensional ist, gilt $\mathbb{K}^r = W \oplus W^\perp$ und wir definieren

$$\Phi(\psi_i(p)) = \begin{cases} \text{pr}_W(\tilde{\Phi}(\psi_i(p))) & : i \in \{1, \dots, s\} \\ \text{pr}_{W^\perp}(\tilde{\Phi}(\psi_i(p))) & : i \notin \{1, \dots, s\} \end{cases}.$$

Per Konstruktion der korrespondierenden Trivialisierung gilt für den ausgezeichneten Punkt $p_0 \in U$ bereits $\Phi(\psi_i(p_0)) = \tilde{\Phi}(\psi_i(p_0))$ für alle i , also sind $\Phi(\psi_i(p_0))$ eine Basis von \mathbb{K}^r , welche nach Konstruktion an W angepasst ist. Da „Basis sein“ eine offene Bedingung ist (weil $\det \neq 0$ sein muß und \det stetig ist), gilt diese Aussage auch in der Nähe von p_0 . ///

IV.2.4 Bemerkung

1. Zwei Vektorbündel $E_1, E_2 \rightarrow M$ heißen *isomorph*, falls es einen Vektorbündelisomorphismus $T : E_1 \rightarrow E_2$ gibt.
2. Ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt *trivialisierbar*, falls $E \cong M \times V$, also falls es isomorph zum trivialen Bündel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es einen globalen Rahmen gibt.

IV.2.5 Problem

Wir wollen nun Vektorbündel charakterisieren, d. h. Isomorphieklassen von Vektorbündeln von festem Rang über einer festen Mannigfaltigkeit M betrachten. Dazu betrachten wir die folgenden Beispiele:

1. Wenn $M = \mathbb{R}$ ist, dann ist jedes Vektorbündel vom Rang r über M isomorph zu \mathbb{K}^r , also sind alle Bündel über $M = \mathbb{R}$ trivialisierbar. Dies werden wir später

durch Satz V.2.7 in Abschnitt V.2, „Paralleltransport“ im Kapitel V, „Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung“ zeigen.

2. Wenn $M = \mathcal{S}^1$ ist, so gibt es genau zwei Vektorbündelisomorphieklassen vom Rang r über M . Die in der das Trivialbündel liegt und eine weitere. Das heißt, es gilt $\{E \rightarrow M\} / \cong \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dies werden wir später noch zeigen.
3. Mit einem Verweis auf die Vorlesung über Riemannsche Flächen bemerken wir, dass wenn M^2 eine zweidimensionale kompakte (orientierte) Mannigfaltigkeit ist, so ist $E \rightarrow M / \cong \cong \mathbb{Z}$.

Wir konstruieren einige weitere Vektorbündel.

IV.2.6 Satz und Definition (Direktes Summen- & Tensorprodukt-Bündel)

Seien $E^r, F^s \rightarrow M$ Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M , $\{U_\alpha\}_\alpha$ ein Überdeckung von M aus offenen Mengen und für jeden Index α sei durch $\Psi_\alpha^{E/F}$ ein lokaler Rahmen von E bzw. F gegeben. Das (*direkte*) *Summenbündel* $E \oplus F = \dot{\bigcup}_{p \in M} E_p \oplus F_p$ von E und F ist ein Vektorbündel vom Rang $r + s$, welches durch die lokalen Rahmen

$$\left\{ \Psi_\alpha = \Psi_\alpha^E \oplus \Psi_\alpha^F := \left(\psi_{\alpha 1}^E \oplus 0, \dots, \psi_{\alpha r}^E \oplus 0, 0 \oplus \psi_{\alpha 1}^F, \dots, 0 \oplus \psi_{\alpha s}^F \right) \right\}_\alpha$$

charakterisiert ist. Gleichartig ist das *Tensorproduktbündel* $E \otimes F = \dot{\bigcup}_{p \in M} E_p \otimes F_p$ von E und F ein Vektorbündel vom Rang $r \cdot s$, welches durch die lokalen Rahmen

$$\left\{ \Psi_\alpha = \Psi_\alpha^E \otimes \Psi_\alpha^F := \left(\psi_{\alpha 1}^E \otimes \psi_{\alpha 1}^F, \dots, \psi_{\alpha 1}^E \otimes \psi_{\alpha s}^F, \psi_{\alpha 2}^E \otimes \psi_{\alpha 1}^F, \dots, \psi_{\alpha r}^E \otimes \psi_{\alpha s}^F \right) \right\}_\alpha$$

charakterisiert ist.

BEWEIS

Es ist aus der linearen Algebra bekannt, dass die angegebenen Rahmen punktweise Basen dieser Vektorräume geben. Bezeichnen $g_{\alpha,\beta}^{E/F}$ die Übergangsabbildungen des Bündels E bzw. F , so erhalten wir für das Summenbündel die Übergangsabbildungen

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} &= \left(\Psi_\alpha^E \oplus \Psi_\alpha^F \right) \circ \left(\Psi_\beta^{E-1} \oplus \Psi_\beta^{F-1} \right) = \left(\Psi_\alpha^E \circ \Psi_\beta^{E-1} \right) \oplus \left(\Psi_\alpha^F \circ \Psi_\beta^{F-1} \right) \\ &= g_{\alpha,\beta}^E \oplus g_{\alpha,\beta}^F \end{aligned}$$

beziehungsweise äquivalent für das Tensorproduktbündel

$$\Psi_\alpha \otimes \Psi_\beta^{-1} = g_{\alpha,\beta}^E \otimes g_{\alpha,\beta}^F.$$

Da dies nach Konstruktion glatte Abbildungen sind, sind dies Vektorbündel. ///

IV.2.7 Definition (Quotientenbündel)

Sei $F^s \subseteq E^r$ ein Untervektorbündel eines Vektorbündels $E \rightarrow M$. Dann ist das *Quotientenbündel* durch

$$E/F := \dot{\bigcup}_{p \in M} E_p/F_p$$

Tensorprodukt
eingefügt,
umgeschrieben

IV

definiert, welches ein Vektorbündel vom Rang $r - s$ ist.

Ist $\Phi^E : E|_U \rightarrow U \times V$ an $F \subseteq E$ eine angepasste Bündelkarte, d. h. $\Phi^E : F|_U \rightarrow U \times W$.

Dann ist $g^E = \left(\begin{array}{c|c} g^F & \star \\ \hline 0 & h \end{array} \right)$. Dann ist aber $g^{E/F} = h = \overline{g^E}$, welches die induzierte Abbildung auf dem Quotienten V/W ist.

IV.2.8 Satz und Definition (Duales Vektorbündel)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel, dann ist das *duale Bündel* E^* von E durch

$$E^* := E^{-1} := \bigcup_{p \in M} E_p^* \xrightarrow{\pi} M$$

definiert und mit den natürlich übertragenen Karten ausgestattet ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang r .

BEWEIS

Wir geben die zugehörigen Bündelkarten an: Ist $\Phi : E|_U \rightarrow U \times V$ eine Bündelkarte von E , so definieren wir

$$\Phi^{E^*} : E|_U^* \rightarrow U \times (\mathbb{K}^r)^* : \alpha \in E_p^* \mapsto \left(p, \left(\Phi_p^* \right)^{-1}(\alpha) \right) = \left(p, \alpha \circ \Phi_p^{-1} \right).$$

Damit ist Φ^* ein Kandidat für eine Bündelkarte von E^* . Diese Abbildung ist bijektiv, da $\Phi_p^{E^*}$ nach Konstruktion ein linearer Isomorphismus von $E_p^* \rightarrow V^*$ ist.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass die Bündelkartenübergangsfunktionen Diffeomorphismen sind. Dann erhält E^* damit einen Atlas aus diesen Bündelkarten und ist damit ein Vektorbündel. Ist $\tilde{\Phi} : E|_{\tilde{U}} \rightarrow \tilde{U} \times V$ eine weitere Trivialisierung von E und $\tilde{\Phi}^{E^*}$ wie oben konstruiert, so gilt

$$\left(\tilde{\Phi}^{E^*} \circ \left(\Phi^{E^*} \right)^{-1} \right)(p, \omega) = \left(p, \left(\left(\tilde{\Phi}_p^* \right)^{-1} \circ \Phi_p^* \right)(\omega) \right) = \left(p, (g(p)^*)^{-1} \omega \right)$$

mit $(g(p)^*)^{-1} := \left(\left(\tilde{\Phi}_p^* \right)^{-1} \circ \Phi_p^* \right)$, wobei $g : U \cap \tilde{U} \rightarrow \text{gl}(V)$ die Übergangsabbildung von E ist, also $g(p) = \tilde{\Phi}_p \circ \Phi_p^{-1} \in \text{gl}(V)$. Damit ist die Übergangsabbildung des Dualen Bündels $g^{E^*} = (g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$ der Dual der Inversen Übergangsabbildung von E . Insbesondere ist dies eine glatte Abbildung. ///

Wir nutzen diese Konstruktion zur Konstruktion eines weiteren natürlichen Vektorbündels:

IV.2.9 Definition (Kotangentialbündel, Eins-Formen)

Ist $E = TM$, so nennen wir $E^* = TM^*$ das *Kotangentialbündel* von M . Schnitte in dieses Bündel heißen (*differenzierbare*) *Eins-Formen* auf M $\Gamma(M; TM^*) = \Omega^1(M)$ die Menge der (differenzierbaren) Eins-Formen auf M .

Das heißt ein Schnitt des Kotangentialbündels, bzw. eine Eins-Form $\alpha \in \Omega^1(M)$ ist für jedes $p \in M$ jeweils eine Linearform $\alpha : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf $T_p M$, welche sich glatt mit $p \in M$ ändert.

Ist $f \in C^\infty(M)$, dann ist auch $Df : TM \rightarrow T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ für alle $p \in M$ eine Linearform auf T_pM , indem wir $Df_p(\xi) := D_p f(\xi)$ setzen. Wir schreiben in dieser Interpretation oft df für Df . Insgesamt erhalten wir also, dass für $f \in C^\infty(M)$ bereits $df \in \Omega^1(M)$ gilt.

IV.2.10 Definition (Totales Differential)

Ist $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion auf einer Mannigfaltigkeit, dann heißt die Eins-Form

$$df : TM \rightarrow \mathbb{R} : (p, \xi) \mapsto D_p f(\xi)$$

totales Differential von f .

So wie es uns möglich war durch Karten eine natürliche Basiswahl auf dem Tangentialraum zu treffen, ist dies auch im Kotangentialraum möglich:

IV.2.11 Satz und Definition (Duale Basis)

Ist (U, x) eine Karte einer Mannigfaltigkeit M^m , so heißt $(dx^i)_{i=1}^m \subseteq \Omega^1(U)$ die *duale Basis* zu $(\frac{\partial}{\partial x^i})_i$, welche ein Rahmen $dx = (dx^1, \dots, dx^m)$ von $TM^*|_U$ ist.

BEWEIS

Per Definition gilt

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i,$$

insbesondere bilden die dx^1, \dots, dx^m eine linear-unabhängig Menge und damit aus Dimensionsgründen eine Basis von $TM^*|_U$. ///

Wir erhalten direkt aus der Definition der totalen Ableitung, dass für jede glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bereits $df|_U = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} / \frac{\partial}{\partial x} x^i dx^i$ gilt.

Jetzt kombinieren wir die bisherigen Ergebnisse um weitere Bündel zu konstruieren:

IV.2.12 Satz und Definition (Homomorphismenbündel)

Sind $E^r, F^s \rightarrow M$ Vektorbündel, dann heißt

$$\text{Hom}(E; F) := \bigcup_{p \in M} \text{Hom}(E_p; F_p) \xrightarrow{\pi} M$$

das *Homomorphismenbündel* von E nach F und ist ein Vektorbündel vom Rang $r \cdot s$. Des Weiteren gilt $\Gamma(\text{Hom}(E; F)) = \{\text{Bündelhomomorphismen } E \rightarrow F\}$.

BEWEIS

Dies folgt direkt, da wir durch punktweisen Vergleich $\text{Hom}(E; F) = E^* \otimes F$ erkennen und somit die Aussage aus den bisherigen Konstruktionen folgt. Wir bemerken, dass die Übergangsfunktionen durch

$$\mathbf{g}^{\text{Hom}} : U \rightarrow \text{gl}(\text{Hom}(V, W)) : (p, T) = \mathbf{g}^F(p) \circ T \circ \left(\mathbf{g}^E(p) \right)^{-1}$$

gegeben sind. Der letzte Teil folgt direkt aus den Definitionen. ///



Aus dem Kapitel V
über Krümmung
hierher verschoben
und umgeschrieben.

IV.2.13 Bemerkung (Lokale Beschreibung von 1-Formen)

Ist $\omega \in \Omega^1(M; E) = \Gamma(\text{Hom}(TM, E))$ eine alternierende k -Form über einer Mannigfaltigkeit M^m in ein Vektorbündel E^r und (U, x) eine Karte von M , so ist $dx = (dx^i)_i \in \Omega^1(U, \mathbb{R})^m$ nach Satz IV.2.11 ein Rahmen von $TM^*|_U$ mit $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_j^i$. Also gilt für $p \in U$ und $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_p M$

$$\omega_p(v) = \omega_p\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)v^i = \underbrace{\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)}_{=: \varphi_i(p) \in E_p} dx^i(v).$$

Somit existieren glatte Schnitte $\varphi_i \in \Gamma(E|_U)$ mit $\omega|_U = \varphi_i dx^i$.

IV.2.14 Definition (Multimorphismenbündel)

Sind $E^i, F \rightarrow M$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ Vektorbündel über M , so heißt

$$\text{Mult}(E^1, \dots, E^k; F) := \bigcup_{p \in M} \text{Mult}(E_p^1, \dots, E_p^k; F_p) \xrightarrow{\pi} M$$

das *Multimorphismenbündel* von E_1, \dots, E_k nach F und ist ein Vektorbündel vom Rang $\text{rg } E_1 \cdot \text{rg } E_2 \cdots \text{rg } E_r \cdot \text{rg } F$.

BEWEIS

Es gilt $\text{Mult}(E_p^1, \dots, E_p^r; F_p) = E_p^{1*} \otimes \cdots \otimes E_p^{r*} \otimes F_p$ und damit erhalten wir die Aussage mit $\text{Mult}(E^1, \dots, E^r; F) = E^{1*} \otimes \cdots \otimes E^{r*} \otimes F$. ///

Analog zur linearen Algebra definieren wir die *alternierenden* und *symmetrische* (multilinearen) Bündelabbildungen, $\text{Alt}^k(E, F)$ und $\text{Sym}^k(E, F)$, womit wir zwei wichtige Untervektorbündel erhalten. Äquivalent zu dem Bündel der 1-Formen $\Omega^1(M) = \Gamma(M; TM^*)$ definieren wir das Bündel der k -Formen als Spezialfall der alternierenden Homomorphismen:

IV.2.15 Definition (Bündel der k -Formen)

Ist $F \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so bezeichnet

$$\Omega^k(F) := \Omega^k(M; F) := \Gamma(\text{Alt}^k(TM; F))$$

die Menge aller k -Formen auf M mit Werten in F und

$$\Omega^\bullet(F) := \Omega^\bullet(M; F) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega^k(M; F)$$

die Menge aller Formen auf M mit Werten in F .

IV.2.16 Bemerkung (Lokale Beschreibung)

Für eine Karte (U, x) von M ist

$$\left\{ dx_I := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m, I := (i_1, \dots, i_k) \right\}$$

ein lokaler Rahmen von $\bigwedge^k TM^*|_U$. ¹Also gilt für $\omega \in \Omega^k(U, E)$

$$\omega = \psi_I dx^I$$

für gewisse $\psi_I \in \Gamma(U, E)$, wobei I über alle Multiindizes (i_1, \dots, i_n) summiert und auf Grund der Antisymmetrie angenommen werden kann, dass $I_{i_1, \dots, i_n} = 0$, falls ein k mit $i_{k+1} \leq i_k$ existiert. Insbesondere ist $\Omega^k(M, E)$ ein lokal freier Modul über $C^\infty(M)$.

IV.2.17 Definition (Paarung)

Ein Schnitt $b \in \Gamma(\text{Bil}(E_1, E_2; F))$ im Bündel der Bilinearen Abbildungen zwischen Vektorbündel $E_1, E_2, F \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M heißt *Paarung*.

IV.2.18 Beispiel (Natürliche Paarungen)

Für $E_1 = \text{Hom}(E; F)$, $E_2 = E$ heißt der Schnitt $b \in \Gamma(\text{Hom}(\text{Hom}(E; F), E; F))$ mit $(b(T, \psi))_p = T_p(\psi_p)$ die *natürliche Paarung* von E und $\text{Hom}(E; F)$.

Als Spezialfall davon erhalten wir für $E_1 = E^* = \text{Hom}(E; \mathbb{R})$, $E_2 = E$, $F = \mathbb{R}$ mit dem Schnitt $b \in \Gamma(\text{Hom}(E^*; E))$ mit $(b(\alpha, \psi))_p = \alpha_p(\psi_p)$ die *natürliche Paarung* von E^* und E .

IV.2.19 Definition (Das bündelwertige Wedge-Produkt)

Ist $b : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ eine Paarung von Vektorbündeln $E_1, E_2, E \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M , so ist das *Wedge-Produkt*

$$b(\cdot \wedge \cdot) : \bigwedge^\bullet TM^* \otimes E_1 \times \bigwedge^\bullet TM^* \otimes E_2 \rightarrow \bigwedge^\bullet TM^* \otimes E$$

auf den Bündeln punktweise in jeder Karte (U, x) einer Umgebung von $p \in U \subseteq M$ durch

$$b(\omega_I dx^I \wedge \eta_J dx^J) := b(\omega_I, \eta_J) dx^I \wedge dx^J \quad \forall \omega_I dx^I \in \Omega^\bullet(E_1), \eta_J dx^J \in \Omega^\bullet(E_2)$$

definiert – wobei die lokale Darstellung beliebiger Formen wie in Bemerkung IV.2.16 verwendet wurde.

IV.2.20 Definition (Pullback von k -Formen)

Eine glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N induziert eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung

$$f^* : \Omega^k(N, \mathbb{K}) \rightarrow \Omega^k(M, \mathbb{K}),$$

¹Dabei ist $\bigwedge^k TM^*$ in der Trivialisierung wie in Lemma und Definition B.2.6 aus Abschnitt B.2, „Tensoren“ in Anhang B, „Weiteres aus anderen Gebieten“ definiert.

Ab hier ist es wieder
aus dem Skript von
Differentialgeometrie I

wobei für $\eta \in \Omega^k(N, \mathbb{K})$ die k -Form $f^*\eta \in \Omega^k(M, \mathbb{K})$ durch

$$(f^*\eta)_p(v_1, \dots, v_k) = \eta_{f(p)}(D_p f(v_1), \dots, D_p f(v_k)) \quad \forall p \in M, v_1, \dots, v_k \in T_p M$$

definiert ist. Diese Abbildung heißt *Pullback-Abbildung* von f und $f^*\eta$ der *Pullback* von η unter f .

Die Linearität gilt, da für jede Funktion $g \in C^\infty(M)$ jeweils

$$(f^*(g\eta))_p = (g\eta)_{f(p)} \circ D_p f = g(f(p))\eta_{f(p)} \circ D_p f$$

gilt.

Erweitern wir diese Konzept auf beliebige Vektorbündel, so erhalten wir das *Pullback-Bündel*. Mit den Werkzeugen aus Abschnitt IV.4, Vektorbündel mit Kozykeln erkennen wir leicht, dass dies ein Vektorbündel ist.

Da es später verwendet wird, eingefügt

IV.2.21 Satz und Definition (Pullback-Bündel)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N und $E^r \rightarrow N$ ein Vektorbündel, so heißt

$$f^*E := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times E_{f(p)}$$

das *Pullback-Bündel* (oder das *zurückgeholte Bündel*) von E unter f . Mit den Rahmen

$$\left\{ \tilde{\Psi}(p) = (p, \Psi(f(p))) \mid \Psi \text{ Rahmen von } E \text{ über } U \subseteq N, p \in f^{-1}(U) \right\}$$

ist dies ein Vektorbündel vom Rang r über M .

Bemerkung & Abbildung eingefügt

IV.2.22 Bemerkung

Offensichtlich induziert ein Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ immer einen Schnitt $f^*\psi := \psi \circ f \in \Gamma(f^*E)$. Diese Abbildung $\psi \rightarrow f^*\psi$ ist linear, aber nicht unbedingt injektiv – man wähle ψ mit $\psi|_{\text{Bild } f} \equiv 0$, wenn Bild f „klein“ – und auch nicht unbedingt surjektiv.

Wir betrachten dafür das Beispiel: $M = (0; 1) \subseteq \mathbb{R}$, $N = (-1.5; 1.5) \times (-1; 1) \subseteq \mathbb{R}^2$, $E = N \times \mathbb{R}$ und die Parametrisierung des „unendlich Symbols“ $f(t) := (\sin(t \cdot \pi), 1/2 \sin(2t \cdot \pi))$ – siehe Abbildung IV.1. Man erkennt, dass $f^*E = M \times \mathbb{R}$. Es ist einfach einen Schnitt $\gamma \in \Gamma(E)$ anzugeben, der lediglich den Nullschnitt in $\Gamma(f^*E)$ impliziert, indem wir einen Schnitt wählen dessen Träger ganz außerhalb des Bildes von f liegt, bspw. ganz im dem im Bild dunkel markierten Bereich liegt. Also ist diese Abbildung, wie behauptet, im Allgemeinen nicht unbedingt injektiv.

Betrachten wir dagegen den Schnitt $\gamma(x) := x$ in $\Gamma(f^*E)$, so erkennen wir, dass dieser

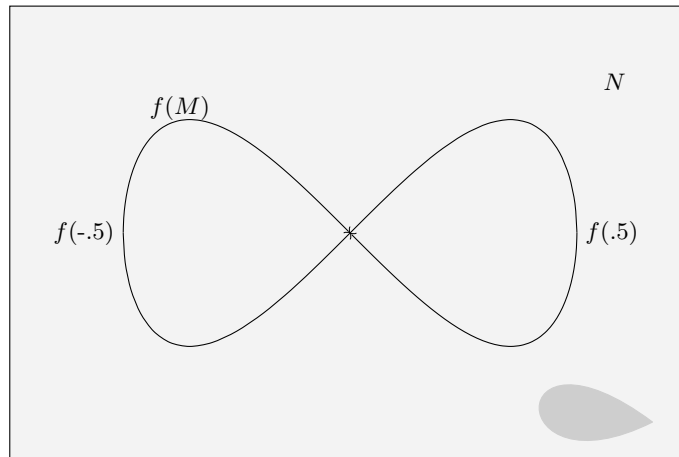


Abbildung IV.1.: Injektive Immersion, die keine Einbettung ist

nicht von einem Schnitt $\tilde{\gamma} \in \Gamma(E)$ induziert sein kann, da dann

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0) &= \tilde{\gamma}\left(\lim_{x \nearrow 0} f(x)\right) = \lim_{x \nearrow 0} \tilde{\gamma}(f(x)) = \lim_{x \nearrow 0} \gamma(x) = 0 \\ &\neq \frac{1}{2} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\gamma}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \tilde{\gamma}(0) \end{aligned}$$

gelten würde. Also ist diese Abbildung, wiederum wie behauptet, im Allgemeinen nicht surjektiv.

IV.2.23 Definition (Äußere Algebra einer Mannigfaltigkeit)

Die *äußere Algebra* von M

$$\Omega^\bullet(M, \mathbb{K}) =: \Omega^\bullet(M) =: \Omega(M)$$

ist eine Algebra mit dem Produkt \wedge . Es sind

$$\Omega^0(M) = \Gamma(\mathbb{K}) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K})$$

$$\Omega^1(M) = \Gamma(TM^*) = \text{differenzierbare 1-Formen}$$

\vdots

$$\Omega^m(M) = \Gamma\left(\bigwedge^m TM^*\right) = \text{differenzierbare } m\text{-Formen, s.g. Volumenformen}$$

Der Rest des Abschnitts stammt ursprünglich aus Abschnitt 4.2 „Bündelfizierung von Kapitel 4.1“ im Kapitel „Äußere Ableitung und Differentialformen“ aus dem Skript von Differentialgeometrie II.

IV.2.24 Lemma (Induzierter Algebrenhomomorphismus)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten M und N , dann ist

$$f^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$$

ein Algebrenhomomorphismus, wobei für $\omega \in \Omega^k(N)$, $p \in M$, $v_i \in T_pM$

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(p)}(D_p f(v_1), \dots, D_p f(v_k))$$

BEWEIS

Es gilt nach Definition des Wedge-Produktes $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$. ///

IV.2.25 Bemerkung

Es folgt sofort, dass falls $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N ist, so ist f^* ein Algebrenisomorphismus.

IV.3. Das Fundamentallema der Tensorrechnung

Sind $E, F \rightarrow M$ Vektorbündel, dann ist $\text{Hom}(E, F) \rightarrow M$ ebenfalls ein Vektorbündel. Dann sind die Schnitte $\Gamma(\text{Hom}(E, F))$ Tensoren bzw. Bündelhomomorphismen. Das heißt für $T \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$ und $p \in M$ ist $T_p : E_p \rightarrow F_p$ glatt von p abhängig und \mathbb{K} -linear und man kann ein solches auf Schnitte von E anwenden. Dazu definieren wir

$$\widehat{T} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F) : \psi \mapsto (p \mapsto T_p(\psi(p))) \in F_p$$

und erkennen, dass $\widehat{T}(\psi) \in \Gamma(F)$. Wir können also \widehat{T} als Operator von Vektorbündelwertigen C^∞ -Funktionen in andere Vektorbündelwertige C^∞ -Funktionen verstehen. Dabei gilt für $\psi_1, \psi_2 \in E$ und $f \in C^\infty(M)$ sowie $p \in M$ immer²

$$\begin{aligned} (\widehat{T}(f\psi_1 + \psi_2))(p) &= T_p(f(p)\psi_1(p) + \psi_2(p)) \\ &= f(p)T(\psi_1(p)) + T(\psi_2(p)) = (f\widehat{T}\psi_1 + \widehat{T}\psi_2)(p), \end{aligned}$$

d. h. \widehat{T} ist $C^\infty(M)$ -linear. Es stellt sich nun die Frage, wann die Umkehrung gilt, also unter welchen Umständen ein Homomorphismus $\widehat{T} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ tatsächlich ein Homomorphismenschnitt ist, d. h. ein $T \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$ existiert so, dass $(\widehat{T}(\psi))(p) = T_p(\psi)$. Der zentrale Unterschied ist, dass $T\psi$ in einem Punkt p nur von dem Wert von ψ in p abhängt, während $\widehat{T}(\psi)(p)$ von weiteren Werten von ψ abhängen kann. Das folgende Theorem zeigt, dass die $C^\infty(M)$ -Linearität nicht nur ein notwendiges, sondern sogar ein hinreichendes Kriterium dafür ist.

IV.3.1 Theorem (Fundamentallema der Tensorrechnung)

Sind $E_i, F \rightarrow M$ Vektorbündel, so ist

$$\Gamma(\text{Mult}_{\mathbb{K}}(E_1, \dots, E_k; F)) \rightarrow \text{Mult}_{C^\infty(M, \mathbb{K})}(\Gamma(E_1), \dots, \Gamma(E_k); \Gamma(F)) : T \mapsto \widehat{T}$$

ein $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modulisomorphismus.

²Wie bei Matrizen schreiben wir bei Homomorphismen $\widetilde{T}\psi$ für $\widehat{T}(\psi)$.

BEWEIS

Es genügt den Beweis für $k = 1$ zu führen. Das sehen wir wie folgt: Gilt der Satz für $k = 1$, also gilt für alle Vektorbündel $E, F \rightarrow M$ bereits

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E); \Gamma(F)) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E; F)) \cong \Gamma(E^* \otimes F)$$

im Sinne einer $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})$ -Modulisomorphie, so folgt für Vektorbündel $E_1, \dots, E_k, F \rightarrow M$ per Induktion

$$\begin{aligned} & \text{Mult}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E_1), \dots, \Gamma(E_k); \Gamma(F)) \\ & \cong \text{Mult}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E_1), \dots, \Gamma(E_{k-1}); \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E_k); \Gamma(F))) \\ & \cong \text{Mult}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E_1), \dots, \Gamma(E_{k-1}); \Gamma(E_k^* \otimes F)) \\ & \stackrel{\text{Iteration}}{\cong} \dots \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E_1); \Gamma(E_2^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes F)) \\ & \cong \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes F) \cong \Gamma(\text{Mult}_{\mathbb{K}}(E_1, \dots, E_k; F)). \end{aligned}$$

Wir führen also nun den Beweis für $k = 1$. Dass diese Abbildung wohldefiniert ist und ein $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modulmorphismus ist, ergibt sich aus der Motiviation. Dass diese auch injektiv ist, ist ersichtlich.

Um die Bijektivität nachzuweisen, geben wir eine Umkehrabbildung an. Sei also $\mathcal{T} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{K})}(\Gamma(E), \Gamma(F))$ beliebig. Für $T \in \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F))$ mit $\hat{T} = \mathcal{T}$ gilt notwendigerweise

$$(\mathcal{T}\varphi)(p) = \hat{T}(\varphi)(p) = T_p(\varphi(p)) \quad \forall \varphi \in \Gamma(E), p \in M.$$

Dafür definieren wir $T_p(\psi_p) := \mathcal{T}(\omega)(p)$, wobei $\omega \in \Gamma(E)$ beliebig mit $\omega_p = \psi_p$ ist und müssen nachweisen, dass

1. dies wohldefiniert ist, also T_p nicht von der Wahl der Fortsetzung abhängt;
2. dies ein geeigneter Homomorphismus ist, also $T_p \in \text{Hom}(E_p, F_p)$ gilt;
3. $p \mapsto T_p$ glatt in p ist;
4. $\hat{T} = \mathcal{T}$.

Die Punkte „2.“ und „4.“ sind per Konstruktion gegeben. Auch „3.“ ergibt sich direkt, da für zwei lokale Rahmen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) : U \rightarrow E|_U$ von E und $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_s) : U \rightarrow F|_U$ von F per Definition für gewisse Funktionen $A_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$

$$T_p(\psi_i(p)) = (\mathcal{T}\psi_i)(p) = A_i^j(p)\tilde{\psi}_j(p)$$

gilt und offensichtlich T_p glatt in p ist, falls A_i^j glatt von p abhängt. Dies ist aber klarerweise der Fall, da $A_i^j\tilde{\psi} = \mathcal{T}\psi_i \in \Gamma(F|_U)$.

Es verbleibt die Wohldefiniertheit zu zeigen. Dafür sei $p_0 \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit und $\psi, \tilde{\psi} \in \Gamma(E)$ seien zwei beliebige Schnitte, die in p_0 übereinstimmen, d. h. $\psi_{p_0} = \tilde{\psi}_{p_0}$. Gilt nun $(\mathcal{T}\psi)(p_0) = (\mathcal{T}\tilde{\psi})(p_0)$, so folgt die Wohldefiniertheit.

Beweis eingefügt, wie der allgemeinen Falls aus dem Fall $k = 1$ folgt; Rest umgeschrieben

Da \mathcal{T} linear ist, ist dies gleichwertig dazu nachzuweisen, dass $(\mathcal{T}(\psi - \tilde{\psi}))(p_0) = 0$. Wir wählen dafür einen lokalen Rahmen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_{\tilde{U}})^r$ um $p_0 \in \tilde{U}$ und die Darstellung $\varphi^i \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ von $\varphi := \psi - \tilde{\psi}$ in diesem Rahmen, d. h. $\varphi|_{\tilde{U}} = \psi_i \varphi^i$. Insbesondere erkennen wir, dass $\varphi^i(p_0) = 0$, da nach Voraussetzung φ in p_0 verschwindet. Multiplizieren wir φ^i und ψ_i mit einer geeigneten Hutfunktion, so können wir annehmen, dass für eine Umgebung $U \subseteq \tilde{U}$ von p_0 und gewisse globale Schnitte $\psi_i \in \Gamma(E)$ und globale Funktionen $\varphi^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ bereits $\varphi|_U = \psi_i|_U \varphi^i|_U$ gilt.³ Betrachten wir nun noch eine weitere Hutfunktion $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h(p_0) = 1$ und $h|_{M \setminus U} \equiv 0$, so gilt $h\varphi = h\psi_i \varphi^i$. Mit der $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Linearität von \mathcal{T} folgt nun

$$h \cdot \mathcal{T}\varphi = \mathcal{T}(h\varphi) = \mathcal{T}(h\psi_i \varphi^i) = h \cdot \mathcal{T}(\psi_i) \varphi^i$$

und da $h(p_0) = 1$ und $\varphi^i(p_0) = 0$ gilt, folgt $(\mathcal{T}\varphi)(p_0) = 0$ und damit die Behauptung.

Damit ist T_p wohldefiniert, also der Satz für $k = 1$ gezeigt. Wie zu Beginn gezeigt, folgt damit der allgemeine Fall. ///

IV.3.2 Bemerkung (Zur Notation)

Wir unterscheiden im Weiteren in der Schreibweise von Theorem IV.3.1 nicht zwischen T und \hat{T} .

IV.4. Vektorbündel mit Kozykeln

IV.4.1 Bemerkung (Kozykel-Bedingung)

Trivialisiert ein Vektorbündel $\pi : E^r \rightarrow M^m$ über $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, d. h. dies ist eine offene Überdeckung von M so, dass $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times V$ über eine Abbildung Φ_α , so erhalten wir für $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ gewisse Übergangsfunktionen

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} : U_{\alpha \cap \beta} \rightarrow \text{GL}(V) : p \mapsto \Phi_{\alpha,p} \circ (\Phi_{\beta,p})^{-1}.$$

Es ist offensichtlich, dass diese die sogenannten *Kozykelbedingungen*

1. $\mathbf{g}_{\alpha,\alpha} = \text{id}_V$ auf U_α ;
2. $\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \circ \mathbf{g}_{\beta,\gamma} = \mathbf{g}_{\alpha,\gamma}$ auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

erfüllen. Insbesondere gilt $\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = (\mathbf{g}_{\beta,\alpha})^{-1}$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$.

IV.4.2 Definition (1-Kozykel)

Für eine Mannigfaltigkeit M^m und einen endliche dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum heißt eine Menge $\{\mathbf{g}_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(V)\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ *1-Kozykel*, falls U_α eine offene Überdeckung von M ist und die $\mathbf{g}_{\alpha,\beta}$ die Kozykelbedingungen erfüllen.

³Diese Konstruktion werden wir Folgenden häufiger verwenden.

IV.4.3 Bemerkung (Bündelhomomorphismen und Übergangsfunktionen)

Sind $E, F \rightarrow M$ Vektorbündel und $T \in \Gamma(\text{Iso}(E; F))$ ein Bündelisomorphismus und $\{\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha \in \Lambda}$ bzw. $\{\tilde{\Phi}_\alpha : F|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha \in \Lambda}$ überdeckende Trivialisierungen⁴, wobei der gleiche Vektorraum V gewählt werden kann, da E und F isomorph sind, so erhalten wir die zugehörigen 1-Kozykel $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ bzw. $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times V \\ \downarrow T & & \downarrow \bar{T} \\ F & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_\alpha} & U_\alpha \times V \end{array}$$

so erkennen wir, dass dieses für die wohldefinierte Abbildung

$$\bar{T}(p, \xi) := (\tilde{\Phi}_\alpha \circ T|_{U_\alpha} \circ \Phi_\alpha^{-1})(p, \xi) = \left(p, \underbrace{\tilde{\Phi}_{\alpha,p} \circ T_p \circ \Phi_{\alpha,p}^{-1}}_{=: h_\alpha(p)}(\xi) \right)$$

kommutiert. Dabei ist $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(V)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha,\beta} &= \tilde{\Phi}_{\alpha,p} \circ (\tilde{\Phi}_{\beta,p})^{-1} \\ &= \underbrace{\tilde{\Phi}_{\alpha,p} \circ T_p \circ (\Phi_{\alpha,p})^{-1}}_{=: h_\alpha(p)} \circ \underbrace{\Phi_{\alpha,p} \circ (\Phi_{\beta,p})^{-1}}_{=: g_{\alpha,\beta}(p)} \circ \underbrace{\Phi_{\beta,p} \circ T_p^{-1} \circ (\tilde{\Phi}_{\beta,p})^{-1}}_{=: h_\beta^{-1}} \\ &= h_\alpha \circ g_{\alpha,\beta} \circ h_\beta^{-1}. \end{aligned}$$

Wir halten die erhaltene Formel $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = h_\alpha \circ g_{\alpha,\beta} \circ h_\beta^{-1}$ fest.

IV.4.4 Definition (1-Korand, Kohomologie von Vektorbündeln)

Für eine Mannigfaltigkeit M heißt $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(V)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 1-Korand mit Werten in $\text{GL}(V)$ bezüglich der Überdeckung $\{U_\alpha\}$, falls $U_\alpha \subseteq M$ offene Teilmengen der Mannigfaltigkeit sind, die diese überdecken, d. h. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

Zwei Vektorbündel $E, \tilde{E} \rightarrow M$ heißen *kohomolog*, falls über einer Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M bezüglich der E und \tilde{E} trivialisieren ein Korand $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(V)\}_{\alpha \in \Lambda}$ existiert so, dass für alle Indices $\alpha, \beta \in \Lambda$ bereits $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = h_\alpha g_{\alpha,\beta} h_\beta^{-1}$ gilt, wobei $g_{\alpha,\beta}$ bzw. $\tilde{g}_{\alpha,\beta}$ die jeweiligen Übergangsfunktionen sind.

Offensichtlich ist Kohomologie eine Äquivalenzrelation.

⁴Wir können annehmen, dass in beiden Trivialisierungen die gleichen Umgebungen genutzt werden, da wir einfach die Schnitte der Trivialisierungen beider Vektorbündel betrachten.

IV.4.5 Definition (Erste Čech-Kohomologie)

Der Quotient

$$\check{H}^1(\{U_\alpha\}, \text{GL}(V)) := \{1\text{-Kozykel}\} / \{1\text{-Koränder}\}$$

heißt *erste Čech-Kohomologie mit Werten in $\text{GL}(V)$ bezüglich $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$* .

IV.4.6 Bemerkung

Die Abbildung von der Menge der k -Vektorbündelisomorphieklassen in die erste Čech-Kohomologie mit Werten in $\text{GL}(V)$

$$\{E^k \rightarrow M \text{ trivialisiert über } \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}\} / \text{Isomorphie} \rightarrow \check{H}^1(\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, \text{GL}(V))$$

mit $[E] \mapsto [\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}]$ ist wohldefiniert. Das heißt isomorphe Vektorbündel haben bis auf Kohomologie gleiche 1-Kozykel. Wie wir sehen werden, gilt die Umkehrung, d. h. bis auf Isomorphie existiert genau ein Vektorbündel zu gegebenen 1-Kozykeln.

IV.4.7 Satz (Vektorbündel durch Kozykel)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und

$$\mathcal{G} = \left[\left\{ g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(V) \right\} \right] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \text{GL}(V))$$

eine erste Čech-Kohomologie auf M mit Werten in $\text{GL}(V)$ bezüglich der Überdeckung \mathcal{U} , so existiert – bis auf Isomorphie – genau ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ vom Rang $\dim V$, welches über $\{U_\alpha\}$ trivialisiert und dessen Kozykel $\{\psi_{\alpha,\beta}\} \in \mathcal{G}$ in der gegebenen ersten Čech-Kohomologie liegen.

BEWEIS

Wir konstruieren das Vektorbündel explizit durch

$$E := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{\alpha\} \times U_\alpha \times V / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation für $\alpha, \beta \in \Lambda$, $p, q \in M$ und $\xi, \zeta \in V$ durch

$$(\alpha, p, \xi) \sim (\beta, q, \zeta) \iff p = q \in U_\alpha \cap U_\beta \wedge \xi = g_{\alpha,\beta} \zeta$$

gegeben ist. Dass dies eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus den Kozykelbedingungen. Klarerweise definieren wir die Bündelprojektion durch $\pi : E \rightarrow M : [(\alpha, p, \xi)] \mapsto p$ und diese ist nach Definition der Äquivalenzrelation wohldefiniert.

Auch die Wahl der Bündelkarten auf E durch Angabe ihrer Umkehrabbildung

$$\Phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times V \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) : (p, \eta) \mapsto [(\alpha, p, \eta)]$$

Ausgeführt

ist natürlich. Diese Abbildung ist wiederum nach der Kozykelbedingung und Definition der Äquivalenzrelation bijektiv und damit sind die Bündelkarten Φ_α wohldefiniert. Durch diese Bündelkarten ergibt sich eine Vektorraumstruktur auf $\pi^{-1}(p) = E_p \subseteq E$, die unabhängig von der Kartenwahl ist, da die Kartenübergänge Isomorphismen sind, da

$$\Phi_{\alpha,p} \circ \Phi_{\beta,p}^{-1}(\zeta) = \Phi_{\alpha,\beta}([\beta, p, \zeta]) = \Phi_{\alpha,\beta}([\alpha, p, \mathbf{g}_{\alpha,\beta}(p)\zeta]) = \mathbf{g}_{\alpha,\beta}(p)\zeta$$

gilt. Insbesondere sind die Übergangsabbildungen \mathcal{C}^∞ -Abbildungen und die 1-Kozykel von E liegen in der gegebenen ersten Čech-Kohomologie. Damit ist die Existenz eines Vektorbündels mit den gewünschten 1-Kozykeln bewiesen.

Ist $\pi : F \rightarrow M$ ein weiteres Bündel vom gleichen Rang, welches über $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ mit kohomologen 1-Kozykeln $\{\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$. Da gleich dimensionale, endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume isomorph sind, gilt also

$$F|_{U_\alpha} \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}_\alpha} U_\alpha \times V \xleftarrow[\cong]{\Phi_\alpha} E|_{U_\alpha}$$

für die Bündelkartenabbildungen Φ_α bzw. $\tilde{\Phi}_\alpha$. Da beide 1-Kozykel kohomolog sind, existieren $\mathbf{h}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(V)$ mit $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} = \mathbf{h}_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \mathbf{h}_\beta^{-1}$ und wir definieren für $\alpha \in \Lambda$

$$T_\alpha := \tilde{\Phi}_\alpha^{-1} \circ (\text{id}_M, \mathbf{h}_\alpha) \circ \Phi_\alpha \in \Gamma(\text{Iso}(E|_{U_\alpha}; F|_{U_\alpha})).$$

Um damit einen Isomorphismus $T \in \Gamma(\text{Iso}(E; F))$ zwischen E und F zu definieren, müssen wir nachweisen, dass falls $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ist, bereits $T_\alpha(p) = T_\beta(p)$ folgt. Die Isomorphie folgt damit, denn in $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt mittels Kartenübergang

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \tilde{\Phi}_\alpha^{-1} \circ (\text{id}_M, \mathbf{h}_\alpha) \circ \Phi_\alpha \\ &= \left(\tilde{\Phi}_\beta^{-1} \circ (\text{id}_M, \tilde{\mathbf{g}}_{\beta,\alpha}) \right) \circ (\text{id}_M, \mathbf{h}_\alpha) \circ \left((\text{id}_M, \mathbf{g}_{\alpha,\beta}) \circ \Phi_\beta \right) \\ &= \tilde{\Phi}_\beta^{-1} \circ \left(\text{id}, \left(\tilde{\mathbf{g}}_{\beta,\alpha} \circ \mathbf{h}_\alpha \circ \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \right) \right) \circ \Phi_\beta \\ &= \tilde{\Phi}_\beta^{-1} \circ \left(\text{id}, \left(\left(\mathbf{h}_\beta \circ \mathbf{g}_{\beta,\alpha} \circ \mathbf{h}_\alpha^{-1} \right) \circ \mathbf{h}_\alpha \circ \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \right) \right) \circ \Phi_\beta \\ &= \tilde{\Phi}_\beta^{-1} \circ (\text{id}, \mathbf{h}_\beta) \circ \Phi_\beta = T_\beta. \end{aligned} \quad ///$$

IV.4.8 Korollar

1. Ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ ist genau dann trivialisierbar, wenn der zugehörige Kozykel $\{\mathbf{g}_{\alpha,\beta}\}$ kohomolog zu $\{\text{id}_V\}$ ist.
2. Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit dem Kozykel $\{\mathbf{g}_{\alpha,\beta}\}$ und eine Familie von Abbildungen $\{\xi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V\}$ mit $\xi_\alpha = \mathbf{g}_{\alpha,\beta}\xi_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gegeben, so gibt es genau einen Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ dessen Darstellung einer Trivialisierung ξ_α ist.

IV.4.9 Beispiel

Sei M^m eine Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$.

1. Betrachten wir $\{D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \in \text{GL}(\mathbb{K}^m)\}$, so ist dies nach der Kettenregel ein Kozykel und nach Satz IV.4.7 erhalten wir ein zugehöriges Vektorbündel E^m . Nach Abschnitt II.5 ist das erhaltene Vektorbündel TM – bzw. isomorph zu diesem.
2. Betrachten wir $\{D(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)\}$, so erhalten wir das Kotangentialbündel TM^* .

IV.4.10 Beispiel (Möbiusbündel)

Wir betrachten nun das Möbiusbündel, Abbildung IV.2, über \mathcal{S}^1 . Dazu betrachten

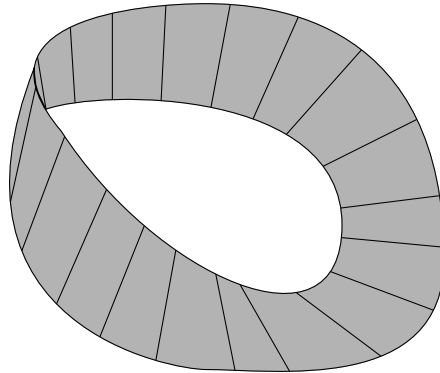


Abbildung IV.2.: Möbiusband

wir $U_+ := \mathcal{S}^1 \setminus S$ und $U_- := \mathcal{S}^1 \setminus N$, wobei $S = (0, -1)$ und $N = (0, 1)$ Nord- und Südpol sind. Insbesondere gilt für gewisse disjunkte, offene Mengen $I_1, I_2 \subseteq \mathcal{S}^1$, dass $U_+ \cap U_- = I_1 \dot{\cup} I_2$, da \mathcal{S}^1 ohne Nord- und Südpol in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt.

Um jetzt das Möbiusbündel zu erhalten definieren wir die Übergangsfunktion, welche die „Verdrehung“ verursacht

$$g : U_+ \cap U_- \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in I_1 \\ -1 & x \in I_2 \end{cases}$$

und erhalten ein *Linienbündel*, d. h. ein Vektorbündel von Rang 1, $L \rightarrow \mathcal{S}^1$.

Offensichtlich lässt sich dieses Bündel nicht in das triviale Bündel $L \cong \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ überführen. Formal führen wir den Beweis dafür durch einen Widerspruch:

Angenommen es würde $L \cong \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ gelten, dann würde es zwei glatte Abbildungen $h_\pm : U_\pm \rightarrow \mathbb{R}^*$ mit $g = h_+ \cdot 1 \cdot h_-$ auf $U_+ \cap U_-$ geben. Insbesondere müssten h_+ und h_- auf I_1 gleiche und auf I_2 verschiedene Vorzeichen haben, was ihrer der Stetigkeit auf U_+ bzw. U_- widerspricht.

Skizze eingefügt und präzisiert bzw. formalisiert

Kapitel V.

Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung

V.1. Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge

V.1.1 Proposition

Es stellt sich bei Vektorbündeln nun die Frage, wie man die einzelnen Vektorräume E_p und E_q vergleichen kann. Insbesondere, wenn p und q nicht im selben Bündelkartenbereich liegen, ist dies zunächst nicht klar. Diese Frage ist beispielsweise wichtig, um zu klären was der *Paralleltransport* eines Vektors sein soll, welcher unter anderem dafür benötigt wird die kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten zu finden.

Motivation etc. aus
Diffgeo II
übernommen

Wir betrachten dies am trivialsten Beispiel

V.1.2 Beispiel (Das Triviale Vektorbündel)

Es sei $E = \underline{V} := M \times V$ für V einen endlichen \mathbb{K} -Vektorraum, also ist E ein *triviales Vektorbündel*. Offensichtlich gilt hier

$$\Gamma(E) = C^\infty(M, V),$$

vermöge

$$\Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M, V) : \Psi \mapsto \text{pr}_2 \circ \Psi,$$

beziehungsweise

$$C^\infty(M, V) \rightarrow \Gamma(E) : f \mapsto (x \mapsto (x, f(x))).$$

Vergleiche zweier Vektoren $v_p \in E_p$ und $v_q \in E_q$ fallen hier leicht, da bis auf den Fusspunkt – wir werden dies in Zukunft identifizieren – gilt, dass v_p und v_q im selben Vektorraum V liegen, also trivial vergleichbar sind. Hat man eine Kurve $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ gegeben, so ist auch der Paralleltransport eines Vektors $v \in E_p$ längs γ klar, da für einen Schnitt Ψ klar ist, was

$$\frac{d(\Psi \circ \gamma)}{dt}(t) = 0$$

– wieder identifizieren wir Ψ mit $\text{pr}_2 \circ \Psi$ – bedeutet, da klar ist, was das Differenzieren im immergleichen Vektorraum bedeutet.

Genau genommen ist jedoch $d(\Psi \circ \gamma)$ eine Funktion in den Tangentialraum TE von E und allgemein gilt **nicht** $T_{\gamma(t)}E = E_{\gamma(t)} \times \mathbb{R}^r$, da sich der Vektorraum nicht notwendigerweise global trivialisieren lässt. Insbesondere ist keine einheitliche „Projektion“ auf die zweite Komponente möglich, also ist auch nicht klar, was obige Differentialgleichung bedeuten soll.

V.1.3 Motivation

Um diese Problem zu lösen betrachten wir die folgende Idee: Wir betrachten in jedem Punkt $p \in M$ ein „Horizontal Ebene“ H und „zerlegen“ $T_{(p,v)}E$ in $E_p \times H$, was somit wieder eine Projektion pr auf E_p ermöglicht. Klar ist, dass diese Projektion von der

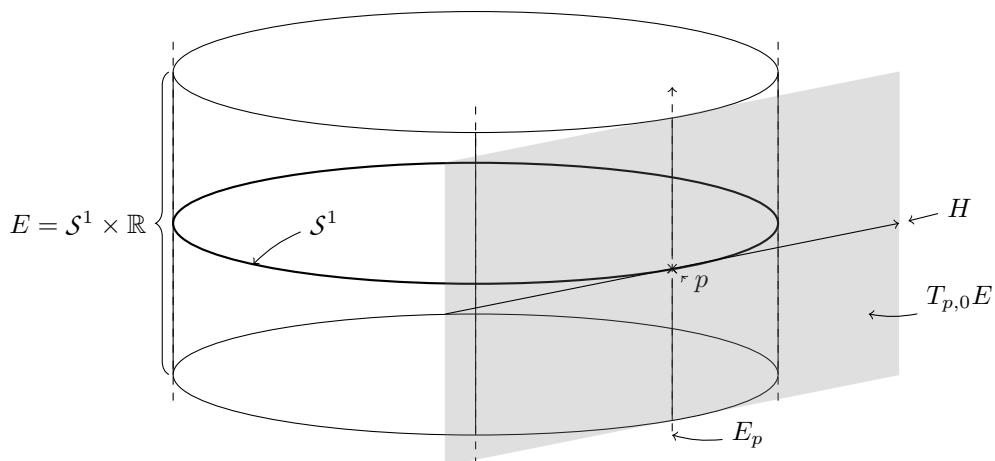


Abbildung V.1.: Horizontal Anteil

Wahl von H abhängt. Wir würden auf diese Weise eine Abbildung

$$\nabla_H : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(TM, E)) = \Omega^1(M, E) : \psi \mapsto \text{pr} \circ D\psi$$

erhalten. Für diese würden offensichtlich die Eigenschaften

1. ∇_H ist \mathbb{K} -linear
2. ∇_H erfüllt die Produktregel: $\nabla_H(f\psi) = f\nabla_H(\psi) + \psi df$ für $\psi \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{K})$

gelten. Dies motiviert die folgenden Ansätze.

V.1.4 Definition (Kovariante Ableitung)

Ist $E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel, so heißt eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E) = \Gamma(\text{Hom}(TM, E)) : \psi \mapsto \nabla\psi = (X \mapsto \nabla_X\psi)$$

„Pädagogischen“
Unterschied zwischen
kovarianter Ableitung
und Zusammenhang
eingefügt

kovariante Ableitung¹ auf E (oder Zusammenhang), falls die Leibnizregel erfüllt ist, d. h. falls

$$\nabla(\Psi f) = (\nabla\Psi)f + \Psi df \quad \forall f \in C^\infty(M), \psi \in \Gamma(E).$$

Für einen Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ im Vektorbündel $E \rightarrow M$ und einen Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit ist $(\nabla\psi)_p : T_pM \rightarrow E_p$ linear und für $v \in T_pM$ nennen wir $\nabla_v\psi := (\nabla\psi)_p v \in E_p$ kovariante Richtungsableitung von ψ längs v .

Entsprechend ist für einen Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ im Vektorbündel $E \rightarrow M$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$\nabla_X\psi := \nabla\psi(X) = (p \mapsto \nabla_{X_p}\psi) \in \Gamma(E)$$

die kovariante Richtungsableitung von ψ längs X gegeben.

V.1.5 Bemerkung (Lokalität der kovarianten Ableitung)

Die kovariante Ableitung eines Schnittes ist eine lokale Eigenschaft, d. h. sind zwei Schnitte $\psi, \tilde{\psi} \in \Gamma(E)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ gleich, d. h. $\psi|_U \equiv \tilde{\psi}|_U$, so sind dort auch ihre kovarianten Ableitungen gleich, d. h. $(\nabla\psi)|_U = (\nabla\tilde{\psi})|_U$.

Wir erkennen dies, indem wir für $p \in U$ eine Umgebung $U \subseteq V$ und eine Abschneidefunktion $f \in C^\infty(M)$ mit $f|_V \equiv 1$ und $\text{supp } f \subseteq U$ wählen, da dann

$$(\nabla\psi)_p = (\nabla\psi)_p \cdot f(p) + \underbrace{\psi \, d_p f}_{=0} = \nabla(f\psi)_p = \nabla(f\tilde{\psi})_p + 0 = \nabla(f\tilde{\psi})_p = (\nabla\tilde{\psi})_p$$

gilt.

V.1.6 Beispiel

Ist M eine Mannigfaltigkeit und V ein endlich dimensionaler Vektorraum, so können wir auf dem trivialen Bündel $E = M \times V$ mit $\nabla = d$ die triviale kovariante Ableitung wählen – d. h. dies ist das „normale“ Ableiten von V -wertigen Funktionen auf M .

V.1.7 Definition (Zusammenhang)

Ist $E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel, so heißt eine \mathbb{K} -bilineare Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) : (X, \psi) \mapsto \nabla_X\psi,$$

die in der ersten Komponente $C^\infty(M)$ -linear ist und in der zweiten Komponente die Leibnizregel erfüllt, d. h.

$$\nabla_{fX}\Psi = f(\nabla_X\Psi) \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{K}), X \in \mathfrak{X}(M), \psi \in \Gamma(E)$$

und

$$\nabla_X(\Psi f) = (\nabla_X\Psi)f + \Psi df(X) \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{K}), X \in \mathfrak{X}(M), \psi \in \Gamma(E),$$

Zusammenhang¹ auf E .

„Pädagogischen“
Unterschied zwischen
kovarianter Ableitung
und Zusammenhang
eingefügt

¹In der Literatur wird nach Satz V.1.8 bereits in den Definitionen nicht zwischen Zusammenhang und kovarianter Ableitung unterschieden. Insbesondere werden beide Interpretationen nicht unterschiedlich benannt.

V.1.8 Satz (Zusammenhang ist gleich kovarianter Ableitung)

Ist $E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel und

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) : (X, \psi) \mapsto \nabla_X \psi$$

eine Abbildung, so ist ∇ genau dann ein Zusammenhang, falls

$$\tilde{\nabla} : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E) : \psi \mapsto (X \mapsto \tilde{\nabla}_X \psi := \nabla_X \psi)$$

eine kovariante Ableitung ist.

BEWEIS

Beweis eingefügt.

Ist ∇ ein Zusammenhang und $\psi \in \Gamma(E)$, so folgt mit dem Fundamentallema der Tensorrechnung, Theorem IV.3.1 dass $\tilde{\nabla}\psi \in \Omega^1(E)$ eine E -wertige 1-Form ist. Die restlichen Bedingungen einer kovarianten Ableitung sind für $\tilde{\nabla}$ per Voraussetzung an den Zusammenhang ∇ erfüllt.

Ist $\tilde{\nabla}$ eine kovariante Ableitung, so gilt für $\psi \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ in $p \in M$ bereits

$$(\nabla_{fX}\psi)_p = (\tilde{\nabla}_{fX}\psi)_p = \tilde{\nabla}_{(fX)_p}\psi = \tilde{\nabla}_{f(p)X_p}\psi = f(p)\tilde{\nabla}_{X_p}\psi = (f\tilde{\nabla}_X\psi)(p).$$

wiederum folgen die restlichen eines Zusammenhangs für ∇ per Voraussetzung an die kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$. ///

Aufgrund dieser Satzes Satz V.1.8 werden wir² im Folgenden nicht zwischen kovarianter Ableitung und Zusammenhang unterscheiden und werden die jeweils geschicktere Charakterisierung verwenden. Deshalb wird in der Schreibweise von Satz V.1.8 auch nicht zwischen ∇ und $\tilde{\nabla}$ unterschieden.

V.1.9 Beispiel

Es wurden weitere Beispiele aus Diffgeo II eingefügt bzw. die alten diesen angepasst

1. „trivialer Zusammenhang“: Es sei $E = \underline{V}$ für einen endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V und $\nabla = d$ der *triviale Zusammenhang*. Wie oben motiviert gilt dann

$$\nabla = d : C^\infty(M; V) = \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(TM, E)) : \psi \mapsto d\psi,$$

also ist ∇ das „gewöhnliche Ableiten“ von V -wertigen Funktionen über M .

2. „direkter Summen Zusammenhang“: Es sei E_i ein Vektorbündel über M mit Zusammenhang ∇^{E_i} für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\nabla^{E_1 \oplus E_2} : \Gamma(E_1 \oplus E_2) = \Gamma(E_1) \oplus \Gamma(E_2) : (\psi_1 \oplus \psi_2) \mapsto \nabla^{E_1}\psi_1 \oplus \nabla^{E_2}\psi_2$$

ein Zusammenhang auf $E_1 \oplus E_2$.

²Es sei angemerkt, dass der hier aufgeführte Unterschied zwischen Zusammenhang und kovarianter Ableitung rein pädagogischer Natur ist und in der Literatur nicht existiert, sondern beide Begriffe bereits in der Definition gleichwertig verwendet werden.

3. „Projektionszusammenhang“: Sei $E = E_1 \oplus E_2$ und ∇ auf E ein Zusammenhang, wobei $E_1, E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel sind. Insbesondere sind $\text{Pr}_i : E \rightarrow E_i$ Bündelprojektionen bezüglich $E_1 \oplus E_2 = E$.

Nun definieren wir $\nabla^{E_1} \Psi_1 := \text{Pr}_1(\nabla \Psi_1)$, wobei $\Psi_1 \in \Gamma(E_1)$, d. h. $\nabla^{E_1} : \Gamma(E_1) \rightarrow \Omega^1(E_1)$ und beweisen, dass dieser wiederum ein Zusammenhang ist. Klarerweise ist dies \mathbb{K} -linear und wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \nabla^{E_1}(\Psi_1 f) &= \text{Pr}_1(\nabla(\Psi_1 f)) = \text{Pr}_1((\nabla \Psi_1)f + \Psi_1 df) \\ &= \text{Pr}_1((\nabla \Psi_1)f) + \text{Pr}_1(\Psi_1 df) = (\text{Pr}_1(\nabla \Psi_1))f + \text{Pr}_1(\Psi_1) df \\ &= (\nabla^{E_1} \Psi_1)f + \Psi_1 df \end{aligned}$$

Völlig analog funktioniert dies für $\nabla^{E_2} = \text{Pr}_2 \nabla|_{\Gamma(E_2)}$.

Da

$$\nabla : \Gamma(E_1) \oplus \Gamma(E_2) \rightarrow \Omega^1(E_1) \oplus \Omega^1(E_2),$$

gilt, können wir ∇ zu

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^{E_1} & \delta_2 \\ \delta_1 & \nabla^{E_2} \end{pmatrix}$$

zerlegen, wobei $\delta_1 \Psi_1 = \text{Pr}_2(\nabla \Psi_1)$ und $\delta_2 \Psi_2 = \text{Pr}_1(\nabla \Psi_2)$.

Aus einer Übungsaufgabe folgt, dass $\delta_1 : \Gamma(E_1) \rightarrow \Omega^1(E_2)$ auch $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K})$ -linear ist, also eine Bündelabbildung $\delta_1 : E_1 \rightarrow \text{Hom}(TM, E_2)$ ist und wir nennen es die *zweite Fundamentalform* von $E_1 \subseteq E$ bezüglich $E = E_1 \oplus E_2$. Nun fassen wir dies zunächst als $\delta_1 : TM \rightarrow \text{Hom}(E_1, E_2)$ bzw. $\delta_2 : TM \rightarrow \text{Hom}(E_2, E_1)$ auf, d. h. $\delta_1 \in \Omega^1(\text{Hom}(E_1, E_2))$ bzw. $\delta_2 \in \Omega^1(\text{Hom}(E_2, E_1))$. Es gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^{E_1} & 0 \\ 0 & \nabla^{E_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 \end{pmatrix} = \nabla^{E_1} \oplus \nabla^{E_2} + \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist der erste Summand der direkte Summenzusammenhang und der zweite Summand ist eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(\text{End } E)$ auf der Nebendiagonalen.

4. „Zusammenhang von Tensorprodukten“: Sind $E, F \rightarrow M$ Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhängen ∇^E, ∇^F , so definiert

Neu eingefügt

$$\nabla(\psi \otimes \varphi) := (\nabla^E \psi) \otimes \varphi + \psi \otimes (\nabla^F \varphi) \quad \forall \psi \in \Gamma(E), \varphi \in \Gamma(F)$$

einen Zusammenhang auf $E \otimes F$.

BEWEIS

Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\psi \in \Gamma(E)$ und $\varphi \in \Gamma(F)$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X(f\psi \otimes \varphi) &= \nabla_X((f\psi) \otimes \varphi) = \nabla_X^E(f\psi) \otimes \varphi + f\psi \otimes \nabla_X^F \varphi \\ &= ((X \bullet f)\psi + f\nabla_X^E \psi) \otimes \varphi + f\psi \otimes \nabla_X^F \varphi \\ &= (X \bullet f)\psi \otimes \varphi + f\nabla(\psi \otimes \varphi), \end{aligned}$$

also erfüllt ∇ die Leibnitz-Regel. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{fX}(\psi \otimes \varphi) &= \left(\nabla_{fX}^E \psi\right) \otimes \varphi + \psi \otimes \left(\nabla_{fX}^F \varphi\right) \\ &= f\left(\nabla_X^E \psi\right) \otimes \varphi + f\left(\nabla_X^F \varphi\right) = f\nabla_X(\psi \otimes \varphi)\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass ∇^E und ∇^F $C^\infty(M)$ -linear in der $\mathfrak{X}(M)$ -Komponente sind. Damit ist ∇ ein Zusammenhang auf $E \otimes F$. ///

Aus dem Teil über Tensorzusammenhang ausgelagert, bewiesen und gezeigt, dass $\nabla^{**} = \nabla$

5. „Dualer Zusammenhang“: Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhang ∇ , so definiert

$$(\nabla^* \varphi)(\psi) := d(\varphi(\psi)) - \varphi(\nabla \psi) \quad \forall \varphi \in \Gamma(E^*), \psi \in \Gamma(F) \quad (\text{V.1})$$

einen Zusammenhang auf dem Dualen Bündel E^* so, dass der Zusammenhang $\nabla^{**} := (\nabla^*)^*$ auf dem Bidual $E^{**} \cong E$ über der kanonischen Identifikation von E und E^{**} gleich dem ursprünglichen Zusammenhang ∇ ist.

BEWEIS

Es seien $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\psi \in \Gamma(E)$ und $\varphi \in \Gamma(E^*)$ beliebig. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit, d. h. dass $\nabla_X^* \varphi \in \Gamma(E^*)$ gilt. Mit

$$\begin{aligned}(\nabla_X^* \varphi)(f\psi) &= d_X(\varphi(f\psi)) - \varphi(\nabla_X(f\psi)) = d(f\varphi(\psi)) - \varphi(d_X f\psi + f\nabla_X \psi) \\ &= f d_X(\varphi(\psi)) - f\varphi(\nabla_X \psi) = f\nabla_X^* \varphi \psi\end{aligned}$$

folgt die $C^\infty(M)$ -Linearität von $\nabla_X^* \varphi$, also ergibt das Fundamentallemma der Tensorrechnung, dass $\nabla_X^* \varphi \in \Gamma(E^*)$. Damit ist ∇^* wohldefiniert.

Nun zeigen wir die Zusammenhangseigenschaften. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}(\nabla_X^*(f\varphi))(\psi) &= d_X(f\varphi(\psi)) - f\varphi(\nabla_X \psi) \\ &= (d_X f)\varphi(\psi) + f d_X(\varphi(\psi)) - f\varphi(\nabla_X \psi) \\ &= (d_X f)\varphi(\psi) + (\nabla_X^* \varphi)(\psi),\end{aligned}$$

also erfüllt ∇^* in der $\Gamma(E^*)$ -Komponente die Leibnitz-Regel und mit

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{fX}^* \varphi\right)(\psi) &= d_{fX}(\varphi(\psi)) - \varphi(\nabla_{fX} \psi) = f d_X(\varphi(\psi)) - f\varphi(\nabla_X \psi) \\ &= f(\nabla_X^* \varphi)(\psi)\end{aligned}$$

folgt, dass ∇ ein Zusammenhang auf E^* ist. Es gilt des Weiteren

$$\begin{aligned}(\nabla^{**} \psi)(\varphi) &= d(\psi(\varphi)) - \psi(\nabla^* \varphi) = d(\varphi(\psi)) - (\nabla^* \varphi)(\psi) \\ &= d(\varphi(\psi)) - \left(d(\varphi(\psi)) - \varphi(\nabla \psi)\right) = (\nabla \psi)(\varphi),\end{aligned}$$

also gilt im oben erklärten Sinn $\nabla^{**} = \nabla$. ///

6. „Tensorzusammenhang“: Sind $E_i \rightarrow M$ für $i = 1, \dots, k$ und $F \rightarrow M$ Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhängen ∇^{E_i} bzw. ∇^F , so gilt für den induzierten Zusammenhang ∇ auf den Multilinearen Formen auf $E_1 \times \dots \times E_k$ mit Werten in F , d. h. auf $G := \text{Mult}^k(E_1, \dots, E_k; F) = E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes F \rightarrow M$, sowie jede solche Form $T \in \Gamma(G)$, jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und beliebige Schnitte $\psi_i \in \Gamma(E_i)$

Statt das mit dieser Formel zu definieren, wird der konstruktivere Weg über die \otimes geführt und die Formel bewiesen. Gültigkeit war nur für $k = 1$ gezeigt.

$$(\nabla_X T)(\psi_1, \dots, \psi_k) = \tag{V.2}$$

$$\nabla_X^F \left(T(\psi_1, \dots, \psi_k) \right) - \sum_{i=1}^k T \left(\psi_1, \dots, \psi_{i-1}, \nabla_X^{E_i} \psi_i, \psi_{i+1}, \dots, \psi_k \right).$$

BEWEIS

Wir zeigen dies per Induktion, also sei zunächst $k = 1$. Da die Formel sowie die Definition des Zusammenhangs \mathbb{K} -linear in allen Komponenten ist, können wir annehmen, dass $T = \varphi \otimes \eta$ für einen Dual-Schnitt $\varphi \in \Gamma(E_1^*)$ und einen Schnitt $\eta \in \Gamma(F)$, damit gilt für jeden Schnitt $\psi \in \Gamma(E_1)$, wenn wir beachten, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ bereits $f \otimes \psi = f\psi$ gilt,

$$\begin{aligned} (\nabla T)\psi &= (\nabla(\varphi \otimes \eta))\psi = \left((\nabla^{E_1^*} \varphi) \otimes \eta \right) \psi + \left(\varphi \otimes (\nabla^F \eta) \right) \psi \\ &= (d(\varphi(\psi)))\eta - \varphi(\nabla^{E_1} \psi)\eta + (\varphi(\psi))(\nabla^F \eta) \\ &= \nabla^F(\varphi(\psi)\eta) - T(\nabla^{E_1} \psi) = \nabla^F(T\psi) - T(\nabla^{E_1} \psi). \end{aligned}$$

Damit gilt die Formel für $k = 1$. Gilt die Formel für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt für $T \in \Gamma(\text{Mult}^k(E_0, \dots, E_k; F)) = \Gamma(\text{Hom}(E_0; \text{Mult}(E_1, \dots, E_k; F)))$ nach dem obigen Fall $k = 1$ für $c := (\nabla T)(\psi_0, \dots, \psi_k)$

$$\begin{aligned} c &= ((\nabla T)\psi_0)(\psi_1, \dots, \psi_k) \\ &= \left(\nabla^{\text{Mult}(E_1, \dots, E_k; F)}(T\psi_0) - T(\nabla^{E_0} \psi_0) \right) (\psi_1, \dots, \psi_k) \end{aligned}$$

also gilt mit der Induktionsvoraussetzung für $T_0 := T\psi_0$

$$\begin{aligned} c &= \nabla^F(T_0(\psi_1, \dots, \psi_k)) - \sum_{i=1}^k T_0(\psi_1, \dots, \psi_{i-1}, \nabla^{E_i} \psi_i, \psi_{i+1}, \dots, \psi_k) \\ &\quad - \left(T \nabla^{E_0} \psi_0 \right) (\psi_1, \dots, \psi_k) \\ &= \nabla^F(T(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_k)) - \sum_{i=0}^k T_0(\psi_0, \dots, \psi_{i-1}, \nabla^{E_i} \psi_i, \psi_{i+1}, \dots, \psi_k). \end{aligned}$$

Damit ist diese Formel gezeigt. ///

Ein Zusammenhang auf TM liefert also insbesondere einen kanonischen Zusammenhang auf dem Bündel der k -fach kovarianten und l -fach kontravarianten Tensoren $\Omega^{(k,l)}(M) := \text{Mult}(TM^{\otimes k}, TM^{*\otimes l}; \mathbb{K})$. Daher kommt der Name dieser Zusammenhangsart.

7. Wir heben noch einmal zwei Spezialfälle der Tensorzusammenhänge hervor:

a) $k = 1$: $G = \text{Hom}(E, F)$:

$$(\nabla T)\psi = \nabla^F(T\psi) - T(\nabla^E\psi). \quad (\text{V.3})$$

b) $k = 2$: $G = \text{Bil}(E_1 \times E_2; F)$. Für $b \in G$ gilt

$$(\nabla b)(\psi_1, \psi_2) = \nabla^F(b(\psi_1, \psi_2)) - b(\nabla^{E_1}\psi_1, \psi_2) - b(\psi_1, \nabla^{E_2}\psi_2). \quad (\text{V.4})$$

Für $F = \mathbb{K}$ gilt also

$$(\nabla b)(\psi_1, \psi_2) = d(b(\psi_1, \psi_2)) - b(\nabla^{E_1}\psi_1, \psi_2) - b(\psi_1, \nabla^{E_2}\psi_2).$$

Befinden wir uns im euklidischen Raum und ist die Bilinearform konstant, beispielsweise das Skalarprodukt von \mathbb{R}^n , so ergibt dies gerade die wohlbekannte Gleichheit

$$d(\langle f|g \rangle_{\mathbb{R}}) = \langle df|g \rangle_{\mathbb{R}} + \langle f|dg \rangle_{\mathbb{R}}.$$

8. Zusammenhänge lassen sich auch per Isomorphismus von einem \mathbb{K} -Vektorbündel in ein anderes übertragen. Seien dafür $E, F \rightarrow M$ Vektorbündel, $T \in \text{Hom}(E, F)$ ein Isomorphismus und ∇^E sei ein Zusammenhang auf E , dann existiert genau ein Zusammenhang $\nabla = T_*\nabla^E$ auf F so, dass $\nabla^{\text{Hom}T} \equiv 0$ für den daraus resultierten Hom-Zusammenhang. Man sagt dann T sei *parallel*. Für diesen gilt

$$(T_*\nabla^E)\psi = T(\nabla^E(T^{-1}\psi)).$$

BEWEIS

Eindeutigkeit: Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf F mit $\nabla^{\text{Hom}T} \equiv 0$. Dann gilt für $\psi \in \Gamma(E)$:

$$0 = (\nabla^{\text{Hom}T})\psi = \nabla(T\psi) - T(\nabla^E\psi),$$

also $\nabla(T\psi) = T(\nabla^E\psi)$ und somit für $\varphi \in \Gamma(F)$

$$\nabla\varphi = \nabla(T(T^{-1}\varphi)) = T(\nabla^E(T^{-1}\varphi)).$$

Was gerade zu zeigen war. Ebenso folgt, dass ∇ wie oben definiert parallel ist. ///

Es folgt ein Satz, dessen Formulierung und Beweis durch den aus Diffgeo II ersetzt wurden.

Da wir bereits bemerkt haben, dass es auf einem Vektorbündel verschiedene Zusammenhänge gibt, wollen wir nun untersuchen, „wieviele“ Zusammenhänge es gibt.

V.1.10 Satz (Der affine Raum der Zusammenhänge)

Für ein \mathbb{K} -Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ ist

$$\mathcal{A} := \{ \nabla \text{ Zusammenhang auf } E \}$$

ein affiner (∞ -dimensionaler) Raum. Genauer gilt für zwei Zusammenhänge $\tilde{\nabla}$ und ∇ immer $\omega := \tilde{\nabla} - \nabla \in \Omega^1(\text{End } E)$, wobei ω dann *Zusammenhangsform* heißt. Damit gilt für jeden Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{A}$ bereits $\mathcal{A} = \nabla + \Omega^1(\text{End } E)$. Bei einer solchen Darstellung heißt ∇ *Hintergrundzusammenhang*.

BEWEIS

Wissen wir, dass immer ein Zusammenhang ∇ existiert, so erkennen wir direkt, dass $\nabla + \omega$ für alle $\omega \in \Omega^1(\text{End } E)$ ein Zusammenhang ergibt. Dies zeigen wir explizit in Lemma V.1.20. Entsprechend genügt es zu zeigen, dass für zwei Zusammenhänge ∇ und $\tilde{\nabla}$ immer $\omega := \nabla - \tilde{\nabla} \in \Omega^1(\text{End } E)$ gilt. Wir wissen

$$\omega : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(TM, E)) = \Omega^1(E).$$

Es bleibt zu zeigen, dass für $p \in M$ und $\psi \in \Gamma(E)$ der Hoomorphismus $(\omega(\psi))_p$ nicht von dem Schnitt ψ , sondern nur vom Wert ψ_p abhängt. Wir zeigen dies wieder unter Verwendung des Fundamentallemmas der Tensorrechnung. Für beliebige $f \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ und $\psi \in \Gamma(E)$ gilt

$$\omega(f\psi) = \nabla(f\psi) - \tilde{\nabla}(f\psi) = (\nabla\psi)f + (df)\psi - (\tilde{\nabla}\psi)f - (df)\psi = ((\nabla - \tilde{\nabla})\psi)f.$$

Also ist ω sogar $C^\infty(M, \mathbb{K})$ linear. Somit folgt $\omega \in \Gamma(\text{Hom}(E; \text{Hom}(TM; E)))$ und wir interpretieren dies als $\omega \in \Gamma(\text{Hom}(TM; \text{Hom}(E; E))) = \Gamma(\text{Hom}(TM; \text{End}(E)))$ und erhalten damit die Aussage. ///

V.1.11 Beispiel

Betrachten wir für eine Mannigfaltigkeit M wieder das triviale Bündel $\underline{V} = M \times V$ und den trivialen Zusammenhang d , wobei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ist, so existiert nach dem vorangehenden Satz V.1.10 für jeden andere Zusammenhang ein $\omega \in \Omega^1(\text{End } V)$ mit $\nabla = d + \omega$.

Für einen Schnitt $\psi : M \rightarrow V$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist also $\nabla_X \psi = d_X \psi + \omega(X)\psi$. Identifizieren wir V mit \mathbb{K}^r , dann ist $\text{End } V = \text{Gl}(r, \mathbb{K})$, also ist $\omega = (\omega^i)_i$, wobei $\omega^i : TM \rightarrow \mathbb{K}$ dann \mathbb{K} -wertige Eins-Formen sind. Wählen wir nun noch eine Karte (U, x) , so ist:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \psi = d_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \psi + \psi \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \psi \omega_j = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \psi_i \omega^i_j.$$

Wie bei den in den letzten Kapiteln vorgestellten Strukturen des Vektorbündels, Vektorfelds, Flusses etc. ist auch bei Zusammenhängen die lokale Darstellung wichtig.

V.1.12 Definition (Zusammenhangsform)

Ist ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ und $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_U)^r$ ein lokaler Rahmen, so heißt $\omega = (\omega^i_j) \in \Omega^1(U)^{r \times r}$ *Zusammenhangsform* von ∇ bezüglich Ψ , falls

$$\nabla \Psi = (\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_r) = \Psi \omega := (\psi_i \omega^i_j)_j.$$

V.1.13 Bemerkung

Da für alle $X \in \mathfrak{X}$ immer $\nabla_X \psi_j \in \Gamma(E)$ gilt, folgt für gewisse $f_{X^i_j} \in C^\infty(U)$

$$\nabla_X \psi_j = f_{X^i_j} \psi_i,$$

insbesondere $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \psi_j = f_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^i \psi_i$. Definieren wir nun $\omega^i_j := f_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^i dx^k$, so folgt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \psi_j = f_{\frac{\partial}{\partial x^l}}^i \psi_i = \left(f_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^i dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right) \psi_i = \psi_i \omega^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right).$$

Mit der Linearität folgt für $X \in \mathfrak{X}(U)$ bereits $\nabla_X \psi_j = \psi_i \omega^i_j(X)$. Damit existiert für jeden Zusammenhang und jeden Rahmen eine zugehörige Zusammenhangsform und für diese gilt tatsächlich $\nabla \psi_j = \psi_i \omega^i_j$.

V.1.14 Lemma (Zusammenhangsformänderung unter Rahmenwechsel)

Sind $\Psi \in \Gamma(E|_U)^r$ und $\tilde{\Psi} \in \Gamma(E|_{\tilde{U}})^r$ lokale Rahmen eines Vektorbündels $E^r \rightarrow M$ und $g \in C^\infty(U \cap \tilde{U}; \mathbb{K}^{r \times r})$ die Rahmenwechselmatrix von $\tilde{\Psi}$ zu Ψ , so gilt für die zugehörigen Zusammenhangsformen $\omega \in \Omega^1(U)^{r \times r}$ und $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\tilde{U})^{r \times r}$ in $U \cap \tilde{U}$

$$\tilde{\omega} = g^{-1} \omega g + g^{-1} dg. \quad (\text{V.5})$$

BEWEIS

Es gilt

$$\tilde{\Psi} \tilde{\omega} = \nabla \tilde{\Psi} = \nabla(\Psi g) = (\nabla \Psi)g + \Psi dg = \Psi \omega g + \Psi dg = \tilde{\Psi} (g^{-1} \omega g + g^{-1} dg). \quad ///$$

V.1.15 Bemerkung

Das bedeutet für $p \in U \cap \tilde{U}$ und $v \in T_p M$ gilt

$$\tilde{\omega}_p(v) = \underbrace{(g(p))^{-1}}_{\in \text{GL}(r, \mathbb{K})} \underbrace{\omega_p(v)}_{\in \text{gl}(r, \mathbb{K})} g(p) + \underbrace{(g(p))^{-1} dg_p(v)}_{\in \text{gl}(r, \mathbb{K})}.$$

V.1.16 Theorem (Vektorbündel mit Zusammenhang aus lokalen Daten)

Ist $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M durch offene Mengen und $\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta; \text{gl}(\mathbb{K}^r))$ ein Kozykel sowie Abbildungen $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \text{gl}(r, \mathbb{K}))\}$ mit

$$\omega_\beta = (\mathbf{g}_{\alpha,\beta})^{-1} \omega_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta} + (\mathbf{g}_{\alpha,\beta})^{-1} d\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda \quad (\text{V.5}')$$

gegeben, so gibt es bis auf Isomorphie genau ein Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ mit einem Zusammenhang ∇ , welches über $\{U_\alpha\}_\alpha$ trivialisiert, die Übergangsfunktionen $\{\mathbf{g}_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ besitzt und dessen Zusammenhangsformen in diesen Trivialisierungen $\{\omega_\alpha\}$ sind.

BEWEIS

Nach Satz IV.4.7 existiert bis auf Isomorphie genau ein Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ mit den gegebenen Kozykeln. Außerdem ist der Zusammenhang durch die Zusammenhangsformen eindeutig charakterisiert. Es verbleibt also nur noch die Existenz eines solchen Zusammenhangs ∇ zu zeigen.

Sei $\varphi \in \Gamma(E)$ beliebig. Um $\nabla\varphi$ zu definieren wählen wir für $\alpha \in \Lambda$ einen lokalen Rahmen $\Psi := \Psi_\alpha \in \Gamma(E|_U)^r$, also gilt für gewisse Funktionen $\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha^i)_i \in C^\infty(U)$ bereits $\varphi|_U := \Psi_\alpha \varphi_\alpha = \psi_{\alpha i} \varphi_\alpha^i$, also muss auf $U := U_\alpha$

$$\nabla\varphi = \nabla(\psi_{\alpha i} \varphi_\alpha^i) = (\nabla\psi_{\alpha i}) \varphi_\alpha^i + \psi_{\alpha i} d\varphi_\alpha^i = \psi_{\alpha i} \omega_{\alpha j}^i \varphi_\alpha^j + \psi_{\alpha i} d\varphi_\alpha^i = \Psi \omega_\alpha \varphi + \Psi d\varphi$$

gelten³ und ebenso definieren wir ∇ . Damit dies wohldefiniert ist, muss in jeder anderen Trivialisierung $\beta \in \Lambda$ also $\nabla\varphi = \Psi_\beta \omega_\beta \varphi_\beta + \Psi_\beta d\varphi_\beta$ auf U_β gelten. Da für die Übergangsabbildung $\mathbf{g}_{\alpha,\beta}$ nach Gleichung (V.5')

$$\begin{aligned} & \Psi_\beta \omega_\beta \varphi_\beta + \Psi_\beta d\varphi_\beta \\ &= \underbrace{\Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta}}_{=\Psi_\beta} \underbrace{(\mathbf{g}_{\beta,\alpha} \omega_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta} + \mathbf{g}_{\beta,\alpha} d\mathbf{g}_{\alpha,\beta})}_{=\omega_\beta} \underbrace{\mathbf{g}_{\beta,\alpha} \varphi_\alpha}_{=\varphi_\beta} + \Psi_\beta d\varphi_\beta \\ &= \Psi_\alpha \omega_\alpha \varphi_\alpha + \Psi_\alpha \left(\underbrace{(d\mathbf{g}_{\alpha,\beta}) \mathbf{g}_{\beta,\alpha}}_{=0} \right) \varphi_\alpha + \Psi_\beta d\varphi_\beta \\ &= \Psi_\alpha \omega_\alpha \varphi_\alpha + \Psi_\alpha \left(\underbrace{d(\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \mathbf{g}_{\beta,\alpha}) - \mathbf{g}_{\alpha,\beta} d\mathbf{g}_{\beta,\alpha}}_{=(d\mathbf{g}_{\alpha,\beta}) \mathbf{g}_{\beta,\alpha}} \right) \varphi_\alpha + \Psi_\beta d\varphi_\beta \\ &= \Psi_\alpha \omega_\alpha \varphi_\alpha - \Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta} (d\mathbf{g}_{\beta,\alpha}) \varphi_\alpha + \underbrace{\Psi_\alpha \mathbf{g}_{\alpha,\beta}}_{=\Psi_\beta} \underbrace{d(\mathbf{g}_{\beta,\alpha} \varphi_\alpha)}_{=\varphi_\beta} \end{aligned}$$

³An dieser Rechnung kann man gut erkennen, warum wir nach Möglichkeit Indeschreibweisen umgehen und bei „Matrixmultiplikationen“ bleiben.

Vervollständigt – die hässliche Rechnung fehlte

$$\begin{aligned}
 &= \Psi_\alpha \omega_\alpha \varphi_\alpha - \Psi_\alpha g_{\alpha,\beta} (dg_{\beta,\alpha}) \varphi_\alpha + \Psi_\alpha g_{\alpha,\beta} g_{\beta,\alpha} d\varphi_\alpha + \Psi_\alpha g_{\alpha,\beta} (dg_{\beta,\alpha}) \varphi_\alpha \\
 &= \Psi_\alpha \omega_\alpha \varphi_\alpha + \Psi_\alpha d\varphi_\alpha
 \end{aligned}$$

gilt, ist dies der Fall. Also ist ∇ durch obigen Term wohldefiniert, d. h. ∇ ist unabhängig von der gewählten Trivialisierung. ///

V.1.17 Satz und Definition (Torsionstensor, Torsionsfrei)

Ist ∇ ein Zusammenhang auf einem Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit M , so heißt $\mathcal{T}^\nabla \in \Omega^2(TM) = \Gamma(\text{Bil}(TM; TM))$ mit

$$\mathcal{T}^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

der *Torsionstensor* von ∇ .

Der Zusammenhang ∇ heißt *torsionsfrei*, falls $\mathcal{T}^\nabla \equiv 0$ bzw. gleichwertig falls

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

BEWEIS (\mathcal{T}^∇ IST EIN TENSOR)

Offensichtlich ist \mathcal{T}^∇ schiefsymmetrisch. Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^\nabla(X, fY) &= \nabla_X(fY) - \nabla_{fY}X - [X, fY] \\
 &= (df(X))Y + f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (df(X))Y - f[X, Y] \\
 &= f\mathcal{T}^\nabla(X, Y).
 \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallemma der Tensorrechnung folgt, dass \mathcal{T}^∇ ein Tensor ist. ///

V.1.18 Satz und Definition (Zurückgeholter Zusammenhang)

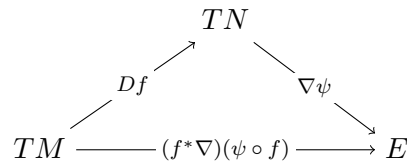
Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N sowie $E \rightarrow N$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ , so gibt es genau einen Zusammenhang $f^*\nabla$ auf dem Pullback-Bündel f^*E mit

$$(f^*\nabla)_v(\psi \circ f) = \nabla_{Df_p(v)}\psi \in E_{f(p)} = (f^*E)_p \quad \forall p \in M, v \in T_pM, \psi \in \Gamma(E).$$

Dieser Zusammenhang heißt *zurückgeholter Zusammenhang*.

V.1.19 Bemerkung

Wir können die zu beweisende Formel interpretieren, daß das folgende Diagramm kommutiert:



BEWEIS

Wir benutzen das Theorem über die lokale Charakterisierung von Zusammenhängen, Theorem V.1.16, d. h. wir geben nun die Zusammenhangsformen vor. Dies liefert sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit.

Weiter ausgeführt

Wir wählen zwei lokale Rahmen $\Psi_\alpha, \Psi_\beta \in \Gamma(E|_U)^r$, insbesondere sind damit $\Psi_{\alpha/\beta} \circ f \in \Gamma(f^*E|_{f^{-1}(U)})^r$ lokale Rahmen. Außerdem erhalten wir dadurch eine Übergangsfunktion $g_{\alpha,\beta}$ zu $\Psi_{\alpha/\beta}$. Für diese gilt dann

$$\Psi_\beta \circ f = (\Psi_\alpha \circ f)(g_{\alpha,\beta} \circ f).$$

Falls für einen Zusammenhang ∇ und eine Zusammenhangsform $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ sowohl $\nabla\Psi = \Psi\omega$ als auch die geforderte Eigenschaft gelten sollen, so gilt für jeden Punkt $p \in U$ und jeden Tangentialvektor $v \in T_pM$

$$(f^*\nabla)_v(\Psi \circ f) = \nabla_{d_p f(v)}\Psi = \Psi(f(p))\omega_{f(p)}(D_p f(v)) = ((\Psi \circ f)(f^*\omega)_p)(v).$$

Also ist die Zusammenhangsform von $f^*\nabla$ bezüglich des Rahmens $\Psi \circ f$ durch $f^*\omega \in \Omega^1(f^{-1}(U), \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ gegeben. Um das Theorem V.1.16 anzuwenden, benötigen wir nun noch die Übergangsfunktionen in f^*E . Wir wissen zunächst, dass

$$\omega_\beta = g_{\alpha,\beta}\omega_\alpha g_{\alpha,\beta} + g_{\alpha,\beta} dg_{\alpha,\beta}$$

gilt, also gilt auch

$$\begin{aligned} f^*\omega_\beta &= f^*(g_{\alpha,\beta}\omega_\alpha g_{\alpha,\beta} + g_{\alpha,\beta} dg_{\alpha,\beta}) = f^*(g_{\alpha,\beta}\omega_\alpha g_{\alpha,\beta}) + f^*(g_{\alpha,\beta} dg_{\alpha,\beta}) \\ &= (g_{\alpha,\beta} \circ f)(f^*\omega)(g_{\alpha,\beta} \circ f) + (f^*g_{\alpha,\beta}) \circ (f^* dg_{\alpha,\beta}). \end{aligned}$$

Da per Definition $(f^* dg_{\alpha,\beta})_p(v) = d_{f(p)}g_{\alpha,\beta}(D_p f(v)) = d_p(g_{\alpha,\beta} \circ f)(v)$ gilt, folgt

$$f^*\omega_\beta = (f^*g_{\alpha,\beta})(f^*\omega)(f^*g_{\alpha,\beta}) + (f^*g_{\alpha,\beta}) d(f^*g_{\alpha,\beta})$$

Also transformieren $f^*\omega$ wie gewünscht, da $f^*g_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta} \circ f$ die Übergangsfunktion von f^*E ist. ///

V.1.20 Lemma (Existenz von Zusammenhängen)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M , so existiert ein Zusammenhang ∇ auf E .

„Eine typische Anwendung“ von Satz V.1.18 wurde entfernt, da sie sich nur auf eine Übungsaufgabe bezog.

BEWEIS

Wir wählen eine Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ der Mannigfaltigkeit aus Bündel-Karten (U_α, x_α) , d. h. $M \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Nach Satz I.2.8 können wir eine Partition der Eins $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ wählen, d. h.

Wurde mehrfach als „klar“ erwähnt, aber nie bewiesen

$$\varphi_\alpha \in C^\infty(M; [0; 1]), \text{supp } \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha, \sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv \mathbb{1}_M$$

und definieren nun den Zusammenhang mittels $\nabla := \sum_\alpha \varphi_\alpha(x_\alpha^* d_\alpha)$, wobei d_α der triviale Zusammenhang auf dem trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{K}^r$ ist. Dies ist nach Satz V.1.18 ein Zusammenhang. ///

V.2. Paralleltransport

V.2.1 Definition (Paralleler Schnitt)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ , so heißt ein Schnitt $\Psi \in \Gamma(E)$ *parallel* (oder *kovariant konstant*) bezüglich ∇ , falls $\nabla\Psi = 0$ gilt.

V.2.2 Beispiel

1. Betrachten wir das triviale Bündel $E = M \times V$ und den trivialen Zusammenhang $\nabla = d$ auf diesem, so erhalten wir das erwartete Resultat, da $\Gamma(M \times V) = C^\infty(M, V)$ gilt und somit genau dann $\nabla\psi = d\psi = 0$ gilt, falls $\psi(p) = \psi_0 \in V$ konstant ist.
2. Betrachten wir das triviale Bündel $E = M^m \times V$ mit einem nicht-trivialen Zusammenhang $\nabla = d + \omega$ für ein $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(V))$, so ist $\psi \in \Gamma(E)$ genau dann parallel, falls $d\psi + \omega\psi = 0$.
Wir betrachten dies in lokalen Koordinaten, also sei $x = (x^1, \dots, x^m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte auf M . Damit gilt für gewisse $A_i \in C^\infty(U; \text{End}(V))$

$$\omega = \sum_{i=1}^m A_i dx^i$$

und wir erhalten mit der linearen Unabhängigkeit von $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ die Charakterisierung

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + A_i\psi = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{V.6})$$

der Parallelität. Es gibt also Kompatibilitätsbedingungen, damit ψ überhaupt lokal existiert. Also müssen Systeme von partiellen Differentialgleichungen an den A_i erfüllt sein. Das heißt, für alle $\psi \in \Gamma(E)$ und $1 \leq i, k \leq m$ muss mit dem Satz von Schwarz zumindest

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + A_k\psi \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial(A_k\psi)}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial(-A_i\psi)}{\partial x^k} + A_k \frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \psi \\ &= -\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \psi - A_i \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + A_k \frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \psi \\ &= -\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \psi + A_i A_k \psi - A_k A_i \psi + \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \psi \\ &= \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_k A_i + A_i A_k \right) \psi = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + [A_i, A_k] \right) \psi \end{aligned}$$

erfüllt sein. Also ist

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + [A_j, A_i] = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$$

eine notwendige Bedingung für die Parallelität.

Betrachten wir den Spezialfall $m = 1$, so vereinfacht sich (V.6) dazu, dass ψ genau dann parallel ist, wenn

$$\frac{d\psi}{dt} + A\psi = 0$$

mit $A : U \rightarrow \text{End}(V)$ und $\psi : I \rightarrow V$. Dies ist eine vektorwertige Differentialgleichung, welche immer lösbar ist.

V.2.3 Satz (Paralleler Schnitt längs einer Kurve)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M , so gibt es zu $\psi_0 \in E_{p_0}$ genau einen parallelen Schnitt $\psi \in \Gamma(\gamma^*E)$ mit $\psi(0) = \psi_0 \in E_{\gamma(0)}$.

BEWEIS

Lokale Existenz: Wir nehmen an, dass für ein Intervall $I \subseteq [-\varepsilon; \varepsilon]$ bereits $\gamma(I) \subseteq U \subseteq M$ gilt, wobei E über U trivialisiert. Insbesondere ist $\gamma^*E \cong I \times \mathbb{K}^r$ und $(\gamma^*\nabla)$ korrespondiert für eine gewisse Abbildung $\omega \in \Omega^1(I, \text{gl}(r, \mathbb{K}))$ mit $\nabla = d + \omega$. Mit dem obigen Beispiel V.2.2 wissen wir, dass es genau einen parallelen Schnitt $\psi \in \Gamma(\gamma^*E)$ mit $\psi(0) = \psi_0$ gibt, da gewöhnliche Differentialgleichungen unter den hier vorliegende Regularitätsvoraussetzung immer eindeutige Lösungen besitzen.

Langlebigkeit der Lösung: Da $[0; \varepsilon]$ kompakt ist, ist auch $\gamma([0; \varepsilon])$ kompakt. Insbesondere wird $\gamma([0; \varepsilon])$ durch endlich viele U_1, \dots, U_n überdeckt, wobei E jeweils über U_i trivialisiert. d. h. es existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \varepsilon$ mit $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$.

Nach dem Ergebnis der lokalen Existenz existiert genau ein paralleler Schnitt $\psi_1 \in \Gamma(\gamma|_{[0, t_1]}^*E)$ mit $\psi_1(0) = \psi_0$. Rekursiv erhalten wir für $i \in \{2, \dots, n\}$ jeweils die Existenz und Eindeutigkeit von parallelen Schnitten $\psi_i \in \Gamma(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}^*E)$ mit $\psi_i(t_{i-1}) = \psi_{i-1}(t_{i-1})$. Damit ist $\psi^+(t) := \psi_i(t)$ für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ein eindeutiger paralleler Schnitt über $\gamma|_{[0; \varepsilon]}$ mit $\psi(0) = \psi_0$. Durch äquivalentes Vorgehen erhalten wir einen eindeutigen parallelen Schnitt ψ^- über $[-\varepsilon; 0]$ mit $\psi^-(0) = \psi_0$. Da um 0 ein glatter paralleler Schnitt existiert, erhalten wir mit der Eindeutigkeit, dass ψ mit $\psi(t) := \psi^+(t)$ für $t \geq 0$ und $\psi(t) := \psi^-(t)$ für $t \leq 0$ ein glatter, flacher Schnitt über dem gesamten Weg mit $\psi(0) = \psi_0$ ist. ///

Tatsächlich den Weg über $[-\varepsilon; \varepsilon]$ statt über $[0; 1]$ betrachtet.

V.2.4 Bemerkung (Kurven über nicht kompakten Intervallen)

Für ein beliebiges Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um $0 \in I$ existiert immer eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n; b_n]$ mit $0 > a_n \searrow \inf I$ und $0 < b_n \nearrow \sup I$, also können wir jeden Weg $\gamma : I \rightarrow M$ durch eine Folge von Wegen $\gamma_n := \gamma|_{[a_n; b_n]}$ „ausschöpfen“ und zu jedem Anfangswert $\psi_0 \in E_{\gamma(0)}$ einen parallelen Schnitt $\psi_n \in \Gamma(\gamma|_{[a_n; b_n]}^*E)$ wählen so, dass $\psi_n(0) = \psi_0$. Mit der Eindeutigkeit dieses Schnittes erhalten wir $\psi_{n+1}|_{[a_n; b_n]} = \psi_n$

Eingefügt

und erhalten einen eindeutigen, parallelen Schnitt $\psi : I \rightarrow \Gamma(\gamma^*E)$ zum Anfangswert $\psi(0) = \psi_0$ durch $\psi(t) := \psi_n(t)$ mit $t \in [a_n; b_n]$.

V.2.5 Definition (Paralleler Schnitt längs einer Kurve)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M sowie $\psi_0 \in E_{\gamma(0)}$, so heißt der nach Satz V.2.3 existente und eindeutige Schnitt $\psi \in \Gamma(\gamma^*E)$ mit $(\gamma^*\nabla)\psi = 0$ und $\psi(0) = \psi_0$ der *parallele Schnitt von ∇ längs γ mit der Anfangsbedingung $\psi_0 \in E_{\gamma(0)}$* .

V.2.6 Bemerkung (Stückweise paralleler Schnitt längs einer Kurve)

Ist der Weg $\gamma : I \rightarrow M$ nur stückweise glatt, so erhalten wir dennoch einen Begriff des parallelen Schnitts. Wir wählen dafür, nach Definition von stückweise glatt, endlich viele Intervalle $I_i \subseteq I$ so, dass $\gamma|_{I_i}$ ein glatter Weg ist und nennen eine stetige Abbildung $\psi : I \rightarrow E$ *stückweise parallelen Schnitt*, falls für alle Indeces i durch $\psi|_{I_i} \in (\gamma|_{I_i}^*E)$ ein wohldefinierter paralleler Schnitt gegeben ist.

Geben wir einen Anfangswert vor, so existiert zu jedem stückweise glatten Weg ein stückweise paralleler Schnitt mit diesem Anfangswert und dieser Schnitt ist eindeutig. Dies folgt indem wir schrittweise von einer zur nächsten „nicht-glatten Stelle der Kurve“ parallele Schnitte bilden und jeweils den letzten Endwert als Anfangswert fordern.

Des Weiteren erkennen wir den folgenden Satz V.2.7 als wichtige Folgerung aus der Existenz der Parallelverschiebung, Satz V.2.3.

V.2.7 Satz (Vektorbündel über Intervallen trivialisieren)

Ist $E^r \rightarrow I$ ein Vektorbündel über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so gilt $E \cong I \times \mathbb{K}^r$.

BEWEIS

Nach Lemma V.1.20 können wir die Existenz eines Zusammenhangs voraussetzen. Wir führen nun einen vier-schrittigen Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für Vektorbündel über Intervallen lokal parallele Schnitte existieren. Danach führen wir aus, dass die Übergangsfunktionen von parallelen Schnitt über Intervallen konstant sind. Anschließend zeigen wir, dass Vektorbündel über kompakten Intervallen trivialisieren. Wir schließen den Beweis durch geeignete Überdeckung des gegebenen Intervalls ab.

Existenz lokaler, paralleler Rahmen: Wir wählen einen Rahmen $\Psi \in \Gamma(E|_J)^r$ und einen Zeitpunkt $t_0 \in J$. Nach Satz V.2.3 existiert ein paralleler Schnitt $\tilde{\Psi} \in \Gamma(E|_J)^r$ mit $\tilde{\Psi}(t_0) = \Psi(t_0)$. Insbesondere ist $\tilde{\Psi} = \Psi \cdot \mathbf{g}$ für ein $\mathbf{g} \in C^\infty(J; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $\mathbf{g}(t_0) = \text{id}$. Damit gilt $\det \mathbf{g}(t_0) \neq 0$ und somit $\det \mathbf{g}(t) \neq 0$ für eine Umgebung $\tilde{J} \subseteq J$ von t_0 . Damit ist $\tilde{\Psi} \in \Gamma(E|_{\tilde{J}})^r$ ein lokaler Rahmen um $t_0 \in I$. Da die Wahl des Rahmes und des Zeitpunktes beliebig war, können wir von jedem Rahmen annehmen, dass er parallel ist.

Eingefügt, da es später verwendet wird

Beweis eingefügt

Übergangsfunktionen von parallelen Rahmen: Sind $\Psi \in \Gamma(E|_J)^r$ und $\tilde{\Psi} \in \Gamma(E|\tilde{J})^r$ zwei parallele Rahmen über offenen Intervallen mit $J \cap \tilde{J} \neq \emptyset$, so existiert ein gemeinsamer Zeitpunkt $t_0 \in J \cap \tilde{J}$ und die Übergangsfunktion $g : J \cap \tilde{J} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{K}^r)$ mit $\Psi = \tilde{\Psi}g$. Insbesondere gilt auf $J \cap \tilde{J}$

$$0 = \nabla \Psi = \nabla(\tilde{\Psi}g) = \nabla \tilde{\Psi}g + \tilde{\Psi} dg = \tilde{\Psi} dg$$

also $dg = 0$. Somit ist g auf Zusammenhangskomponenten konstant – da der zweier Intervalle immer zusammenhängend ist, ist damit $g \equiv g(t_0)$ konstant.⁴

Trivialisierung über Kompakta: Ist $K \subseteq I$ kompakt, so existieren endlich viele parallele Rahmen $\Psi_0 \in \Gamma(J_0), \dots, \Psi_n \in \Gamma(J_n)$ mit $K \subseteq \bigcup_i J_i$. Durch Sortierung können wir annehmen, dass $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$.

Nun wählen wir die Übergangsfunktionen g_k mit $\Psi_{k+1} = \Psi_k g_k$ in $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$. Nach dem vorangehenden Schritt sind diese g_k konstant und damit ist $\Psi \in \Gamma(E)^r$ für $\Psi(t) := \Psi_k(t)g_k \dots g_1$. Da $g_k \in \text{gl}(\mathbb{K}^r)$, ist dies ein Rahmen über K . Also existiert für jedes Vektorbündel über einem kompakten Intervall ein globaler Rahmen.

Globaler Trivialisierung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so existieren $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $I = [a; b]$. Wir wählen streng montone Folgen $a_n > a_{n+1} > a$ und $b_n < b_{n+1} < b$ mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Wir wählen mit dem vorangehenden Schritt parallele Rahmen $\Psi_n \in \Gamma([a_n; b_n])^r$ und wieder die Übergangsfunktionen g_k mit $\Psi_{k-1} = \Psi_k g_k$ in $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$. Wie oben definieren wir $\Psi(t) := \Psi_k(t)g_k \dots g_1$ und erkennen, dass $\Psi \in \Gamma(E)^r$ ein globaler Rahmen ist.

In jedem anderen Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $I = [a; b)$, also $I = [a; a + 2\varepsilon] \cup (a + \varepsilon; b)$. Wir erhalten wieder Rahmen über $[a; a + 2\varepsilon]$ und $(a + \varepsilon; b)$ und können diese wie oben zusammensetzen. ///

V.2.8 Definition (Parallelverschiebung)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ ein (stückweise) glatter Weg, so heißt die Abbildung

$$P_\gamma := P_\gamma^\nabla : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)} : P_\gamma(\psi_0) := \psi(1),$$

wobei ψ der eindeutige (stückweise) parallele Schnitt von ∇ mit den Anfangsbedingungen $\psi(0) = \psi_0$ ist, *Parallelverschiebung* bezüglich ∇ längs γ .

V.2.9 Lemma (Eigenschaften der Parallelverschiebung)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ , so gilt für die Parallelverschiebungen längs (stückweise) glatten Wegen γ, γ_1 und γ_2

⁴An dieser Stelle zerbricht der Beweis eines äquivalenten Satzes über der Sphäre, da dort der Schnitt zweier „Intervalle“ nicht zusammenhängend sein muss. Eben aus diesem Grund gibt es keinen äquivalenten Satz auf der Sphäre – wir erinnern uns an das Möbiusbündel, Beispiel IV.4.10.

1. $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ ist \mathbb{K} -linear;
2. $(P_\gamma)^{-1} = P_{-\gamma}$, d. h. P_γ ist ein Isomorphismus;
3. $P_{\gamma_2 \star \gamma_1} = P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1}$, falls $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

BEWEIS

1. Folgt daraus, dass die zugehörigen Differentialgleichungen linear sind.
2. Wir setzen $\tilde{\psi}(t) := \psi(1-t)$. Dann ist $\tilde{\psi}(0) = \psi(1) = P_\gamma(\psi_0)$.
Wir erkennen sofort, dass $\tilde{\psi} \in \Gamma((-\gamma)^*E)$ der parallele Schnitt von $(-\gamma)^*\nabla$ mit der Anfangsbedingung $\psi(1)$ ist. Da $\tilde{\psi}(1) = \psi(0)$ gilt, folgt die Aussage.
3. Folgt durch stückweise Betrachtung – wie in Bemerkung V.2.6. ///

V.2.10 Korollar

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ eine (stückweise) glatte Kurve, so

1. ist $\psi \in \Gamma(\gamma^*E)$ ein paralleler Schnitt längs γ bezüglich ∇ , so ist ψ konstant Null, d. h. $\psi \equiv 0$, oder ψ hat keine Nullstelle.
2. gibt es *parallele Rahmen* längs γ , d. h. es existieren $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ so, dass $\psi_i \in \Gamma(\gamma^*E)$ parallele Schnitte sind und Ψ ein Rahmen ist, d. h. für alle Zeitpunkte $0 \leq t \leq 1$ ist $\Psi(t) = (\psi_i(t))_{i=1}^r$ eine Basis von $E_{\gamma(t)}$.

BEWEIS

Nach eigener Wahl können wir dies daraus folgen, dass die parallel Verschiebung ein Diffeomorphismus ist, oder die wie im Beweis des Satzes V.2.7, „Existenz lokaler, paralleler Rahmen“ zeigen. ///

V.2.11 Definition (Parallele Paarung)

Eine Paarung $b \in \text{Hom}(E_1, E_2; F)$ zu drei Vektorbündel $E_1, E_2, F \rightarrow M$ mit Zusammenhängen ∇_1, ∇_2 und ∇ über einer Mannigfaltigkeit M heißt *parallel*, falls sie bezüglich dem induzierten Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf $\text{Hom}(E_1, E_2; F)$ flach ist, also bereits $\tilde{\nabla}b = 0$ gilt, d. h. falls

$$\nabla(b(\psi_1, \psi_2)) = b(\nabla_1\psi_1, \psi_2) + b(\psi_1, \nabla_2\psi_2) \quad \forall \psi_1 \in E_1, \psi_2 \in E_2.$$

V.3. Krümmung und Holonomie

Von besonderem Interesse ist es zu beobachten wie sich ein Vektor $v \in E_p$ eines Vektorbündel ändert, wenn wir ihn entlang eines geschlossenen Weges parallel verschieben.

Einleitung
umgeschrieben und
Abbildungen eingefügt

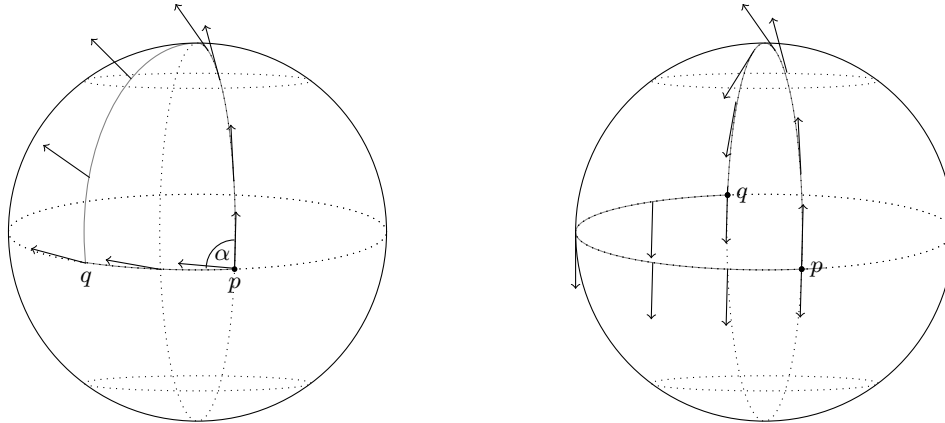


Abbildung V.2.: Ein Beispiel für Holonomie

Auf ersten Blick scheint dies trivial zu sein, denn man könnte meinen, dass diese Verschiebung den Vektor nicht ändert. Dies ist jedoch ein Fehlschluss.

Betrachten wir das Beispiel (Abbildung V.2) das wir einen Tangentialvektor an der Sphäre, der von einem Punkt p auf dem „Äquator“ nach „Norden“ zeigt, parallel zum Nordpol⁵ transportieren⁶, anschließend wiederum parallel zu einem anderen Punkt q auf dem Äquator bewegen und nun wieder am Äquator entlang zum Startpunkt schieben, so erkennen wir, dass der Vektor nun nicht mehr nach Norden zeigt, sondern – je nach Entfernung von p und q – in eine andere Richtung. Wählen wir q als den p gegenüberliegenden Punkt, so dreht sich der Vektor vollständig und zeigt nun nach Süden.

Wir wollen nun das dahinter liegende Problem näher beleuchten. Dafür werden wir unter anderem den Begriff der Krümmung auf Vektorfelder einführen. Zunächst müssen wir uns wieder etwas mit Wegen beschäftigen.

V.3.1 Definition (Schleifenraum)

Ist $p_0 \in M$ ein Punkt in einer Mannigfaltigkeit M , so heißt

$$\Lambda_{p_0}(M) := \{\gamma : [0; 1] \rightarrow M \text{ stückweise glatter Weg} \mid \gamma(0) = \gamma(1) = p_0\}$$

der *Schleifenraum* von M in p_0 .

V.3.2 Lemma

Ist $p_0 \in M$ ein Punkt in einer Mannigfaltigkeit M , so ist der Schleifenraum unter „Nacheinanderlaufen“ von Wegen abgeschlossen, d. h.

$$\gamma_2 \star \gamma_1 \in \Lambda_{p_0}(M) \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda_{p_0}(M).$$

⁵Tatsächlich ist dieses Beispiel nur sehr drastisch gewählt, um das Prinzip klar zu machen, denn jeder Paralleltransport auf der Sphäre entlang eines nicht-trivialen „Dreiecks“ „kippt“ den übergebenen Vektor.

⁶Seine Richtung kann nun nicht mehr eindeutig mit Himmelsrichtungen beschrieben werden, da am Nordpol jede Richtung „süden“ ist.

V.3.3 Definition (Holonomie)

Für ein Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇ sowie einen Punkt $p_0 \in M$ der Mannigfaltigkeit, heißt

$$P := P^\nabla : \Lambda_{p_0} \rightarrow \text{GL}(E_{p_0}) \cong \text{GL}(\mathbb{K}^r) : \gamma \mapsto P_\gamma$$

die *Holonomie-Abbildung*. und die Untergruppe

$$\text{Hol}_{p_0}(\nabla) := P(\Lambda_{p_0}(M)) \subseteq \text{GL}(E_{p_0})$$

von $\text{gl}(E_{p_0})$ heißt *Holonomiegruppe* des Zusammenhangs ∇ .

V.3.4 Bemerkung

Wir bemerken, dass $P(\text{konstante Schleife } p_0) = \text{id}_{E_{p_0}}$ ist, also die Holonomiegruppe nach Lemma V.3.2 tatsächlich eine Untergruppe von $\text{GL}(E_{p_0})$ ist.

Wir erkennen, dass, falls $p_0, q_0 \in M$ zwei Punkte der Mannigfaltigkeit sind, wir einen glatten Weg $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ von q_0 nach p_0 wählen können und

$$\text{Hol}_{q_0}(\nabla) = P_{-\gamma}^\nabla \circ \text{Hol}_{p_0}(\nabla) \circ P_\gamma^\nabla$$

gilt.

V.3.5 Motivation (für die Definition der Krümmung)

Wir wollen nun betrachten, wie Parallelverschiebung vom zurückgelegten Weg abhängt⁷. Dafür sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige offen Menge und $E = U \times \mathbb{K}^r$ ein triviales Vektorbündel mit einem beliebigen Zusammenhang ∇ . Da wir bereits wissen, dass dann für eine gewisse Abbildung $\omega \in \Omega^1(\text{Gl}(r, \mathbb{K}))$ bereits $\nabla = d + \omega$ gilt, folgt, wie in Bemerkung IV.2.13 ausgeführt, $\omega = A_x dx + A_y dy$ für gewisse Abbildungen $A_j : U \rightarrow \mathbb{K}^r$, also

$$\nabla = d + A_x dx + A_y dy.$$

Sei nun für $p_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p_0) \subseteq U$. Betrachten wir den Weg

$$\gamma^1 : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow U : t \mapsto p_0 + t \cdot e_1$$

und die Wegscharen

$$\gamma_t^2 : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow U : s \mapsto \gamma^1(t) + s \cdot e_2$$

mit $\gamma_0^i(0) = p_0$, so erhalten wir die Parallelverschiebungs-Abbildung

$$P : (-\varepsilon; \varepsilon) \times (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \text{gl}(\mathbb{K}^r) : (t, s) \mapsto P_{\gamma_t^2|_{[0;s]}}^\nabla P_{\gamma^1|_{[0;t]}}^\nabla,$$

welche eine Vektor parallel zunächst um t in e_1 und anschließend um s in e_2 Richtung verschiebt. d. h. dies entspricht der Parallelverschiebung $P(t, s) = P_{\gamma_t^2|_{[0;s]} \star \gamma^1|_{[0;t]}}^\nabla$ längs

⁷Dass es vom Weg abhängt, erkennen wir schon am oben betrachteten Beispiel (Abbildung V.2).

Nachdem der Original-Mitschrieb völlig unverständlich und großen Teils falsch war, habe ich das komplett neu geschrieben und mich an die Grundidee gehalten, die ich in dem Mitschrieb der Original Bemerkung herausgelesen habe.

$\gamma_t^2|_{[0;s]} \star \gamma^1|_{[0;t]}$. Insbesondere gilt für $v \in \mathbb{K}^r$, wobei 1 die natürliche Basis von $T_t\mathbb{R}$ bezeichnet und wir $T_t\mathbb{R}$ mit \mathbb{R} identifizieren und $P_0(t) := P(t, 0)$ setzen,

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma^{1*}\nabla)_1(P_0v) = d(P_0v) + \omega_{\gamma^1(\cdot)}(D\gamma^1(1))(P_0v) \\ &= (dP_0)v + (\omega_{\gamma^1(\cdot)}(\gamma^{1'}) \cdot P_0)(v) = \frac{\partial}{\partial t}P_0v + (\omega_{\gamma^1(\cdot)}(e_1) \cdot P_0)(v) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}P_0v + (A_x(\gamma^1(\cdot)) \cdot P_0)(v), \end{aligned}$$

also gilt, wenn $p_t = \gamma^1(t)$ bezeichnet, $\frac{\partial}{\partial t}P(t, 0) = -(A_x(p_t)) \cdot P(t, 0)$ und damit insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t}P(t, 0) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x(p_t)\right) \cdot P(t, 0) - (A_x(p_t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}P(t, 0) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x(p_t)\right) \cdot P(t, 0) + (A_x(p_t))^2 \cdot P(t, 0). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Taylor folgt, wenn wir $P(0, 0) = \text{id}$ beachten

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= P(0, 0) + t\frac{\partial}{\partial t}P(0, 0) + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial t}P(0, 0) + O(t^3) \\ &= \text{id} - tA_x(p_0)P(0, 0) + \frac{t^2}{2}\left(A_x(p_0)^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x}(p_0)\right)P(0, 0) + O(t^3) \\ &= \text{id} - tA_x(p_0) + \frac{t^2}{2}\left(A_x(p_0)^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x}(p_0)\right) + O(t^3). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für $p_t = \gamma^1(t)$

$$\begin{aligned} P(t, t) &= P(t, 0) - tA_y(p_t)P(t, 0) + \frac{t^2}{2}\left(A_y(p_t)^2 - \frac{\partial A_y}{\partial y}(p_t)\right)P(t, 0) + O(t^3) \\ &= \left(\text{id} - tA_y(p_t) + \frac{t^2}{2}\left(A_y(p_t)^2 - \frac{\partial A_y}{\partial y}(p_t)\right)\right) \cdot P(t, 0) + O(t^3) \\ &= \text{id} - tA_x(p_0) + \frac{t^2}{2}\left(A_x(p_0)^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x}(p_0)\right) - tA_y(p_t) \\ &\quad + t^2A_y(p_t)A_x(p_0) + \frac{t^2}{2}\left(A_y(p_t)^2 - \frac{\partial A_y}{\partial y}(p_t)\right) + O(t^3). \end{aligned}$$

Nun approximieren wir auch $A_y(p_t)$ mittels Taylor und erhalten – zur Verkürzung der Schreibweise lassen wir das Argument (p_0) weg,

$$\begin{aligned} P(t, t) &= \text{id} - tA_x + \frac{t^2}{2}\left(A_x^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x}\right) - t\left(A_y + t\frac{\partial A_y}{\partial x} + O(t^2)\right) \\ &\quad + t^2(A_y + o(t))A_x + \frac{t^2}{2}\left((A_y + o(t))^2 - \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + o(t)\right)\right) + O(t^3). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$P(t, t) = \text{id} - t(A_x + A_y) + \frac{t^2}{2} \left(A_x^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial A_y}{\partial x} + 2A_y A_x + A_y^2 - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \mathcal{O}(t^3).$$

Bezeichnet nun $\tilde{P}(t, s)$ die umgekehrte Verschiebung, d. h. die Parallel-Verschiebung, die einen Vektor zunächst um s in e_2 und anschließend um t in e_1 Richtung verschiebt, also für den Weg $\gamma_t^2 := \gamma_0^2$ und die Wegschar $\gamma_t^1(s) := \gamma^2(s) + t \cdot e_1$ gilt $\tilde{P}(t, s) = P_{\gamma_s^1|_{[0;t]}}^\nabla P_{\gamma^2|_{[0;s]}}^\nabla$, so folgt mit einer gleichen Rechnung

$$\tilde{P}(t, t) = \text{id} - t(A_y + A_x) + \frac{t^2}{2} \left(A_y^2 - \frac{\partial A_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial A_x}{\partial y} + 2A_x A_y + A_x^2 - \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(t^3).$$

Der Unterschied der beiden parallel Verschiebungen ist damit durch

$$\tilde{P}(t, t) - P(t, t) = t^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + [A_x, A_y] \right) + \mathcal{O}(t^3)$$

gegeben, wobei $[\cdot, \cdot]$ den Kommutator bezeichnet. Durch Taylorentwicklung erhalten wir wiederum $\tilde{P}(t, t)^{-1} = \text{id} + \mathcal{O}(t)$ und damit die „Verkipfung“ eines Vektors, wenn wir ihn entlang eines Quadrates um te_1 , dann um te_2 , dann um $-te_1$ und $-te_2$ verschieben:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, t)^{-1} \circ P(t, t) &= \tilde{P}(t, t)^{-1} \circ \left(\tilde{P}(t, t) + P(t, t) - \tilde{P}(t, t) \right) \\ &= \text{id} + (\text{id} + \mathcal{O}(t)) \cdot \left(t^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} - [A_x, A_y] \right) + \mathcal{O}(t^3) \right) \\ &= \text{id} + t^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + [A_x, A_y] \right) + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned}$$

Dabei war $\nabla = d + \omega = d + A_x dx + A_y dy$, also gilt für $\psi \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \right) \psi \\ &= \left(d_{\frac{\partial}{\partial x}} + A_x \right) \left(d_{\frac{\partial}{\partial y}} \psi + A_y \psi \right) - \left(d_{\frac{\partial}{\partial y}} + A_y \right) \left(d_{\frac{\partial}{\partial x}} \psi + A_x \psi \right) \\ &= A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial(A_y \psi)}{\partial x} - A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(A_x \psi)}{\partial y} + A_x A_y \psi - A_y A_x \psi \\ &= A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \psi + A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \psi - A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} + [A_x, A_y] \psi \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} \psi - \frac{\partial A_x}{\partial y} \psi + [A_x, A_y] \psi = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + [A_x, A_y] \right) \psi \end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt, dass bei der parallel Bewegung um ein Quadrat mit Seitenlänge t mit den Seitenrichtungen e_1 bzw. e_2 die „Verkipfung“ durch

$$\begin{aligned} \left(\tilde{P}(t, t)^{-1} \circ P(t, t) \right) - \text{id} &= t^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + [A_x, A_y] \right) + \mathcal{O}(t^3) \\ &= t^2 \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \right) + \mathcal{O}(t^3) \end{aligned}$$

gegeben ist⁸. Die motiviert den folgenden Krümmungsbegriff.

V.3.6 Definition (Krümmung eines Zusammenhangs)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit einem Zusammenhang ∇ , so heißt der Operator $\nabla\mathcal{R} \in \text{Bil}(TM, TM; \text{End}(\Gamma(E)))$ mit

$$\nabla\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\Gamma(E)) : (X, Y) \mapsto \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

die *Krümmung* des Zusammenhangs ∇ .

V.3.7 Bemerkung (Der Korrekturterm der Krümmung)

Vergleichen wir diese Definition mit dem Ergebnis der Motiviation, so sehen wir, dass der „Korrekturterm“ $\nabla_{[X, Y]}$ auftaucht. Als erstes bemerken wir, dass nach dem Satz von Schwarz $[\partial/\partial x, \partial/\partial y] = 0$ gilt, also die Formeln für den Spezialfall von Koordinatenvektorfeldern übereinstimmen.

Dass dieser Term notwendig ist, damit die Anschauung der Motiviation erhalten bleibt, erkennen wir mit dem nach folgenden Satz.

V.3.8 Satz (Die Krümmung ist eine 2-Form)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M , so ist die Krümmung jedes Zusammenhangs ∇ auf E ein Tensor, d. h. es gilt $\nabla\mathcal{R} \in \Omega^2(\text{End}(E))$.

V.3.9 Bemerkung

Aufgrund dieses Satzes heißt $\nabla\mathcal{R}$ auch *Krümmungs-Tensor* oder *Krümmungs-2-Form* von ∇ .

BEWEIS

Da $\nabla\mathcal{R}$ offensichtlich linear in den Vektorfelderkomponenten ist, genügt es nach dem Fundamentallemma der Tensorrechnung, Theorem IV.3.1, zu zeigen, dass $\nabla\mathcal{R}$ in jeder Komponente C^∞ -linear ist. Aufgrund der Antilinearität in den Vektorfelderkomponenten genügt es zu zeigen, dass für alle Funktionen $f \in C^\infty(M)$, alle Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und jeden Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ bereits

$$\nabla\mathcal{R}(fX, Y)\psi = f\nabla\mathcal{R}(X, Y)\psi = \nabla(X, Y)(f\psi)$$

gilt. Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ beliebig, so gilt

$$[fX, Y] = fXY - Y(fX) = fXY - d_Y fX - fYX = f[X, Y] - d_Y fX.$$

⁸Es sei angemerkt, dass eine genauere Rechnung liefert, dass alle Terme verschwinden, falls der t^2 Term verschwindet.

Eingefügt

Weiter ausgeführt



Also folgt für jedes Vektorfeld $\psi \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{R}(fX, Y)\psi &= \nabla_{fX}(\nabla_Y \psi) - \nabla_Y(\nabla_{fX} \psi) - \nabla_{[fX, Y]}\psi \\
 &= f\nabla_X(\nabla_Y \psi) - \nabla_Y(f\nabla_X \psi) - \nabla_{(f[X, Y] - d_Y fX)}\psi \\
 &= f\nabla_X(\nabla_Y \psi) - (f\nabla_Y \nabla_X \psi + d_Y f\nabla_X \psi) \\
 &\quad - (f\nabla_{[X, Y]}\psi - d_Y f\nabla_X \psi) \\
 &= f\nabla \mathcal{R}(X, Y)\psi
 \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \nabla_Y (f\psi) &= \nabla_X (d_Y f\psi + f\nabla_Y \psi) \\
 &= d_X d_Y f\psi + d_Y f\nabla_X \psi + d_X f\nabla_Y \psi + f\nabla_X \nabla_Y \psi
 \end{aligned}$$

sowie der gleichen Rechnung für $\nabla_Y \nabla_X (f\psi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{R}(X, Y)(f\psi) &= \nabla_X(\nabla_Y(f\psi)) - \nabla_Y(\nabla_X(f\psi)) - \nabla_{[X, Y]}(f\psi) \\
 &= (d_X d_Y f\psi + d_Y f\nabla_X \psi + d_X f\nabla_Y \psi + f\nabla_X \nabla_Y \psi) \\
 &\quad - (d_Y d_X f\psi + d_X f\nabla_Y \psi + d_Y f\nabla_X \psi + f\nabla_Y \nabla_X \psi) \\
 &\quad - (d_{[X, Y]}f\psi + f\nabla_{[X, Y]}\psi) \\
 &= f\nabla_X \nabla_Y \psi + d_X d_Y f\psi - d_Y d_X f\psi \\
 &\quad - f\nabla_Y \nabla_X \psi - (d_X d_Y - d_Y d_X f)\psi - f\nabla_{[X, Y]}\psi \\
 &= f\nabla \mathcal{R}(X, Y)\psi. \tag{///}
 \end{aligned}$$

V.3.10 Bemerkung (Lokale Beschreibung des Krümmungstensors)

Sei $\Psi \in \Gamma(E|_U)^r$ ein Rahmen eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ mit einem Zusammenhang ∇ und (U, x) eine Karte der zugehörigen Mannigfaltigkeit M . Des Weiteren bezeichne ω die Zusammenhangsform von ∇ bezüglich Ψ , d. h. $\nabla \Psi = \Psi \omega$.

Es gilt damit für die Koordinatenvektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{R}(X, Y)\Psi &= \nabla_X(\nabla_Y \Psi) - \nabla_Y(\nabla_X \Psi) - \nabla_{[X, Y]}\Psi \\
 &= \nabla_X(\Psi \omega(Y)) - \nabla_Y(\Psi \omega(X)) \\
 &= \Psi \omega(X)\omega(Y) + \Psi d_X(\omega(Y)) - \Psi \omega(Y)\omega(X) - \Psi d_Y(\omega(X)) \\
 &= \Psi \left(d_X(\omega(Y)) - d_Y(\omega(X)) + [\omega(X), \omega(Y)] \right).
 \end{aligned}$$

Da $\omega \in \Omega^1(U)^{r \times r}$ gilt, können wir dies durch die Dualbasis darstellen. Also existieren Funktionen $\omega_i \in C^\infty(U; \text{gl}(\mathbb{K}^r))$ mit $\omega = \omega_i dx^i$, also

$$\nabla \mathcal{R}(X, Y)\Psi = \Psi \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + [\omega_i, \omega_j] \right).$$

V.3.11 Definition (Ricci-Tensor)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ , so ist der *Ricci-Tensor* $\nabla \text{Ric} \in \text{Bil}(TM, TM)$ von ∇ durch

$$\nabla \text{Ric} : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \text{tr} \underbrace{\nabla \mathcal{R}(v, \cdot)w}_{\in \text{End } TM}$$

Aus dem Kapitel IX, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ hierher verschoben.

definiert.⁹

V.3.12 Bemerkung (Lokale Beschreibung auf dem Tangentialbündel)

Ist (U, x) eine Karte einer Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf TM , so gilt für gewisse Funktionen $\nabla \mathcal{R}_{ijk}^l \in C^\infty(U)$

$$\nabla \mathcal{R}_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = \nabla \mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{V.7}$$

bzw. gleichwertig $\nabla \mathcal{R}_{ijk}^l = dx^l(\nabla \mathcal{R}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)\partial/\partial x^k)$. Insbesondere gilt

$$\nabla \text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = dx^j \left(\nabla \mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \nabla \mathcal{R}_{ijk}^j =: \nabla \text{Ric}_{ik}, \tag{V.8}$$

d. h. $\nabla \text{Ric} = \nabla \text{Ric}_{ik} dx^i \otimes dx^k$.

V.3.13 Lemma (Erste Bianchi-Identität der Krümmung)

Ist M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf dem Tangentialbündel TM , so erfüllt die Krümmung $\nabla \mathcal{R}$ die *erste Bianchi-Identität*, d. h.

Aus dem Kapitel IX hierher verschoben.

$$\nabla \mathcal{R}(X, Y)Z + \nabla \mathcal{R}(Y, Z)X + \nabla \mathcal{R}(Z, X)Y = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

bzw. gleichwertig gilt $\nabla \mathcal{R}_{ijk}^l + \nabla \mathcal{R}_{jki}^l + \nabla \mathcal{R}_{kij}^l = 0$ für $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

BEWEIS

Wegen der Torsionsfreiheit gilt für Vektorfelder $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} &\nabla \mathcal{R}(X, Y)Z + \nabla \mathcal{R}(Y, Z)X + \nabla \mathcal{R}(Z, X)Y \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X [Y, Z] + \nabla_Y [Z, X] + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \end{aligned}$$

auf Grund der Jacobi-Identität aus Satz II.6.9 ist dies 0. ///

⁹Dies ist nach Lemma A.2.6 wohldefiniert und ein Tensor, da die Krümmung nach Satz V.3.8 ein Tensor ist.

V.3.14 Definition (Flacher Zusammenhang)

Ein Zusammenhang ∇ eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ heißt *flach*, falls $\nabla \mathcal{R} \equiv 0$.

V.3.15 Satz (Lokales Holonomietheorem)

Ist $E^r \rightarrow M^m$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ , so sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. ∇ ist flach, d. h. $\nabla \mathcal{R} = 0$;
2. um jeden Punkt existiert ein lokal paralleler Rahmen von E ;
3. um jeden Punkt existiert eine Trivialisierung Φ mit $\Phi^* \nabla = d$;
4. Parallelverschiebungen sind lokal wegunabhängig.

BEWEIS

Vereinfacht

„(1) \Rightarrow (2)“: Sei Ψ ein lokaler Rahmen für $E|_U$ und bezeichne $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ die Zusammenhangsform von ∇ bezüglich Ψ , d. h.

$$\nabla \Psi = \Psi \omega.$$

Wir versuchen nun einen weiteren Rahmen $\tilde{\Psi} = \Psi g$ zu finden, welcher flach ist. d. h. wir müssen einen Rahmenwechsel $g \in \Gamma(U; \text{GL}(\mathbb{K}^r))$ finden so, dass $\nabla(\Psi g) = 0$. Wir müssen also die Gleichung

$$0 = \nabla \tilde{\Psi} = \nabla(\Psi g) = (\nabla \Psi)g + \Psi dg = \Psi(\omega g + dg)$$

lösen. Da Ψ ein Rahmen ist, ist dies gleichwertig dazu die gewöhnliche Differentialgleichung $dg = -\omega g$ zu lösen. Für eine zugehörige Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt $\omega = A_i dx^i$, wobei $A_i \in C^\infty(U; \text{Gl}(\mathbb{K}^r))$ gewisse Funktionen sind. Mit der linearen Unabhängigkeit von dx^1, \dots, dx^m sind also die Gleichungen

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} + A_i g = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

zu lösen. Über die lokale Darstellung der Krümmung und der Voraussetzung $\nabla \mathcal{R} = 0$ erhalten wir

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - [A_i, A_j] = 0 \quad \forall i, j.$$

Das wir damit ein g mit den gewünschten Gleichungen finden können, folgt aus dem Lemma von Maurer-Cartan, Theorem V.3.16, dass wir separat beweisen werden.

„(2) \Leftrightarrow (3)“: Dies folgt direkt daraus, dass Rahmen Γ und Trivialisierungen Φ äquivalent sind. Dabei gilt $\Phi^*\nabla = d + \omega$ mit $\omega = \nabla\Psi$.

„(2) \Rightarrow (4)“: Sei Ψ ein paralleler Rahmen über U und $\gamma : [0; 1] \rightarrow U$ ein beliebiger Weg. Für einen beliebigen Tangentialvektor $\varphi_0 \in E_{\gamma(0)}$ gilt $\varphi_0 = \Psi_{\gamma(0)}\xi$ für ein $\xi \in \mathbb{K}^r$ und damit folgt aus der Parallelität von Ψ

$$P_\gamma(\varphi_0) = P_\gamma(\Psi_{\gamma(0)}\xi) = (P_\gamma\Psi_{\gamma(0)})\xi = \Psi_{\gamma(1)}\xi.$$

Da die rechte Seite unabhängig von γ ist, ergibt sich die Aussage.

„(4) \Rightarrow (1)“: Dies ergibt sich mit der Rechnung aus Motivation V.3.5. ///

V.3.16 Theorem (Lemma von Maurer-Cartan)

Für eine Abbildung $\omega = A_i dx^i \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^r))$, wobei $U \subseteq \mathbb{K}^r$ offen ist, gilt genau dann

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - [A_i, A_j] = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

falls für jeden Punkt $x_0 \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ und eine Lösung $g : \tilde{U} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{K}^r)$ der Differentialgleichung $dg + \omega g = 0$ existiert. Dabei ist g bis auf die Multiplikation mit einer konstanten Matrix eindeutig.

BEWEIS

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Sind g, \tilde{g} beides Lösungen dieser Gleichung, so gilt $dg = -\omega g$ und $d\tilde{g} = -\omega \tilde{g}$. Somit folgt

$$\begin{aligned} d(g^{-1}\tilde{g}) &= d(g^{-1})\tilde{g} + g^{-1}d\tilde{g} = g^{-1}(dg)g^{-1}\tilde{g} - g^{-1}\omega\tilde{g} \\ &= g^{-1}\omega \underbrace{g^{-1}\tilde{g}}_{=id} - g^{-1}\omega\tilde{g} = g^{-1}\omega\tilde{g} - g^{-1}\omega\tilde{g} = 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $g = \tilde{g} \cdot B$ für ein $B \in \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^r)$ – genauer $B \in \text{GL}(\mathbb{K}^r)$, da $g, \tilde{g} \in \text{GL}(\mathbb{K}^r)$.

„ \Leftarrow “: Sei für $\tilde{U} \subseteq U$ ein solches g mit $dg = -\omega g$ gegeben. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = dg\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -A_i g$$

also

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j} A_i g = -\frac{\partial A_i}{\partial x^j} g - A_i \frac{\partial}{\partial x^j} g = -\frac{\partial A_i}{\partial x^j} g + A_i A_j g$$

Und mit dem Satz von Schwarz folgt

$$\left(-\frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A_i A_j\right)g = \left(-\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + A_j A_i\right)g.$$

Da nach Voraussetzung $g \in \text{GL}(\mathbb{K}^r)$ gilt, folgt die Aussage.

Weiter ausgeführt und korrigiert.

„ \Rightarrow “: Es gilt genau dann $d\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{g} = 0$, falls

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} = d\mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathbf{g} = -A_i\mathbf{g}.$$

Offensichtlich ist es gleichwertig einen Schnitt $\gamma = (\text{id}, \mathbf{g}) \in \Gamma(U \times \text{gl}(\mathbb{K}^r))$ mit

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p - A_i(\mathbf{g}(p))$$

zu finden. Dafür verwenden wir die bereits gezeigten Ergebnisse zu simultanen Flüssen aus Kapitel III, „Differentialgleichungen“ bzw. aus Abschnitt III.2, „Satz von Frobenius“:

Wir definieren also $N := U \times \text{gl}(\mathbb{K}^r)$ und betrachten die Abbildungen

$$Y_i : N \rightarrow \mathbb{R}^r \times \text{gl}(\mathbb{K}^r) : (p, B) = (e_i, -A_i B),$$

welche punktweise linear unabhängig sind. Indem wir für $P = (p, B) \in N$ beachten, dass $T_{(p,B)}N \cong \mathbb{R}^r \times \text{gl}(\mathbb{K}^r)$ gilt, interpretieren wir diese Abbildungen für $f \in C^\infty(N)$ als die Vektorfelder

$$Y_{iP} \bullet f = \left\langle D_p^N f \Big| (e_i, -A_i B) \right\rangle_N = \partial/\partial P^i f - \underbrace{(\partial/\partial b_k^l [P]f) A_{ik}^m B_m^l}_{= \langle D_P^{\text{gl}} f \Big| A_i B \rangle_{\text{gl}(\mathbb{K}^r)}}$$

interpretieren, wobei wir b_m^k dabei als die euklidische Basis von $\text{gl}(\mathbb{K}^r) = \mathbb{K}^{r \times r}$ wählen, d. h.¹⁰ $B = (B_m^k)_{m,k} = B_m^k \frac{\partial}{\partial b_m^k}$. Insbesondere gilt für die Matrixmultiplikation $A_i B = A_{im}^k B_l^m \frac{\partial}{\partial b_l^k}$. Um nun wie gewünscht eine simultane Lösung $\gamma : U \rightarrow N$ der Differentialgleichungen $\frac{\partial}{\partial x} \gamma / \frac{\partial}{\partial x} x^i = Y_i \circ \gamma$ für alle i zu erhalten, genügt es nach dem Satz von Frobenius, Theorem III.2.14 bzw. Korollar III.2.11 nachzuweisen, dass $[Y_i, Y_j] = 0$.

Wir berechnen also für $f \in C^\infty(N)$ und $P = (p, B) \in N$

$$\begin{aligned} Y_{jP} \bullet (Y_i \bullet f) &= Y_{jP} \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \left\langle D^{\text{gl}} f \Big| A_i(\cdot) \right\rangle_{\text{gl}} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}}_{=: I_j^i} \Big|_P - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle D^{\text{gl}} f \Big| A_i(\cdot) \right\rangle_{\text{gl}}}_{=: II_j^i} \\ &\quad - \underbrace{\left\langle D_P^{\text{gl}} \frac{\partial}{\partial x^i} f \Big| A_j B \right\rangle_{\text{gl}}}_{III_j^i} - \underbrace{\left\langle D_P^{\text{gl}} \left\langle D^{\text{gl}} f \Big| A_i(\cdot) \right\rangle_{\text{gl}} \Big| A_j B \right\rangle_{\text{gl}}}_{IV_j^i}. \end{aligned}$$

¹⁰Also bezeichnet B_m^k den Eintrag in der m -ten Zeile und k -ten Spalte.

Wir beachten nun, dass mit dem Satz von Schwarz und der Produktregel

$$\Pi_j^i = \underbrace{\left\langle D_P^{\text{gl}} \frac{\partial}{\partial x^j} f \Big|_{A_i B} \right\rangle_{\text{gl}}}_{=:\Pi_{j,a}^i} + \underbrace{\left\langle D_P^{\text{gl}} f \Big| \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p A_i \right) B \right\rangle_{\text{gl}}}_{=:\Pi_{j,b}^i}$$

sowie

$$\text{IV}_j^i = \underbrace{\left\langle \left\langle D_P^{\text{gl}} D^{\text{gl}} f \Big|_{A_i B} \right\rangle_{\text{gl}} \Big|_{A_j B} \right\rangle_{\text{gl}}}_{=:\text{IV}_{j,a}^i} + \underbrace{\left\langle \left\langle D_P^{\text{gl}} f \Big| D_P^{\text{gl}}(A_i(\cdot)) \right\rangle_{\text{gl}} \Big|_{A_j B} \right\rangle_{\text{gl}}}_{=:\text{IV}_{j,b}^i}$$

gilt. Beachten wir nun, dass $\text{I}_j^i - \text{I}_i^j = 0$, $\text{II}_{j,a}^i + \text{III}_j^i - \text{II}_{i,a}^j - \text{III}_i^j = 0$ und $\text{IV}_{i,a}^j - \text{IV}_{i,a}^j = 0$, da diese Terme symmetrisch in i und j sind, so erhalten wir

$$[Y_j, Y_i]_P^{\text{Der}} = Y_{jP} \bullet (Y_i \bullet f) - Y_{iP} \bullet (Y_j \bullet f) = \text{II}_{j,b}^j - \text{II}_{j,b}^i + \text{IV}_{j,b}^i - \text{IV}_{j,b}^j.$$

Durch kurze Rechnung¹¹ erhalten wir $\text{IV}_{i,b}^j - \text{IV}_{j,b}^i = \left\langle D_P^{\text{gl}} f \Big| [A_i, A_j]_{\text{gl}}(\mathbb{K}^r) \right\rangle_{\text{gl}}$ und damit folgt die Aussage aus der Voraussetzung. ///

Nun gehen wir von der lokalen Theorie zur globalen Theorie über. Zunächst betrachten wir den Spezialfall eines flachen Vektorbündels über einer kompakten Ebene.

V.3.17 Lemma (Flache Bündel über kompakten Ebenen trivialisieren)

Ist $E^r \rightarrow [0; 1] \times [0; 1]$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ , so gilt genau dann $\nabla \mathcal{R} = 0$, falls E trivial ist, d. h. falls $(E, \nabla) \cong ([0; 1] \times [0; 1] \times \mathbb{K}^r, d)$.

BEWEIS

Da die Rückrichtung per Definition gilt, beweisen wir nur die Hinrichtung. Nach dem lokalen Holonomietheorem, Satz V.3.15 existieren lokal parallele Schnitte, also wir $K := [0; 1] \times [0; 1]$ mit offenen Bällen U_i überdecken so, dass jeweils ein paralleler Rahmen $\Psi^i \in \Gamma(E|_{U_i})$ existiert. Äquivalent zum Beweis von Satz V.2.7 konstruieren wir einen parallelen Rahmen auf ganz K , womit die Aussage gezeigt ist.

Übergangsfunktionen der parallelen Rahmen: Gilt $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so existiert ein $p \in U_i \cap U_j$ und die Übergangsfunktion $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{gl}(\mathbb{K}^r)$ mit $\Psi_j = \Psi_i g_{ij}$. Insbesondere gilt auf $U_i \cap U_j$

$$0 = \nabla \Psi_j = \nabla (\Psi_i g_{ij}) = \nabla \Psi_i g_{ij} + \Psi_i dg_{ij} = \Psi_i dg_{ij}$$

also $dg_{ij} = 0$. Somit ist g_{ij} auf Zusammenhangskomponenten konstant. Da der Schnitt von Bällen zusammenhängend ist, ist damit $g_{ij} \equiv g_{ij}^0$ konstant auf $U_i \cap U_j$.

¹¹Man schreibt es in der Basis aus, berechnet die partiellen Ableitungen und multipliziert aus.

Wie in Diffgeo II als eigenen Satz aus dem Korollar V.3.18 ausgegliedert. Dabei wurde der Beweis des ersten Teils umformuliert. Der zweite Teil wurde neu gemacht, da der original Mitschrieb sehr unpräzise war.

Trivialisierung über Streifen: Sei $s \in [0; 1]$ beliebig. Da die Bälle ganz $[0; 1] \times [0; 1]$ überdecken und offen sind, können wir für jeden Zeitpunkt $t \in [0; 1]$ einen Index i und einen Radius $\delta > 0$ mit $B_\delta(s, t) \cap [0; 1] \times [0; 1] \subseteq U_i$ wählen. Da $\{s\} \times [0; 1]$ kompakt ist, überdecken endlich viele $B_{\delta_k}(s, t_i)$ bereits $\{s\} \times [0; 1]$. Durch Sortierung und eventuelles Weglassen einiger dieser Bälle können wir annehmen, dass $t_i < t_{i+1}$ und dass sich nur aufeinander folgende Bälle schneiden¹², also

$$B_{\delta_k}(s, t_k) \cap B_{\delta_l}(s, t_l) \neq \emptyset \iff |k - l| < 2.$$

Es bezeichne i_k den Index mit $B_{\delta_k}(s, t_i) \cap [0; 1] \times [0; 1] \subseteq U_{i_k}$. Nach dem vorangehenden Schritt ist die Übergangsfunktion g_{i_{k+1}, i_k} der Schnitte Ψ_{i_k} und $\Psi_{i_{k+1}}$ konstant. Daher können wir auf $U^s := \bigcup_k B_{\delta_k}(s, t_k)$ den Schnitt $\Psi^s \in \Gamma(U^s)^r$ für $p \in h(B_{\delta_k}(s, t_k))$ mittels $\Psi^s(p) := \Psi_k(p)g_{i_k, i_{k-1}} \cdots g_{i_2, i_1}$ definieren und erkennen, dass dies ein paralleler Rahmen ist, da die $g_k \in \text{GL}(\mathbb{K}^r)$ invertierbar und Ψ_k parallele Schnitte sind. Da $\{s\} \times [0; 1]$ kompakt ist, können wir nach eventueller Verkleinerung annehmen, dass $U^s = (s - \varepsilon_s; s + \varepsilon_s) \times [0; 1]$.

Gesamte Trivialisierung: Da auch $[0; 1] \times [0; 1]$ kompakt ist und die U^s offen sind und offensichtlich $[0; 1] \times [0; 1]$ überdecken, können wir wieder endlich viele $U^{s_k} =: U^k$ wählen, welche ebenfalls $[0; 1] \times [0; 1]$ überdecken und wiederum annehmen, dass sich nur aufeinander folgenden Menge nicht leer schneiden¹³. Wie oben erhalten wir damit einen globalen parallelen Rahmen. //

Als wichtiges Korollar erhalten wir die Homotopieinvarianz der Parallelverschiebung in flachen Vektorbündeln.

V.3.18 Korollar (Charakterisierung der Nullkrümmung)

Ist $E \rightarrow M^m$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ , so gilt genau dann $\nabla \mathcal{R} = 0$, falls die Parallelverschiebung auf ganz M homotopieinvariant ist, d. h. für zwei homotope Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0; 1] \rightarrow M$ mit gleichen Endpunkten gilt $P_{\gamma_1}^\nabla = P_{\gamma_2}^\nabla$.

Als Korollar formuliert

BEWEIS

„ \Leftarrow “: Da jede Mannigfaltigkeit lokal diffeomorph zu $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist, ist jede Mannigfaltigkeit lokal einfach zusammenhängend. d. h. es existiert um jeden Punkt $p \in M$ eine einfach zusammenhängende Umgebung $U \subseteq M$ von p . Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0; 1] \rightarrow U$ mit gleichen Endpunkten sind also homotop, insbesondere ist nach Voraussetzung die Parallelverschiebung auf beiden identisch.

Damit ist die Parallelverschiebung lokal wegunabhängig und mit dem lokalen Holonomietheorem, Satz V.3.15 folgt $\nabla \mathcal{R} = 0$.

¹²Dies könnten wir nicht annehmen, wenn wir statt $[0; 1] \times [0; 1]$ bspw. den Torus betrachten würden.

¹³Wieder tritt im Fall des Torus die Problematik wie in ¹² auf.

„ \Rightarrow “: Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0; 1] \rightarrow M$ zwei homotope Wege mit gleichem Endpunkten und $h : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow M$ die zugehörige Homotopie, also

$$h(s, 0) = \gamma_0(0), \quad h(s, 1) = \gamma_0(1), \quad h(i, t) = \gamma_i(t) \quad \forall s, t \in [0; 1], i \in \{0, 1\},$$

so ist nach Voraussetzung $h^*\nabla$ flach über h^*E und nach Lemma V.3.17 existiert ein globaler paralleler Rahmen in h^*E . Damit existiert ein Rahmen $\Psi \in \Gamma(\text{Bild } h)^r$. Wir erhalten damit wie im Beweis von Satz V.3.15, Schritt „2 \Rightarrow 4“, die Unabhängigkeit vom Weg, indem wir $\varphi_0 \in E_{\gamma_0(0)}$ mittels des gefundenen parallelen Rahmens Ψ durch $\varphi_0 = \Psi\xi$ darstellen und beachten, dass

$$P_{\gamma_i}(\varphi_0) = P_{\gamma_i}(\Psi_{\gamma_i(0)}\xi) = (P_{\gamma_i}\Psi_{\gamma_i(0)})\xi = \Psi_{\gamma_i(1)}\xi$$

gilt. Da die rechte Seite unabhängig von γ_i ist, ergibt sich die Aussage. ///

Durch das vorangehende Lemma können wir nun im flachen Fall die Parallelverschiebung nicht nur auf Wegen, sondern auch auf der ersten Fundamentalgruppe definieren.

V.3.19 Definition (Holonomie-Repräsentation & Holonomiegruppe)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem flachen Zusammenhang ∇ , d. h. $R^\nabla = 0$, so heißt für einen Punkt $p_0 \in M$ die Abbildung

$$\varrho^\nabla : \pi_0(M, p_0) \rightarrow \text{GL}(E_{p_0}) \cong \text{GL}(\mathbb{K}^r) : [\gamma] \mapsto P_\gamma^\nabla$$

die *Holonomie-Repräsentation* der ersten Fundamentalgruppe $\pi_0(M, p_0)$ in p_0 . Ihr Bild $\varrho^\nabla(\pi_0(M, p_0)) \subseteq \text{GL}(E_0)$ heißt *Holonomiegruppe* $\text{Hol}(\nabla, p_0)$ von ∇ im Punkt $p_0 \in M$.

Die Definition der Holonomiegruppe ist aus Differentialgeometrie II

V.3.20 Lemma (Transformation der Holonomiegruppe)

Sind $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $q_0, p_0 \in M$ zwei Punkte der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit, so ist die Holonomiegruppe $\text{Hol}(\nabla, q_0)$ eine Untergruppe von $\text{GL}(E_{q_0})$ und es gilt für alle stückweise glatten Wege $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ von $\gamma(0) = q_0$ nach $\gamma(1) = p_0$

$$\text{Hol}(\nabla, p_0) = P_\gamma^\nabla \circ \text{Hol}(\nabla, q_0) \circ P_{-\gamma}^\nabla,$$

d. h. $\text{Hol}(\nabla, q_0)$ und $\text{Hol}(\nabla, p_0)$ sind zueinander konjugiert.

BEWEIS

Die Transformationsformel ist offensichtlich. Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda_{q_0}(M)$, so gilt

$$\varrho^\nabla([\gamma_1]) \circ \varrho^\nabla([\gamma_2]) = P_{\gamma_1}^\nabla \circ P_{\gamma_2}^\nabla = P_{\gamma_1 \star \gamma_2}^\nabla = \varrho^\nabla([\gamma_1 \star \gamma_2]) \in \text{Hol}(\nabla, q_0),$$

also ist dies eine Untergruppe von $\text{GL}(\mathbb{K}^r)$. ///

Aus Differentialgeometrie II

Aus
Differentialgeometrie
II

V.3.21 Bemerkung (Holonomie-Repräsentation unter Isomorphie)

Ist $T : E_1 \rightarrow E_2$ ein Isomorphismus zweier Vektorbündel $E_1 \rightarrow M$ und $E_2 \rightarrow M$ mit zwei unter T verträglichen Zusammenhängen ∇_1 und $\nabla_2 = T \circ \nabla_1 \circ T^{-1}$, so gilt für alle $[\gamma] \in \pi_0(M, p_0)$ bereits $\varrho^{\nabla_2} = T_{p_0} \circ \varrho^{\nabla_1} \circ T_{p_0}^{-1}$.

Nun verfügen wir über ausreichend Werkzeug um ein echtes globales Resultat zu zeigen, indem wir die Trivialisierung von flachen Vektorbündel über kompakten Ebenen, Lemma V.3.17 auf beispielsweise S^n – für $n \geq 2$ – zu verallgemeinern:

V.3.22 Theorem (Trivialisierung von flachen Vektorbündeln)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem flachen Zusammenhang ∇ über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M , so ist E trivial, d. h. $E \cong M \times \mathbb{K}^r$.

BEWEIS

Es sei $p_0 \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit und $\Psi^0 \in \Gamma(E_{p_0})^r$ ein beliebiger Rahmen in E_{p_0} . Für jeden Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit definieren wir $\Psi(p) := P_\gamma^\nabla \Psi^0$, wobei $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ ein beliebiger Weg von $p_0 = \gamma(0)$ nach $p = \gamma(1)$ ist. Wir müssen lediglich noch nachweisen, dass dies wohldefiniert ist.

Sind dafür $\gamma, \tilde{\gamma} : [0; 1] \rightarrow M$ zwei Wege von $p_0 = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ nach $p = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$, so ist $\gamma \star (-\tilde{\gamma})$ ein geschlossener Weg, also $\gamma \star (-\tilde{\gamma}) \in \Lambda_{p_0}$. Nach Voraussetzung ist dieser Weg damit homotop zu $\text{const}_{p_0} : [0; 1] \rightarrow M : t \mapsto p_0$. Mit Korollar V.3.18 und den Eigenschaften der Parallelverschiebung, Lemma V.2.9 folgt

$$\text{id}_{E_{p_0}} = P_{\text{const}_{p_0}}^\nabla = P_{\gamma \star (-\tilde{\gamma})}^\nabla = P_\gamma^\nabla \circ P_{\tilde{\gamma}}^{\nabla^{-1}},$$

also $P_{\tilde{\gamma}}^\nabla = P_\gamma^\nabla$. Insbesondere gilt $P_{\tilde{\gamma}}^\nabla \Psi_0 = P_\gamma^\nabla \Psi_0$. Damit ist Ψ wohldefiniert. ///

Im
Differentialgeometrie I
Skript gibt es eine
Bemerkung, die ein
Hinweis auf die
Riemann-Hilbert
Korrespondenz ist. Im
Differentialgeometrie
II Skript steht das
Theorem der
Riemann-Hilbert
Korrespondenz. Der
Beweis ist jedoch in
beiden nicht
ausformuliert, so dass
ich mich dagegen
entschlossen habe,
diese hier
aufzunehmen.

Differentialgeometrie II

Vorwort zum zweiten Teil

Dieser zweite Teil basiert auf dem unkorrigierten L^AT_EX Live-Mitschrieb von CHRISTOPHER R. NERZ der *Differentialgeometrie II* Vorlesung von PROF. DR. FRANZ PEDIT im Wintersemester 2009/2010 an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

Die Mitschriften wurden dabei von CHRISTOPHER R. NERZ erweitert, umsortiert sowie stückweise umformuliert und bebildert – einige der Änderungen sind hervorgehoben. Der Inhalt aus Teil I, „Differentialgeometrie I“ wird vorausgesetzt.

- Das erste Kapitel „Zusammenhänge auf Vektorbündeln“ wurde in Teil I, „Differentialgeometrie I“, Kapitel IV, „Vektorbündel“ und Kapitel V, „Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung“ verarbeitet. Genauer
 - ist der erste Abschnitt „Wiederholung“ im Abschnitt IV.1, „Vektorbündel“ enthalten.
 - ist der zweite Abschnitt „Das Problem“ ebenso wie der dritte „Nötige Definitionen und Sätze“ in Abschnitt V.1, „Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge“ enthalten.
 - sind der erste Teil des vierten Abschnitts „Lokale Beschreibung“ und der erste Teil des sechsten Abschnitts „Zurückgeholtes Vektorbündel“ in Abschnitt IV.4, „Vektorbündel mit Kozykeln“ enthalten.
 - sind der zweite Teil des vierten Abschnitts „Lokale Beschreibung“, der ganze fünfte Abschnitt „Zusammenhänge durch lokale Daten“ und der zweite Teil des sechsten Abschnitts „Zurückgeholtes Vektorbündel“ in Abschnitt V.1, „Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge“ enthalten.
- Das zweite Kapitel „Parallele Schnitte, Holonomie und Krümmung“ wurde in Teil I, „Differentialgeometrie I“, Abschnitt V.1, „Kovariante Ableitungen & Zusammenhänge“ verarbeitet. Genauer
 - ist der erste Abschnitt „Parallel“ in Abschnitt V.2, „Paralleltransport“ enthalten.
 - sind der zweite Abschnitt „Krümmung“ und dritte Abschnitt „Schleifen und Holonomie“ in Abschnitt V.3, „Krümmung und Holonomie“ enthalten.
- Das dritte Kapitel „Einige Anwendungen in der Riemannschen Geometrie“ wurde in Kapitel IX, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ ausgearbeitet. Dabei wurden ein paar Beweise ausgeführt und einige Umsortierungen vorgenommen. Desweiteren wurden große Teile umformuliert.

- Der erste Abschnitte „Riemannsche Vektorbündel“ wurde zusammen mit Teilen des zweiten Abschnitts „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ zum neuen Abschnitt IX.1, „Riemannsche Vektorbündel“.
- Der Rest des zweiten Abschnitts wurde zusammen mit dem dritten Abschnitt „Der Levi-Cevita Zusammenhang“ und vierten Abschnitt „Krümmungsgrößen“ zum Abschnitt IX.2, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten & -Krümmung“.
- Der letzte Abschnitt „Geodätische“ wurde neu formuliert in den gleichnamigen Abschnitt IX.3, „Geodätische“ übernommen.
- Das vierte Kapitel „Äußere Ableitung und Differentialformen“ wurde zerlegt und entsprechend der darin enthaltenden Thematiken auf die passenden Kapitel aufgeteilt. Es wurde
 - der erste Abschnitt „Lineare Algebra Wiederholung – abstrakte Begriffe“ in den Abschnitt A.2 verschoben.
 - der zweite Abschnitt „Bündelfizierung von Kapitel 4.1“ in Abschnitt IV.2 im Kapitel IV im Teil I eingebaut.
 - der dritte Abschnitt „Äußere Ableitung“ auf Abschnitt VI.1, „Äußere Ableitung“ und Abschnitt VI.2, „Vektorbündelwertige äußere Ableitung“ im Kapitel VI, „Äußere Ableitung“ aufgeteilt.
 - der vierte Abschnitt „Anwendungen der äußeren Ableitung Vektorbündelwertiger k -Formen“ entsprechend der Thematik in die Abschnitte VI.3, „Anwendungen der äußeren Ableitung“ und VI.4, „Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe“ im Kapitel VI, „Äußere Ableitung“ zerteilt. Dabei wurde Abschnitt VI.4, „Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe“ um alle Grundlagen über „Lie-Algebren“ erweitert, die im Mitschrieb der Differentialgeometrie I Vorlesung des Sommersemesters 2009 von FLORIAN BECK zu finden waren.
 - der fünfte Abschnitt „Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie“ im Abschnitt IX.4 in das Kapitel IX, „Riemannsche Mannigfaltigkeiten“ ein- und die Beweise etwas ausgearbeitet. Weiter wurden die Aussagen über zweite Fundamentalform, Weingartenoperator von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n auf solche beliebiger Riemannscher Manigfaltigkeit verallgemeinert.
- Das fünfte Kapitel „Integration auf Mannigfaltigkeiten“ wurde in Kapitel VII, „Integration“ ausgearbeitet. Dabei wurde lediglich innerhalb der einzelnen Abschnitte eine leichte Umsortierung, Korrektur etc. vorgenommen.
- Die ersten drei Abschnitte „Homotopieinvarianz“, „Die Mayer-Victoris-Sequenz“ und „Abbildungsgrad“ des sechsten Kapitels „Kohomologieberechnung“ wurden im Kapitel VIII, „Cohomologie“ in Abschnitt VIII.1, „Homotopieinvarianz“, Abschnitt VIII.2, „Mayer-Victoris-Sequenz“ und Abschnitt VIII.3, „Abbildungsgrad“ eingearbeitet.

Der vierte und letzte Abschnitt „Hodge-Theorie“ des sechsten Kapitels „Kohomologieberechnung“ wurde in den Abschnitt X.1, „Der Hodge- \star -Operator“ im Kapitel X, „Hodge Theorie und Differentialoperatoren“ verschoben. Dabei wurden ein paar Grundlagen in den Anhang ausgelagert.

- Das siebte Kapitel „Differentialoperatoren“ wurde ebenfalls in Kapitel X, „Hodge Theorie und Differentialoperatoren“ eingebaut. Dabei wurden die Grundlagen in den Appendix Abschnitt B.3, „Differentialgleichungen“ verschoben und daher wurden das gesamte Kapitel, d.h. die drei Abschnitte „Der Laplace Operator“, „Lineare Differential Operatoren auf Mannigfaltigkeiten“ und „Lineare elliptische Operatoren“ zu dem Abschnitt X.2, „Lineare Differential Operatoren“ zusammengefügt. Nur das „Theorem von de Rham und Hodge“ sowie die „Poincaré Dualität“ wurden dabei in den eigenen Abschnitt X.3, „Poincaré-Dualität“ ausgelagert.

Wie die original Mitschriebe erhebt auch dieses Scriptum definitiv keinen Anspruch auf Richtigkeit, Vollständigkeit oder sonst irgendetwas. Es ist *nicht* durch PROF. PEDIT autorisiert.

Bei Fragen, Wünschen oder Verbesserungsvorschlägen freue ich mich über jede E-Mail an studium@phoenixes.de.

Vielen Dank!
CHRISTOPHER R. NERZ

Inhaltsverzeichnis – Differentialgeometrie II

VI.	Äußere Ableitung	119
VI.1.	Äußere Ableitung	119
VI.2.	Vektorbündelwertige äußere Ableitung	123
VI.3.	Anwendungen der äußeren Ableitung	126
VI.4.	Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe	127
VII.	Integration	133
VII.1.	Orientierung	133
VII.2.	Integration	137
VII.3.	Mannigfaltigkeiten mit Rand und der Satz von Stokes	140
VIII.	Cohomologie	147
VIII.1.	Homotopieinvarianz	147
VIII.2.	Mayer-Vietoris-Sequenz	152
VIII.3.	Abbildungsgrad	158
IX.	Riemannsche Mannigfaltigkeiten	163
IX.1.	Riemannsche Vektorbündel	163
IX.2.	Riemannsche Mannigfaltigkeiten & - Krümmung	167
IX.3.	Geodätische	177
IX.4.	Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie	185
X.	Hodge Theorie und Differentialoperatoren	195
X.1.	Der Hodge- \star -Operator	196
X.2.	Lineare Differential Operatoren	200
X.3.	Poincaré-Dualität	205

Kapitel VI.

Äußere Ableitung

VI.1. Äußere Ableitung

VI.1.1 Motivation (Für die äußere Ableitung)

Ist $f \in \Omega^0(M)$ eine 0-Form auf einer Mannigfaltigkeit M , so ist $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ eine glatte Funktion. Insbesondere ist $df : TM \rightarrow \mathbb{K}$ linear und glatt, also gilt $df \in \Omega^1(M)$. In dieser Interpretation ist die Ableitung einer 0-Form eine 1-Form.

VI.1.2 Satz und Definition (Äußere Ableitung)

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so gibt es genau eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$$

mit

1. d erhöht den Grad um eins, d. h. $d(\Omega^k) \subseteq \Omega^{k+1}$
2. $d \circ d = d^2 \equiv 0$
3. d erfüllt die *Leibnizregel*: $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$
4. $d|_{\Omega^0}$ ist die gewöhnliche Ableitung von Funktionen.

Diese Abbildung d heißt *äußere Ableitung* (oder *Cartan Ableitung*) und ist eine lokale Abbildung, d. h.

$$\omega|_U = \eta|_U \implies (d\eta)|_U = (d\omega)|_U \quad \forall \eta, \omega \in \Omega^\bullet(M).$$

BEWEIS

Lokalität: Mit der geforderten Linearität gilt die Lokalität genau dann, wenn $\omega|_U = 0$ bereits $d\omega|_U = 0$ impliziert. Sei also $\omega \in \Omega^k(M)$ eine beliebige k -Form für die eine offene Menge $U \subseteq M$ mit $\omega|_U \equiv 0$ existiert. Nun wählen wir für einen beliebigen Punkt $p_0 \in U$ eine glatte Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(p_0) = 0$ und $\varphi|_{M \setminus U} \equiv 1$. Insbesondere ist $\omega = \varphi\omega$ und daher gilt $d\omega_{p_0} = d\varphi_{p_0} \wedge \omega + \varphi(p_0) d\omega_{p_0} = 0$.

Eindeutigkeit: Da d nach dem ersten Schritt eine lokale Abbildung ist, genügt es die lokale Eindeutigkeit zu zeigen und damit genügt es eine lokale Formel für d herzuleiten: Sei $\omega \in \Omega^k$ beliebig, also gilt lokal für eine Karte (U, x) von M immer $\omega|_U = \omega_I dx^I$, wobei wir über alle k -dimensionalen Multiindizes I summieren. Aufgrund der Forderungen 3 und 2 gilt¹

$$d\omega|_U = d(\omega|_U) = df_I \wedge dx^I + f_I \underbrace{d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})}_{\text{nach Forderung =0}} = df_I \wedge dx^I. \quad (\text{VI.1})$$

Also ist d , falls es existiert, von dieser Form. Insbesondere ist dies mit 4 eindeutig.

Existenz: Für die Existenz betrachten wir (VI.1) und zeigen, dass wenn wir d lokal so definieren, dieses die geforderten Eigenschaften hat und wohldefiniert ist. Dass diese Definition von d wohldefiniert ist, also nicht von der Kartenwahl abhängt, wird implizit im Beweis der Cartan Formel, Lemma VI.1.6 bewiesen und daher hier nicht explizit nachgerechnet.

Dass das so definierte d linear ist, den Grad um eins erhöht und auf 0-Formen, d. h. Funktionen, der gewöhnlichen Ableitung entspricht, ist per Definition klar. Für $d^2 \equiv 0$ betrachten wir für $\omega \in \Omega^k(M)$ und die lokale Darstellung $\omega = f_I dx^I$

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df_I \wedge dx^I) = d\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^I\right) \\ &= \left(\underbrace{d\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^k}\right)}_{=\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} dx^l} \wedge dx^k\right) \wedge dx^I + \frac{\partial f_I}{\partial x^l} dx^k \wedge \underbrace{(d1)}_{=0} \wedge dx^I \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f_I}{\partial x^k \partial x^l} dx^l \wedge dx^k}_{\text{schief symmetrisch}}\right) \wedge dx^I = 0 \end{aligned}$$

Für die Leibnizregel betrachten wir wiederum lokal $\omega = f_I dx^I$ und $\eta = g_J dx^J$ und erhalten per Definition des Wedge-Produktes² $\omega \wedge \eta = f_I g_J dx^I \wedge dx^J$, also gilt mit der Produktregel beim Ableiten von Funktionen für $|I| = \text{deg } \omega$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(f_I g_J dx^I \wedge dx^J) = d(f_I g_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= g_J df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + f_I dg_J \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d(f_I dx^I) \wedge (g_J dx^J) + (-1)^{|I|} (f_I dx^I) \wedge (dg_J \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta, \end{aligned} \quad ///$$

¹Auch dies fassen wir als Produkt auf über welches summiert wird.

²Achtung: I und J summieren nicht notwendig über gleiche Indeces. Ersatzweise kann diese Rechnung nur für ein f und ein g durchgeführt werden und die allgemeine Aussage folgt durch die Linearität.

VI.1.3 Bemerkung

Wir folgern, dass $(\Omega^\bullet(M), d)$ ein *Komplex* ist, d. h. für $d_k = d|_{\Omega^k}$ gilt $\Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m$ mit $d_{k+1} \circ d_k \equiv 0$. Gewöhnlicherweise werden d_0, d_1, \dots wie oben in der Definition mit d bezeichnet.

VI.1.4 Definition (Geschlossene und exakte k -Formen)

Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$. Sie heißt *exakt*, falls $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Da $d^2 \equiv 0$ gilt, sind exakte Formen insbesondere geschlossen.

VI.1.5 Schreibweise

Sind x_1, \dots, x_n beliebige Objekte, so schreiben wir $(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n)$ für das $n - 1$ -Tupel $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Des Weiteren schreiben wir für eine Karte (U, x) und einen Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ kurz dx^I für $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

VI.1.6 Lemma (Cartan Formel für die äußere Ableitung)

Ist $\omega \in \Omega^k(M, \mathbb{K})$ eine k -Form auf einer Mannigfaltigkeit M mit einem torsionsfreien Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf TM und sind $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder, so gilt³

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \bullet \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Hierbei ist ∇ der von $\tilde{\nabla}$ induzierte Zusammenhang auf $\text{Alt}^k(TM, \mathbb{K})$.

BEWEIS

Wir zeigen dies, indem wir zeigen, dass die mittels der ersten Gleichung definierte Abbildung d die Voraussetzungen an die äußere Ableitung erfüllt und somit gleich der äußeren Ableitung ist, da diese nach Satz VI.1.2 eindeutig ist. Daher bezeichne d für den Rest des Beweises die so definierte Abbildung.

Wohldefiniertheit: Wir müssen also zeigen, dass $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ wohldefiniert ist, also punktweise für Tangentialvektoren $\xi_i \in T_p M$ statt für Vektorfelder definiert werden kann. Dies folgt jedoch aus der zweiten Gleichheit, also genügt es dafür diese zu zeigen.

³Wir bemerken, dass diese Summen nicht weggelassen werden können, da in der Einstein-Notation *nicht* über Potenzen i summiert wird.

Dieser erste Teil des Beweises war eine Übungsaufgabe.

Zweite Gleichung: Seien $\omega \in \Omega^k(U)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ beliebig. Wir erhalten per Definition und da ω alternierend ist

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (X_i \bullet \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ & \quad - \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j < i} (-1)^j \omega(\nabla_{X_i} X_j, X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ & \quad - \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j > i} (-1)^{j-1} \omega(\nabla_{X_i} X_j, X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (X \bullet \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ & \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i, X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Also ergibt die Torsionsfreiheit die behauptete zweite Gleichheit.

Erste Gleichung: Die Linearität ist klar, ebenso wie die Erhöhung des Grades. Es verbleibt zu zeigen, dass die Cartan-Formel lokal Gleichung (VI.1) impliziert, welches die restlichen Eigenschaften erfüllt. Dass eine Lokalisierung der Cartan-Formel möglich ist, ist offensichtlich, da diese durch Ableitungen definiert ist.

Wir betrachten eine Karte (U, x) , $\omega = f_J dx^J$, wobei $J = (j_1, \dots, j_k)$ und erinnern daran, dass $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$. Setzen wir dies nun in die Formel ein, so erhalten wir für $i_0 < \dots < i_n$

$$\begin{aligned} & d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \cdot \left(f_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \right) \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{\partial f_J}{\partial x^{i_l}} \delta_{(i_0, \dots, \widehat{i_l}, \dots, i_k)}^{(j_1, \dots, j_k)}. \end{aligned}$$

Andererseits liefert (VI.1)

$$d\omega = df_I \wedge dx^J = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J$$

also wieder für $i_0 < \dots < i_n$

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_J}{\partial x^i} \underbrace{dx^i \wedge dx^J}_{|\cdot| = \delta_{(i_0, \dots, i_k)}^{(j_1, \dots, j_k)}} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x^{i_l}}.$$

Somit sind diese Gleichungen lokal identisch. Alle weiteren Fälle ergeben sich durch diesen, da ω anti-symmetrisch und linear ist. ///

VI.1.7 Beispiel (für die Anwendung der Formel)

Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist

$$d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) = (\nabla_X \omega)Y - (\nabla_Y \omega)X.$$

VI.1.8 Lemma (Pull-Back der äußeren Ableitung)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N , so kommutiert der Pull-Back f^* mit den äußeren Ableitung, d. h. es gilt $d_M \circ f^* = f^* \circ d_N$, d. h.

War Teil von Lemma
VI.1.6

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) \quad \forall \omega \in \Omega^k(N).$$

BEWEIS

Es genügt wiederum die lokale Betrachtung, also sei $\omega = h_I dx^I$. Es folgt mit der Kettenregel

$$f^*\omega = h_I \circ f \cdot \left((dx^{i_1} \circ df) \wedge \dots \wedge (dx^{i_k} \circ df) \right) = h_I \circ f d(x \circ f)^I$$

und somit gilt

$$d(f^*\omega) = d(h_I \circ f) \wedge d(x \circ f)^I.$$

Nun folgt die Aussage, da wiederum unter Anwendung der Kettenregel gilt

$$f^* d\omega = f^* (dh_I \wedge dx^I) = (dh_I \circ df) \wedge (dx^I \circ df) = d(h_I \circ f) \wedge d(x \circ f)^I. \quad ///$$

VI.2. Vektorbündelwertige äußere Ableitung

Wir verallgemeinern dies nun weitem, indem wir nicht nur den Zielraum \mathbb{R} , sondern ein beliebiges Vektorbündel betrachten.

VI.2.1 Satz und Definition (Äußere Ableitung)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ über einer glatten Mannigfaltigkeit M , so gibt es genau eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$\mathcal{D} : \Omega^\bullet(M; E) \rightarrow \Omega^\bullet(M; E)$$

mit

1. \mathcal{D} erhöht den Grad um eins, d. h. $\mathcal{D}(\Omega^k(M; E)) \subseteq \Omega^{k+1}(M; E)$;

2. $\mathcal{G}d \circ \mathcal{G}d = (\mathcal{G}d)^2 \equiv \nabla \mathcal{R} \wedge \cdot$, wobei hier \wedge das Wedge-Produkt über der natürlichen Paarung von $\text{End } E \times E \rightarrow E$ ist, d. h. $\mathcal{G}d(\mathcal{G}d\omega) = \nabla \mathcal{R} \wedge \omega$;
3. $\mathcal{G}d$ erfüllt die *Bianchi Identität*: $\mathcal{G}d \nabla \mathcal{R} = 0$ bzw. $(\mathcal{G}d)^3 = 0$;
4. $\mathcal{G}d$ erfüllt die Leibnizregel über $\Omega^\bullet(M) \times \Omega^\bullet(M; E)$, d. h.

$$\mathcal{G}d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathcal{G}d\omega;$$

5. $d|_{\Omega^0}$ ist der Zusammenhang ∇ von Schnitten $\Gamma(E) = \Omega^0(E)$.

Diese Abbildung $\mathcal{G}d$ heißt *äußere Ableitung* und ist eine lokale Abbildung, d. h.

$$\omega|_U = \eta|_U \implies (\mathcal{G}d\eta)|_U = (\mathcal{G}d\omega)|_U \quad \forall \eta, \omega \in \Omega^\bullet(M; E).$$

Außerdem erfüllt $\mathcal{G}d$ die verallgemeinerte *Cartan-Formel*, d. h. für eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M; E)$ und Vektorfelder $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$(\mathcal{G}d\omega)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \nabla_{X_i} \left(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \right) \quad (\text{VI.2})$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k)$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\tilde{\nabla}_{X_i} \omega \right) (X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k), \quad (\text{VI.3})$$

wobei $\tilde{\nabla}$ der Zusammenhang auf $\Omega^k(E)$ ist, der von dem Zusammenhang ∇ auf E und einem torsionsfreien Zusammenhang ∇^M auf dem Tangentialbündel TM von M induziert wird.

BEWEIS

Der größere Teil des Beweis verläuft wie bei Satz und Definition VI.1.2 bzw. Lemma VI.1.6, entsprechend wird dies nicht wiederholt. wiederum definieren wir $\mathcal{G}d$ durch die (verallgemeinerte) Cartan-Formel und rechnen dies lokal für $\omega = \psi_I dx^I \in \Omega^k(U, E)$ und $\psi \in \Gamma(U, E)$ in einer Karte (U, x) von M nach und erhalten wiederum die *Produktregel*

$$\mathcal{G}d\omega|_U = d(\omega|_U) = \nabla \psi_I \wedge dx^I. \quad (\text{VI.4})$$

Interessant ist noch der Beweis von „2.“, für den wir beachten, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{G}d(\mathcal{G}d\omega) &= \mathcal{G}d \underbrace{(d\psi_I)}_{=\nabla \psi_I} \wedge dx^I + \mathcal{G}d\psi \wedge \underbrace{d^2 x^I}_{=0} = \mathcal{G}d(\nabla \psi_I \wedge dx^I) \\ &\stackrel{!}{=} \nabla \mathcal{R} \psi \wedge dx^I = \nabla \mathcal{R} \wedge (\psi dx^I) = \nabla \mathcal{R} \wedge \omega, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass mit der verallgemeinerten Cartan-Formel, Gleichung (VI.2) für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\mathcal{L}d(\nabla\psi))(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y\psi) - \nabla_Y(\nabla_X\psi) - \nabla_{[X, Y]}\psi = \nabla\mathcal{R}(X, Y)\psi$$

gilt.

///

VI.2.2 Bemerkung

Satz und Definition VI.1.2 zusammen mit der Cartan Formel, Lemma VI.1.6 ist ein Spezialfall von diesem Satz und Definition VI.2.1 für $E = M \times \mathbb{K}$ und den trivialen Zusammenhang $\nabla = d$.

Im Allgemeinen ist $(\mathcal{L}d)^2 \neq 0$, außer der Zusammenhang ist flach, dann ist aber $E \cong M \times \mathbb{K}^r$ mit $\nabla \cong d$.

VI.2.3 Satz (Ultimate Produktregel)

Für eine parallele Paarung $b \in \text{Bil}(E_1, E_2; F)$ von Vektorbündeln $E_1, E_2, F \rightarrow M$ mit Zusammenhängen ∇^1, ∇^2 und ∇ über einer Mannigfaltigkeit M gilt

$$\mathcal{L}d(b(\omega_1 \wedge \omega_2)) = b(\nabla^1 d\omega_1 \wedge \omega_2) + (-1)^{\deg \omega_1} b(\omega_1 \wedge \nabla^2 d\omega_2) \quad \forall \omega_i \in \Omega^\bullet(E_i),$$

wobei $b(\omega_1 \wedge \omega_2) \in \omega_1^{\deg \omega_1 + \deg \omega_2}(F)$ wie in Definition B.2.8 definiert ist.

BEWEIS

Wir erkennen, dass lokal wie in 3. von Bemerkung B.2.9 per Definition für $\omega = \psi_I dx^I$ und $\eta = \tilde{\psi}_J dx^J$ mit $\psi_I \in \Gamma(U; E_1)$ und $\tilde{\psi}_J \in \Gamma(U; E_2)$ und eine Karte (U, x) von M

$$b(\omega \wedge \eta) = b(\psi_I dx^I \wedge \tilde{\psi}_J dx^J) = \underbrace{b(\psi_I, \tilde{\psi}_J)}_{\in \Gamma(U; E)} dx^I \wedge dx^J$$

gilt. Somit folgt mit der Parallelität von b und Gleichung (VI.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}db(\omega \wedge \eta) &= \left(\nabla \left(b(\psi_I, \tilde{\psi}_J) \right) \right) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \left(b(\nabla^1 \psi_I, \tilde{\psi}_J) + b(\psi_I, \nabla^2 \tilde{\psi}_J) \right) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= b(\nabla^1 \psi_I dx^I \wedge \tilde{\psi}_J dx^J) + (-1)^{\deg \omega} b(\psi_I dx^I \wedge \nabla \tilde{\psi}_J \wedge dx^J) \\ &= b(\nabla^1 d\omega \wedge \eta) + (-1)^{\deg \omega} b(\omega \wedge \nabla^2 d\eta). \end{aligned} \quad ///$$

VI.2.4 Bemerkung

Für $E_1 = E_2 = E = M \times \mathbb{K}$, $\nabla = \nabla^1 = \nabla^2 = d$ und b Multiplikation in \mathbb{K} , ergibt dies die ein-dimensionale Produktregel. Dagegen ergibt sich für $E_1 = M \times \mathbb{K}$ mit $\nabla^1 = d$, $E_2 = E$ und der Skalarmultiplikation b die Produktregel aus VI.2.1, Gleichung (VI.4).

VI.3. Anwendungen der äußeren Ableitung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Verhalten unter *Umeichung*, d. h. wenn wir statt eines Zusammenhangs ∇ auf einem Vektorbündel E den Zusammenhang $\nabla + \eta$ betrachten, wobei $\eta \in \Omega^1(E)$.

VI.3.1 Lemma

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ und $\eta \in \Omega^1(\text{End } E)$ eine End E -wertige 1-Form, so gilt

$$\nabla^{+\eta} d\omega = \mathcal{L}d\omega + \eta \wedge \omega \quad \forall \omega \in \Omega^\bullet(E),$$

wobei \wedge das \wedge -Produkt über der natürlichen Paarung von $\text{End } E$ und E bezeichnet.

BEWEIS

Da die äußere Ableitung eine lokale Eigenschaft ist und lokal durch die Koordinatenvektorfelder paarweise kommutierende, den Tangentialraum aufspannende Vektorfelder gegeben sind, genügt es die Gleichung für paarweise kommutierende Vektorfelder $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ zu zeigen. Für diese gilt mit zweifacher Anwendung der Cartan-Formel VI.2.1, Gleichung (VI.3)

$$\begin{aligned} (\nabla^{+\eta} d\omega)(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla + \eta)_{X_i} \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + (-1)^i \eta(X_i) \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &= (\mathcal{L}d\omega + \eta \wedge \omega)(X_0, \dots, X_k), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt nur die Definition des \wedge -Produktes verwendet haben. ///

VI.3.2 Theorem (Krümmungsänderung bei Zusammenhangsänderung)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇ und $\omega \in \psi^1(\text{End } E)$ eine End E -wertige 1-Form, so gilt

$$\nabla^{+\omega} \mathcal{R} = \nabla \mathcal{R} + \mathcal{L}d\omega + \omega \wedge \omega.$$

BEWEIS

Da nach Bedingung 2. aus der Definition der äußeren Ableitung VI.2.1 $(\mathcal{L}d)^2 \equiv \nabla \mathcal{R}$ gilt,

Fehlte.

folgt mit Lemma VI.3.1 und der Produktregel, Satz VI.2.3 für $\psi \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} \nabla^{+\omega} \mathcal{R}\psi &= \left(\nabla^{+\omega} d \right)^2 \psi = (\mathcal{G}d + \omega \wedge \cdot) \circ (\mathcal{G}d\psi + \omega \wedge \psi) \\ &= (\mathcal{G}d)^2 \psi + \omega \wedge (\mathcal{G}d\psi) + \mathcal{G}d(\omega \wedge \psi) + \omega \wedge (\omega \wedge \psi) \\ &= \nabla \mathcal{R}\psi + (\mathcal{G}d\omega) \wedge \psi + (\omega \wedge \omega)(\psi) = \left(\nabla \mathcal{R} + \mathcal{G}d\omega + \omega \wedge \omega \right) \psi, \end{aligned}$$

wobei wir mehrfach die Definition des Wedge-Produktes über der natürlichen Paarung verwendet haben. ///

VI.3.3 Bemerkung (Lokale Darstellung der Krümmung)

Wählen wir für ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ eine lokale Trivialisierung $\Phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$, so gilt für die Zusammenhangs-1-Form $\psi \in \text{End}(E|_U)$ bereits $\nabla = \Phi^* d + \psi$, also

Eingefügt

VI.4. Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

VI.4.1 Definition (Lie-Algebra)

Dein Paar $(V, [\cdot, \cdot])$ heißt \mathbb{K} -Lie-Algebra, falls L ein \mathbb{K} -Vektorraum und $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung ist, die die *Jacobi-Identität* erfüllt, d. h.

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in L.$$

Der gesamte Abschnitt ist neu eingefügt & geTeXt und basiert auf Mitschriften von FLORIAN BECK der Differentialgeometrie I Vorlesung von PROF. PEDIT im Sommersemester 2009 in der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

VI.4.2 Beispiel (Matrizen Lie-Algebra)

Das klassistische Beispiel für eine Lie-Gruppe sind die Matrizen $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, mit der Kommutante

$$[X, Y] := X \cdot Y - Y \cdot X \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n).$$

VI.4.3 Definition (Links-Invarianz)

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ auf einer Lie-Gruppe \mathcal{G} heißt *links-invariant*, falls es unter dem Pushforward aller links-Multiplikationen aller Gruppenelemente invariant ist, d. h.

$$\lambda_g^* X = X \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad \text{d. h.} \quad D_h \lambda_g(X_h) = X_{gh} \quad \forall g, h \in \mathcal{G}$$

VI.4.4 Bemerkung

Ist $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ ein links-invariantes Vektorfeld auf einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , so ist dies durch seinen Wert $X_{1_{\mathcal{G}}}$ im neutralen Element $1_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ charakterisiert, da nach Voraussetzung

$$X_g = X_{1_{\mathcal{G}}g} = D_{1_{\mathcal{G}}} \lambda_g(X_{1_{\mathcal{G}}}) \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

VI.4.5 Schreibweise (Link-Invariante Vektorfelder)

Es bezeichnet

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G}) \mid X \text{ links-invariant}\}$$

die links-invarianten Vektorfelder einer Lie-Gruppe \mathcal{G} .

VI.4.6 Satz

Die Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G} : X \mapsto X_{1_{\mathcal{G}}}$ ist für die links-invarianten Vektorfelder \mathfrak{g} einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ein \mathbb{R} -Isomorphismus.

BEWEIS

Dass dies eine lineare Abbildung ist, ist klar. Ist für ein links-invariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ das Bild unter dieser Abbildung 0, d. h. X_0 , so folgt wie in der Bemerkung VI.4.4, dass $X = 0$. Damit ist diese Abbildung injektiv.

Glattheit bewiesen

Ist $\xi \in T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G}$ beliebig, so definieren wir

$$X_g := (D_{1_{\mathcal{G}}}\lambda_g)(\xi)$$

und erkennen $X = D_{\cdot, 1_{\mathcal{G}}}((g, h) \mapsto gh)(\xi, 0)$. Also ist X als Ableitung einer glatten Abbildung glatt, wobei wir verwenden dass die Wirkung $(g, h) \mapsto gh$ nach Voraussetzung glatt ist. Des Weiteren erhalten wir mit der Kettenregel

$$D_h\lambda_g X_h = D_h\lambda_g D_{1_{\mathcal{G}}}\lambda_h(\xi) = D_{1_{\mathcal{G}}}\underbrace{(\lambda_g \circ \lambda_h)}_{=\lambda_{gh}}(\xi) = X_{gh},$$

also ist $X \in \mathfrak{g}$ link-invariant. Außerdem wird X per Konstruktion auf ξ abgebildet. Da $\xi \in T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G}$ beliebig war, folgt die Surjektivität. ///

VI.4.7 Bemerkung

Wir erkennen für den Push-Forward $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ eines Diffeomorphismuses $\Phi : M \rightarrow N$, d. h.

$$(\Phi_* X)_q = D_{\Phi^{-1}(q)}\Phi(X_{\Phi^{-1}(q)}) \in T_q N \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), q \in N$$

dass für den Kommutator $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ von Vektorfeldern $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

und alle Funktionen $g \in C^\infty(N)$ bereits

$$\begin{aligned}
 \Phi_*([X, Y])_p \bullet g &= D_{\Phi^{-1}(p)}\Phi\left([X, Y]_{\Phi^{-1}(p)}\right) \bullet g = [X, Y]_{\Phi^{-1}(p)} \bullet (g \circ \Phi) \\
 &= X_{\Phi^{-1}(p)} \bullet (Y \bullet (g \circ \Phi)) - Y_{\Phi^{-1}(p)} \bullet (X \bullet (g \circ \Phi)) \\
 &= X_{\Phi^{-1}(p)} \bullet (D_{\Phi^{-1} \circ \Phi}\Phi(Y) \bullet g) - Y_{\Phi^{-1}(p)} \bullet (D_{\Phi^{-1} \circ \Phi}\Phi(X) \bullet g) \\
 &= X_{\Phi^{-1}(p)} \bullet \left((D_{\Phi^{-1}(\cdot)}\Phi(Y) \bullet g) \circ \Phi \right) \\
 &\quad - Y_{\Phi^{-1}(p)} \bullet \left((D_{\Phi^{-1}(\cdot)}\Phi(X) \bullet g) \circ \Phi \right) \\
 &= X_{\Phi^{-1}(p)} \bullet ((\Phi_*Y \bullet g) \circ \Phi) - Y_{\Phi^{-1}(p)} \bullet ((\Phi_*X \bullet g) \circ \Phi) \\
 &= \Phi_*X \bullet (\Phi_*Y \bullet g) - \Phi_*Y \bullet (\Phi_*X \bullet g) = [\Phi_*X, \Phi_*Y]_p \bullet g
 \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit wegen habe ich die Rechnung eingefügt.

gilt.

VI.4.8 Lemma und Definition (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe)

Die links-invarianten Vektorfelder \mathfrak{g} einer Lie-Gruppe \mathcal{G} bilden mit dem $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ -Kommutator eine Lie-Algebra. Daher heißt \mathfrak{g} die *Lie-Algebra der Lie-Gruppe \mathcal{G}* .

BEWEIS

Sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ links-invariante Vektorfelder und $g \in \mathcal{G}$ ein Element der Lie-Gruppe, so gilt per Definition $\lambda_g^*X = X$ und $\lambda_g^*Y = Y$ und mit der Bemerkung VI.4.7 erhalten wir

$$\lambda_g^*([X, Y]) = [\lambda_g^*X, \lambda_g^*Y] = [X, Y].$$

Damit ist die Aussage gezeigt. ///

VI.4.9 Bemerkung

Mit Lemma VI.4.8 und Satz VI.4.6 erkennen wir, dass die Lie-Algebra \mathfrak{g} einer Lie-Algebra \mathcal{G} eine Lie-Algebra der gleichen Dimension $\dim \mathcal{G}$ wie die Lie-Gruppe – letzteres als Mannigfaltigkeits-Dimension – ist. Wir können nun mittels Satz VI.4.6 eine Lie-Klammer

$$[\cdot, \cdot] : T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G} \times T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G} \rightarrow T_{1_{\mathcal{G}}}\mathcal{G} : (\xi, \zeta) \mapsto \left[D_{1_{\mathcal{G}}}\lambda_{(\cdot)}(\xi), D_{1_{\mathcal{G}}}\lambda_{(\cdot)}(\zeta) \right]_{1_{\mathcal{G}}}$$

auf $T_{1_{\mathcal{G}}}$ einführen und damit wird die Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow T_{1_{\mathcal{G}}} : X \mapsto X_{1_{\mathcal{G}}}$ ein Lie-Algebren Isomorphismus und interpretieren daher \mathfrak{g} oft als Tangentialraum von \mathcal{G} in $1_{\mathcal{G}}$.

VI.4.10 Beispiel (Die Lie-Algebra des \mathbb{R}^n)

Sei die Lie-Gruppe $\mathcal{G} := (\mathbb{R}^n, +)$ der euklidische Raum mit der gewöhnlichen Addition. Insbesondere können wir $T_p\mathbb{R}^n$ mit \mathbb{R}^n identifizieren, vermöge $\xi \mapsto d/ds(p + s\xi)$. Damit ist ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ genau dann links-invariant, falls

$$X_{p+x} = X_{\lambda_p x} = (D\lambda_x)_p X_p = \text{id}_p X_p = X_p.$$

Also ist dies genau dann der Fall, wenn $X \equiv X_0$ konstant ist. Offensichtlich kommutieren jedoch zwei Vektorfelder, falls sie konstant sind, d. h. $X, Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{R}^n, +)$ impliziert $[X, Y] = 0$. Also ist $\mathfrak{g}(\mathbb{R}^n, +) \cong (\mathbb{R}^n, 0)$.

VI.4.11 Beispiel (Die Lie-Algebra der $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$)

Sei die Lie-Gruppe $\mathcal{G} := (\text{GL}(\mathbb{R}^n), \cdot)$, die Gruppe der invertierbaren Matrizen. Insbesondere ist $\mathcal{G} = \text{GL}(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{gl}(\mathbb{R}^n)$ offen, also auch $T_{\text{id}_n} \mathcal{G} = \text{gl}(\mathbb{R}^n)$. Ist also $A \in T_{\text{id}_n} \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ ein beliebiger Tangentialvektor in id_n und $X_A = D_{\text{id}_n} \lambda_{(\cdot)} A$ das zugehörige links-invariante Vektorfeld auf $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle Punkte $x \in \mathcal{G} = \text{GL}(\mathbb{R}^n)$

$$(X_A)_x = D_{\text{id}_n} \lambda_x A = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} x(\text{id}_n + sA) = xA.$$

Also gilt in in Koordinatendarstellung für $(X_A)_x = xA \in T_{\text{id}_n} \text{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(X_A)_x = xA = x_k^i a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}.$$

Somit erhalten wir für zwei Tangentialvektoren $A, B \in T_{\text{id}} \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ für die durch $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ induzierte Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [A, B] &= \left[x_k^i a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}, x_m^l b^{mn} \frac{\partial}{\partial x^{ln}} \right] \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= x_k^i a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} x_m^l b^{mn} \frac{\partial}{\partial x^{ln}} - x_m^l b^{mn} \frac{\partial}{\partial x^{ln}} x_k^i a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= x_k^i a^{kj} \delta_i^l \delta_{jm} b^{mn} \frac{\partial}{\partial x^{ln}} - x_m^l b^{mn} \delta_i^l \delta_{kn} a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= x_k^i a^{km} b_m^n \frac{\partial}{\partial x^{in}} - x_m^i b_m^n a^{nj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= x_k^i a^{km} b_m^j \frac{\partial}{\partial x^{ij}} - x_k^i b_m^k a^{nj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= x_k^i (a^{km} b_m^j - b_m^k a^{nj}) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \\ &= \delta_k^i (a^{km} b_m^j - b_m^k a^{nj}) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} = (a^{im} b_m^j - b_m^i a^{nj}) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \\ &= (A \cdot B - B \cdot A). \end{aligned}$$

Also gilt im Sinn einer Lie-Algebren Isomorphie $\mathfrak{g}(\text{GL}(\mathbb{R}^n)) = \text{gl}(\mathbb{R}^n)$ mit der gewöhnlichen Matrix Lie-Klammer.

VI.4.12 Beispiel (Die Lie-Algebra der $\text{SO}(\mathbb{R}^n)$)

Sei die Lie-Gruppe $\mathcal{G} := (\text{SO}(\mathbb{R}^n), \cdot)$, die Gruppe der speziellen, orthogonalen Matrizen und $A \in T_{\text{id}_n} \mathcal{G}$ ein Tangentialvektor an der Identität. Insbesondere gilt für eine Kurve $\alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\alpha(0) = \text{id}_n$ bereits $\alpha'(0) = A$. Per Definition der speziellen Orthogonalen Gruppe gilt also zu jedem Zeitpunkt $-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$ bereits $\text{id}_n = \alpha(s)^T \alpha(s)$. Insbesondere erhalten wir

$$0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\alpha(s)^T \alpha(s)) = \alpha'(0)^T \alpha(0) + \alpha(0)^T \alpha'(0) = A^T + A,$$

d. h. A ist anti-symmetrisch.

VI.4.13 Lemma

Ist $X \in \mathfrak{g}(\mathcal{G})$ ein links-invariantes Vektorfeld auf einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , so gibt es einen auf \mathbb{R} definierten Fluss zu X durch $1_{\mathcal{G}}$. Für solche Kurven gilt $\alpha(s + t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$.

BEWEIS

Ist $\alpha : (t_-; t_+) \rightarrow \mathcal{G}$ eine Lösungskurve, die nur auf einem endlichen Intervall definiert ist, mit $\alpha(0) = 1_{\mathcal{G}}$, so definieren wir für $g := \alpha(t_+/2)$

$$\beta : (t_-; t_+) \rightarrow \mathcal{G} : t \mapsto g \cdot \alpha(t) = \lambda_g(\alpha(t)).$$

Wir erkennen, dass auch dies eine Lösungskurve von X ist, und mit der Kettenregel folgt

$$\beta'(t) = (\lambda_g \cdot \alpha)'(t) = \lambda_g^*(\alpha'(t)) = \lambda_g^*(X_{\alpha(t)}) = X_{g\alpha(t)} = X_{\beta(t)}$$

und es gilt $\beta(0) = g\alpha(0) = g = \alpha(t_+/2)$. Damit ist

$$\tilde{\alpha} : \left(t_-; \frac{3}{2}t_+\right) \rightarrow \mathcal{G} : t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) & : t_- < t < t_+ \\ \beta\left(t - \frac{t_+}{2}\right) & : \text{sonst} \end{cases}$$

eine Lösungskurve von X zum Anfangswert $1_{\mathcal{G}}$, die auf einem größeren Intervall als α lebt und der „Vergrößerungsfaktor“ hängt nicht von den Grenzen von α ab. Damit lässt sich α auf ganz $(t_-; \infty)$ fortsetzen. Äquivalent erhalten wir eine Fortsetzung auf \mathbb{R} .

Wir haben dabei implizit erkannt, dass $\alpha(t + s) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$ gilt, indem wir nicht $t_+/2$, sondern einen anderen Zeitpunkt $s \in \mathbb{R}$ wählen. ///

VI.4.14 Definition (Exponential-Abbildung)

Die *Exponential-Abbildung* \exp einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ist durch

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G} : X \mapsto \alpha_X(1_{\mathcal{G}})$$

definiert, wobei α_g eine Lösungskurve des links-invarianten Vektorfelds $X \in \mathfrak{g}$ durch $g = 1_{\mathcal{G}}$ ist.

VI.4.15 Lemma (Maurer-Cartan Lemma)

Ist \mathcal{G} eine Lie-Gruppe und \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra der links-invarianten Vektorfelder und M eine einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit und gilt⁴ für eine Lie-Algebra-wertige 1-Form $\omega \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$ auf M

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]_{\mathfrak{g}} = 0,$$

⁴Dabei bezeichnet wie üblich $[\cdot \wedge \cdot]_{\mathfrak{g}}$ das \wedge -Produkt über der Bilinearform des Lie-Produkts $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$, also $[\omega \wedge \omega]_{\mathfrak{g}}(X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]_{\mathfrak{g}} - [\omega(Y), \omega(X)]_{\mathfrak{g}} = 2[\omega(X), \omega(Y)]_{\mathfrak{g}}$. Wir beachten, dass für Matrizen Lie-Algebren $\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = \omega \wedge \omega$ gilt, wobei wiederum auf der rechten Seite $\cdot \wedge \cdot$ das Wedge-Produkt über dem gewöhnlichen Matrizen-Produkt bezeichnet – oder allgemeiner gilt diese Gleichung, falls die Lie-Klammer der Kommutator einer Gruppenaktion ist.

Entstammt dem Mitschrieb der Differentialgeometrie II Vorlesung des Wintersemesters 2009/10.

so existiert eine Lie-Gruppen-wertige Abbildung $g \in C^\infty(M; \mathcal{G})$, welche die Gleichung $dg = \omega_g$ löst und diese Lösung ist bis auf Linksmultiplikation mit einer Konstanten $h \in \mathcal{G}$ eindeutig.

BEWEIS

Dies folgt durch Kartenwahl aus der Hinrichtung der letzten Formulierung des Maurer-Cartan Lemmas, Theorem V.3.16. ///

VI.4.16 Bemerkung

Ist $dg = g\omega$, dann ist

$$0 = d(dg) = d(g\omega) = dg \wedge \omega + g d\omega = g(\omega \wedge \omega + d\omega),$$

somit ist die Bedingung aus dem Lemma notwendig, das Lemma liefert, dass sie auch hinreichend ist.

Hier ist irgendwo ein Fehler drin – Selbst wenn wir annehmen, dass $dg \in \Omega^1(\mathfrak{g})$, d. h. die Werte von dg links-invariant sind, bleibt das Problem, was $g\omega$ bedeutet.

Kapitel VII.

Integration

Im folgenden Kapitel wollen wir nach der Differentiation auch die Integration aus dem euklidischen Raum auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dafür werden wir als erstes technisches Mittel die *Orientierung* benötigen.

VII.1. Orientierung

VII.1.1 Motivation

Aus dem Grundstudium der Analysis ist bekannt, dass für Diffeomorphismen $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Transformationsformel gilt, d. h. für eine Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^m)$ mit kompakten Träger gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(\varphi(x)) |d\varphi_x| dx.$$

Da dabei die ausgezeichnete Volumenform dx bzw. dy verwendet wird, erkennen wir sofort, dass man Funktionen nicht koordinatenunabhängig integrieren kann, da diese Volumenform Kartenabhängig wäre. Aber die Integranden sehen wie Ausdrücke einer m -Form in zwei verschiedenen Koordinaten aus, denn für jedes $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ und Koordinaten y auf \mathbb{R}^m existiert eine Funktion f so, dass

$$\omega = f(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m$$

und für einen Diffeomorphismus φ , also einen „Kartenwechsel“ bzw. Koordinatenwechsel, und die Koordinaten x mit $y = \varphi(x)$ gilt

$$\omega = f(\varphi(x)) \underbrace{\det(d\varphi_x)}_{\text{Jakobi-determinante}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Wir erkennen, dass sich die beiden Formeln lediglich durch Vorzeichen der Jakobdeterminante unterscheiden. Um eben diesen Unterschied entfernen zu können führen wir den Begriff der *Orientierung* – zunächst auf Vektorräumen – ein.

VII.1.2 Definition (Vektorraum Orientierung)

Zwei Basen \mathbf{v} und \mathbf{w} eines endlich dimensionalen Vektorraums V heißen *gleich orientiert*, in Symbolen $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$, falls ein Isomorphismus $A \in \text{Gl}(V)$ mit $\mathbf{w} = \mathbf{v}A$ und $\det A > 0$ existiert.

VII.1.3 Lemma

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum ist die „Gleichorientierung“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen \mathcal{B} zwei Äquivalenzklassen $\mathcal{B}/\sim = \{\pm O\}$ induziert.

BEWEIS

Dass dies eine Äquivalenzrelation ist, ist offensichtlich. Wählen wir Basis \mathbf{v} von V , so gilt für die Menge \mathcal{B} aller Basen von V

$$\mathcal{B} = \mathbf{v} \operatorname{Gl}(\dim V, \mathbb{R}).$$

Da die Determinantenabbildung $\det : \operatorname{Gl}(\dim V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, zerlegt sie die invertierbaren Matrizen

$$\operatorname{Gl}(\dim V, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) \dot{\cup} \det^{-1}(\mathbb{R}_{<0}) =: \operatorname{Gl}^+(\dim V, \mathbb{R}) \dot{\cup} \operatorname{Gl}^-(\dim V, \mathbb{R})$$

in zwei Zusammenhangskomponenten. Setzen wir $\mathcal{B}_{\pm} = \mathbf{v} \operatorname{Gl}^{\pm}(\dim V, \mathbb{R})$, so gilt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \dot{\cup} \mathcal{B}_-$. ///

VII.1.4 Definition (Orientierter Vektorraum)

Ein Paar (V, o_v) heißt *orientierter Vektorraum* und o_v dessen *Orientierung*, falls V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $o_v \in \mathcal{B}/\sim$ eine Restklasse der Menge aller Basen modulo der Äquivalenzrelation der Gleichorientierung ist.

VII.1.5 Definition (Orientierungserhaltend und -umkehrend)

Ein linearer Isomorphismus $T : (V, o_V) \rightarrow (W, o_W)$ zwischen zwei orientierten Vektorräumen heißt *orientierungserhaltend*, falls

$$T_* o_V := [T(\mathbf{v})] = o_W, \text{ wobei } [\mathbf{v}] = o_V$$

und sonst **orientierungsumkehrend*.

VII.1.6 Lemma und Definition (Orientierungsüberlagerung)

Ist $E \rightarrow M$ eine \mathbb{R} -Vektorbündel, so ist

$$\operatorname{Or}(E) := \bigcup_{p \in M} \operatorname{Or}(E_p),$$

wobei $\operatorname{Or}(E_p) = \{\pm o_{E_p}\}$, eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und eine 2-fache Überlagerung von M , vermöge $\operatorname{pr} : \operatorname{Or}(E) \rightarrow M : \pm o_{E_p} \mapsto p$. Diese heißt *Orientierungsüberlagerung* bezüglich E .

Für den Spezialfall des Tangentialbündels $E = TM$ heißt diese Überlagerung *Orientierungsüberlagerung* von M und wird mit $\operatorname{Or}(M) := \operatorname{Or}(TM)$ bezeichnet.

BEWEIS

Ist (U, x) eine Karte von M bezüglich der $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ trivialisert, so ist

$$\operatorname{Or}(E|_U) = \operatorname{Or}(E)|_U \cong U \times \{\pm o_{\mathbb{R}^r}\} \cong U \times \{0, 1\}$$

und damit eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und eine zweifache Überlagerung. ///

VII.1.7 Definition (Orientierbar)

Ein \mathbb{R} -Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt *orientierbar*, falls $\text{Or}(E) \rightarrow M$ einen C^∞ -Schnitt $\sigma : M \rightarrow \text{Or}(E)$ besitzt.

Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, falls TM orientierbar ist.

Anschaulich bedeutet dies, dass man Fasern von E kohärent orientieren kann.

VII.1.8 Beispiel

Wir betrachten das triviale Linienbündel $E = \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ über \mathcal{S}^1 . Es ist $\text{Or}(E) \cong \mathcal{S}^1 \dot{\cup} \mathcal{S}^1$, also können wir eine Orientierung wählen, d. h. E ist orientierbar.

Ein Gegenbeispiel der Orientierbarkeit ist das Möbiusbündel, Abbildung IV.2 auf Seite 78, bei dem $\text{Or}(E)$ zusammenhängend ist.

VII.1.9 Theorem (Charakterisierung von Orientierbarkeit)

Für ein \mathbb{R} -Vektorbündel $E^r \rightarrow M$ sind die Aussagen

1. E ist orientierbar, d. h. es existiert ein glatter Schnitt $o : M \rightarrow \text{Or}(E)$;
2. $\text{Or}(E) \cong M \dot{\cup} M$;
3. Es existiert ein Bündelatlas $\mathcal{A} = \{\Phi : E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r\}$ deren Überlagerungsfunktionen positive Determinante haben, das heißt

$$\det(\tilde{\Phi}_p \circ \Phi_p^{-1}) > 0 \quad \forall p \in U \cap \tilde{U}, \Phi, \tilde{\Phi} \in \mathcal{A};$$

4. Das Determinantenbündel $\Lambda^r E^* \cong M \times \mathbb{R}$ ist trivialisierbar, d. h. es existiert ein nirgends verschwindender Schnitt $\omega \in \Gamma(\Lambda^r E^*)$.

äquivalent.

BEWEIS

„1. \iff 2.“: Dies ist offensichtlich, da dann die „Identität“ in das erste der disjunkt vereinigten M glatt und wohldefiniert ist, bzw. weil ein zweiter Schnitt $\tilde{o} : M \rightarrow \text{Or}(M)$ existiert, der überall verschieden von o ist und sowohl \tilde{o} als auch o dann stetig sind und $o(M) \dot{\cup} \tilde{o}(M) = \text{Or}(M)$ erfüllen.

„1. \implies 3.“: Sei $o \in \Gamma(\text{Or}(E))$ der nach Voraussetzung existierende Schnitt. Desweiteren trivialisiere E über einer Überdeckung $\{U_i\}$ von M und $\Phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$ seien die zugehörigen Trivialisierungsabbildungen. Wir konstruieren nun Trivialisierungen mit der gewünschten Eigenschaft.

Gilt $(\Phi_i)_* o|_{U_i} \neq o|_{\mathbb{R}^r}$, wobei $o|_{\mathbb{R}^r}$ die natürliche euklidische Orientierung ist, so definieren wir $\tilde{\Phi}_i := (\Phi_{i2}, \Phi_{i1}, \Phi_{i3}, \Phi_{i4} \dots, \Phi_{ir})$ und sonst $\tilde{\Phi}_i := \Phi_i$, wobei $\Phi_i =$

Vervollständigt,
vereinfacht und
sortiert.

$(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_r})$, und erkennen, dass dann für alle Indeces i bereits $(\tilde{\Phi}_i)_* \circ |_{U_i} = o_{\mathbb{R}^n}$ gilt, insbesondere ist $\tilde{\Phi}_i \circ \tilde{\Phi}_j^{-1}$ orientierungserhaltend, also $\det \tilde{\Phi}_i \circ \tilde{\Phi}_j^{-1} > 0$.

Fehlte

„3. \Rightarrow 4.“: Es sei $\{\Phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^r\}$ der nach Voraussetzung existierende Bündelatlant mit orientierungserhaltenden Übergangsfunktionen und $f_i : U_i \rightarrow [0; 1]$ sei eine nach Partition der Eins, Satz I.2.8 zu $\{U_i\}$ gehörende Zerlegung der Eins sowie dx_i^1, \dots, dx_i^r die von der Trivialisierung Φ_i auf $E^*|_{U_i}$ induzierte kanonische Dualbasis. Wir definieren nun

$$\omega = \sum_i f_i \cdot dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^r \in \Gamma(\Lambda^r E^*).$$

Da in $U_i \cap U_j$ per Definition jeweils $dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^r = (\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j)_*(dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^r)$ gilt, folgt mit der Orientierungserhaltung für jeden Punkt $p \in U_i \cap U_j$ im gemeinsamen Kartenbereich und jeden Vektor $\eta \in E_p$

$$\left(dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^r\right)_p(\eta_p) \geq 0 \iff \left(dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^r\right)_p(\eta_p) \geq 0.$$

Und mit $dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^r \neq 0$, folgt, dass ω nirgends verschwindet.

„4. \Rightarrow 1.“: Es sei $\omega \in \Lambda^r E$ ein nirgends verschwindender Schnitt des Determinantenbündels. Wir definieren die Orientierung o_p von E_p durch

$$o_p = \{(B_{p_1}, \dots, B_{p_r}) \in \mathcal{B}_{E_p} \mid \omega_p(B_{p_1}, \dots, B_{p_r}) > 0\},$$

wobei \mathcal{B}_{E_p} die Menge aller Basen von E_p ist. Indem wir Trivialisierungen betrachten und beachten, dass $\omega \in \Lambda^r E$ glatt ist, erhalten wir, dass dies einen glatten Schnitt $o := (p \mapsto o_p) \in \Gamma(\text{Or}(E))$ ergibt. ///

Aus Theorem VII.1.9 als eigenes Korollar ausgelagert

VII.1.10 Korollar

Für eine Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Aussage äquivalent:

1. M ist orientierbar;
2. $\text{Or}(M) \cong M \dot{\cup} M$;
3. Es gibt einen Atlas $\{(U, x)\}$ von M , deren Kartenwechseldiffeomorphismen $\tilde{x} \circ x^{-1}$ positive Jacobideterminante $\det d(\tilde{x} \circ x^{-1}) > 0$ haben;
4. Es gibt eine nirgends verschwindende m -Form $\omega \in \Omega^m(M, \mathbb{R})$ ($\Lambda^m TM^* \cong M \times \mathbb{R}$). Solche $\omega \in \Omega^m(M, \mathbb{R})$ heißen *Volumenform*.

VII.1.11 Lemma

Ist M einfach zusammenhängend, so ist M orientierbar.

BEWEIS

Ist M nicht orientierbar, also $\text{Or}(M)$ zusammenhängend, und $p \in M$ ein Punkt der Mannigfaltigkeit, so existieren zwei Punkte $p_0 \neq p_1 \in \text{Or}(TM_p)$ und ein Weg $\tilde{\gamma} : [0; 1] \rightarrow \text{Or}(TM)$ mit $\tilde{\gamma}(0) = p_0$ und $\tilde{\gamma}(1) = p_1$. Wäre der damit geschlossene Weg $\gamma := \text{pr} \circ \tilde{\gamma}$ homotop zu $\widetilde{\text{const}}_p : [0; 1] \rightarrow M : t \mapsto p$, so wäre, wie leicht einzusehen ist, $\tilde{\gamma}$ ebenfalls homotop zu $\widetilde{\text{const}}_{p_1} : [0; 1] \rightarrow \text{Or}(M) : t \mapsto p_1$, was jedoch offensichtlich nicht der Fall ist. ///

Sollte man ausbauen
Evtl. allgemeineren Satz:
einfach zusammenhängend \Rightarrow jede wegzusammenhängende Überlagerung ist homöomorph zum original Raum, insb. jede zweifache Überlagerung eine zweifache Kopie des Raums.

VII.1.12 Definition (Orientierter Atlanten und Karten)

Ist (M, o) eine orientierte Mannigfaltigkeit, so heißt ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U, x)\}$ *orientiert bezüglich o* , falls

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \in o|_U \quad \forall (U, x) \in \mathcal{A}.$$

Solche Karten heißen *orientierte Karte*.

VII.1.13 Definition (Orientierungserhaltend, -umkehrend)

Ein Diffeomorphismus $f : (M, o) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{o})$ zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten, heißt *orientierungserhaltend*, falls $df_*o = \tilde{o}$ und sonst *orientierungsumkehrend*.

VII.2. Integration

VII.2.1 Lemma

Für eine Mannigfaltigkeit M^m , einen \mathbb{K} -Vektorraum V , eine m -Form $\omega \in \Omega_c^m(M; V)$ und zwei Karten $(U, x), (V, y)$ auf M mit $\text{supp } \omega \subseteq U \cap V$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} (x^{-1})^* \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^m} (y^{-1})^* \omega,$$

wobei das Vorzeichen genau dann negativ ist, falls $y \circ x^{-1}$ orientierungsumkehrend ist.

BEWEIS

Da $\Lambda^m(M; V)$ eindimensional ist, existiert mittels Basisdarstellung eine gewisse Abbildung $f \in C^\infty(M; V)$ mit $\omega|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ und damit gilt, wenn t_1, \dots, t_m die euklidische Basis ist, $(x^{-1})^* \omega = (f \circ x^{-1}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m$. Es folgt

$$(y^{-1})^* \omega = (x^{-1} \circ (x \circ y^{-1}))^* \omega = \underbrace{(x \circ y^{-1})^*}_{=:\varphi} (x^{-1})^* \omega$$

also folgt mit der Transformationsformel aus dem Grundstudium der Analysis

$$\int_{\mathbb{R}^m} (y^{-1})^* \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^* (x^{-1})^* \omega = \int_{\mathbb{R}^m} (\det d\varphi) (y^{-1})^* \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^m} (x^{-1})^* \omega,$$

da

$$\begin{aligned} \varphi^* (x^{-1})^* \omega &= \varphi^* (f \circ x^{-1}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m \\ &= (f \circ x^{-1} \circ \varphi) \det d\varphi dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m \\ &= (f \circ y^{-1}) \det d\varphi dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m = \det d\varphi (y^{-1})^* \omega \quad /// \end{aligned}$$

Damit ist es nun möglich zu definieren, was Integration einer m -Form in einem Kartengebiet einer Mannigfaltigkeit M^m bedeutet, falls M orientiert ist, also die Kartenübergangsfunktionen positive Determinante haben.

VII.2.2 Definition (Integration für Formen mit Träger in Kartenumgebung)

Ist $\omega \in \Omega_c^m(M, V)$ eine m -Form mit kompakten Träger auf einer m -dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeit (M^m, o) . Existiert eine orientierte Karte (U, x) mit $\text{supp } \omega \subseteq U$, so heißt

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^m} (x^{-1})^* \omega$$

das Integral von ω in M .

Nun müssen wir diese Konstruktion noch auf die gesamte Mannigfaltigkeit verallgemeinern. Dabei wollen wir weiterhin fordern, dass die betrachtete m -Form kompakten Träger hat, um Probleme mit unbestimmten Wert¹, zu umgehen.² Die dabei verwendete Konstruktion ist recht natürlich, sobald wir die Partition der Eins, Satz I.2.8 als gegeben annehmen, da uns diese ermöglicht jede m -Form in mehrere m -Formen mit kompakten Träger zu zerlegen.

VII.2.3 Lemma und Definition (Integration von $\Omega_c^m(M; V)$ -Formen)

Ist $\omega \in \Omega_c^m(M, V)$ eine m -Form mit kompakten Träger auf einer m -dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeit (M^m, o) , so heißt

$$\int_{(M, o)} \omega := \int_M \omega := \sum_{i=1}^n \int_M \varphi_i \omega|_{U_i},$$

das *Integral* von ω , wobei $\{(U_i, x_i)\}$ beliebige Karten sind, die den Träger von ω überdecken, d. h. $\text{supp } \omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ und $\varphi_i : U_i \rightarrow [0; 1]$ eine beliebige Zerlegung der Eins bezüglich dieser Kartenumgebungen ist.

¹Bspw. wenn sowohl der negative, als auch der positive Teil zu unendlich integriert.

²Da diese Funktionen dicht in den Lebesgue-Räumen liegen, ist dies keine wirkliche Einschränkung – für eine genauere Diskussion darüber empfiehlt sich ein Studium der Maßtheorie bzw. der Theorie der Lebesgue-Räume.

BEWEIS (WOHLDEFINIERTHEIT)

Da $\text{supp } \omega \subseteq M$ nach Voraussetzung kompakt ist, genügen endlich viele Kartenumgebungen, um $\text{supp } \omega$ zu überdecken. Wir müssen damit nur noch zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl der Überdeckung und Zerlegung der Eins ist.

Seien also $\{(U_i, x_i)\}_{i=1}^n$ und $\{(\tilde{U}_i, \tilde{x}_i)\}_{i=1}^{\tilde{n}}$ solche Kartenumgebungen und $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ bzw. $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^{\tilde{n}}$ beliebige Zerlegungen der Eins zu diesen Kartenumgebungen. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{(M,o)} \varphi_i \omega &= \sum_{i=1}^n \int_{(M,o)} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{\varphi}_j \right) \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \int_{(M,o)} \varphi_i \tilde{\varphi}_j \omega \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \int_{(M,o)} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) \tilde{\varphi}_j \omega = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \int_{(M,o)} \tilde{\varphi}_j \omega, \end{aligned}$$

wobei die Linearität des Integrals gilt, da der Integrand nur in einer Kartenumgebung nicht verschwindet, also dies über einen Rückzug zu einem Integral im \mathbb{R}^m definiert ist. ///

VII.2.4 Lemma (Eigenschaften des Integrals)

Ist (M^m, o) eine orientierte Mannigfaltigkeit, so

1. ist die Integralabbildung $\int_M : \Omega_c^m(M, V) \rightarrow V : \omega \rightarrow \int_{(M,o)} \omega$ \mathbb{K} -linear.
2. gilt

$$\int_{(M,o)} \varphi^* \omega = \pm \int_{(M,o)} \omega,$$

falls M zusammenhängend und $\varphi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist. Dabei gilt + genau dann wenn φ die Orientierung erhält.

BEWEIS

Die Linearität ist offensichtlich, da sie für Formen, deren Träger in einer Kartenumgebung liegt, gilt, da die Integralabbildung auf \mathbb{R}^m linear ist, und das allgemeine Integral durch eine lineare Fortsetzung definiert ist.

Gilt für gewisse orientierte Karten $(U_i, x^{(i)} \circ \varphi)$ von M bereits $\text{supp } \omega \subset\subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, so gilt auch

$$\text{supp } \varphi^* \omega \subset\subset \bigcup_{k=1}^n \varphi^{-1}(U_i),$$

da wiederum $(\varphi^{-1}(U_i), x^{(i)} \circ \varphi)$ Karten von M sind, weil φ ein Diffeomorphismus ist, und diese sind alle entweder positiv oder negativ orientiert – je nach Orientierung von φ . Dabei beachten wir, dass $\det d\varphi$ nicht das Vorzeichen wechseln kann, da dafür in einem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit $\det d_p \varphi = 0$ gelten müsste, was jedoch der Diffeomorphie von φ widersprechen würde. Damit genügt es die zu zeigende Gleichheit in einem Punkt nachzuweisen.

Also können wir annehmen, dass $\omega \in \Omega_c^m(U)$ für eine Karte (U, x) gilt. Da durch $(\varphi^{-1}(U), \varphi^*x)$ eine Karte von M mit $\text{supp } \varphi^*\omega \subset \subset \varphi^{-1}(U)$ gegeben ist, folgt wegen

$$\left((\varphi \circ \omega)^{-1}\right)^* \varphi^*\omega = \left(x^{-1}\right)^* \omega$$

die Behauptung, wobei das Vorzeichen genau dann positiv ist, falls φ die Orientierung erhält. ///

VII.2.5 Korollar (Integral der umgekehrten Orientierung)

Ist (M^m, o) eine orientierte Mannigfaltigkeit, so gilt

$$\int_{(M,o)} \omega = - \int_{(M,-o)} \omega,$$

wobei $-o$ die relativ zu o umgekehrte Orientierung von TM bezeichnet.

VII.2.6 Schreibweise

Wir schreiben kurz $\int_M \omega$ für $\int_{(M,o)} \omega$, falls klar ist, welche Orientierung gemeint ist.

VII.3. Mannigfaltigkeiten mit Rand und der Satz von Stokes

VII.3.1 Motivation

Ist $M = [a; b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit der natürlich Orientierung von \mathbb{R} und $f \in \Omega_c^0(M) = C^\infty(M)$ eine Funktion darauf, so gilt mit $df = f'(x)dx \in \Omega^1(M)$ und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_M df = \int_0^1 f(t)dt = f(b) - f(a) = \int_{\partial M} f,$$

wobei $\partial M = \text{Rand von } M = \{b\} \cup \{a\}$ mit der nach „außen“ zeigenden Orientierung. Exakt dieses Ergebnis möchten wir nun auf beliebige (orientierte) Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Das Ziel und Ende (Beweis von VII.3.13, 144) dieses Abschnittes wird es also sein den Satz von Stokes, VII.3.2 zu beweisen:

VII.3.2 Theorem (Satz von Stokes)

Ist $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M^m, V)$ eine Vektorraum V -wertige $m - 1$ -Form mit kompakten Träger auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit, so gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Offensichtlich sind dafür Definitionen für den Rand einer Mannigfaltigkeit bzw. einer Mannigfaltigkeit mit Rand sowie der Orientierung des Randes nötig.

VII.3.3 Definition (Modellraum und Ableitungen im Modellraum)

Es bezeichne

$$H^m := \{t \in \mathbb{R}^m \mid t_m \geq 0\}$$

den *oberen Halbraum* des \mathbb{R}^m , den wir mit der induzierten Topologie versehen, d. h.

$$U \subseteq H^m \text{ offen} \iff \exists \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen} : \tilde{U} \cap H^m = U.$$

In diese Definition und die folgenden Bemerkungen aufgeteilt.

Eine stetige Abbildung $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einer offene Teilmenge $U \subseteq H^m$ des oberen Halbraums in den euklidischen Raum heißt *Ableitung* einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, falls Df im Inneren von U die gewöhnliche Ableitung ist und Df in Randpunkten $x \in \partial U = U \cap \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ von U in den ersten $m - 1$ -Richtung die gewöhnliche und in der m -ten Richtung einseitige Ableitung ist, d. h.

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x f + e_m \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + he_m) - f(x)}{h}.$$

In diesem Fall heißt f einfach differenzierbar.

VII.3.4 Bemerkung (Zu Rändern)

Offensichtlich ist der Rand ∂H^m des oberen Halbraums durch $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{m-1}$ gegeben und wir werden diese Diffeomorphie ohne weitere Kommentierung verwenden.

Wir erhalten damit auch für den Rand ∂U einer offenen Teilmenge $U \subseteq H^m$ des oberen Halbraumes die Gleichheit $\partial U = U \cap \frac{\partial}{\partial x} H = U \cap \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$.

VII.3.5 Bemerkung (Zur Differenzierbarkeit)

Wir setzen dies wie üblich auf Mannigfaltigkeitswertige Abbildungen und mehrfache Ableitung fort und schreiben weiterhin wie üblich $C^k(U; V)$ für alle k -fach differenzierbaren V -wertigen Funktionen – auch wenn $U \subseteq H^m$ nur in H^m offen ist.

Wir bemerken, dass diese Definition gleichwertig zur gewöhnlichen Differenzierbarkeit ist, falls $U \subseteq \mathbb{R}^{m-1} \times (0; \infty)$ im Inneren des oberen Halbraums lebt.

Man erkennt leicht, dass eine Abbildung $f : U \rightarrow M$ von einer offenen Teilmenge $U \subseteq H^m$ des oberen Halbraums genau dann in $x \in \partial U$ differenzierbar ist, falls eine differenzierbare Fortsetzung $\tilde{f} : B_\varepsilon(x) \rightarrow M$ existiert und in diesem Fall gilt $D\tilde{f}(x) = Df(x)$ im Sinn obiger Definition. Dies ermöglicht eine vereinfachte Definition, wird von uns sonst aber nicht weiter ausgenutzt.

VII.3.6 Lemma (Diffeomorphismen in der oberen Halbebene)

Ist $f : U \rightarrow \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus zwischen $U, \tilde{U} \subseteq H^m$ offenen Teilmengen des oberen Halbraumes, so

1. bildet f nur genau Randpunkte auf Randpunkte ab, d. h.

$$f(x) \in \partial\tilde{U} \iff x \in \partial U.$$

2. ist $f|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \partial\tilde{U}$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen des \mathbb{R}^{m-1} .

3. ist das Vorzeichen der Determinante der Ableitung in einem Randpunkt durch das Vorzeichen der Determinante der Ableitung der Einschränkung auf den Rand gegeben, d. h.

$$\det(D_x f) > 0 \iff \det(D_x f|_{\partial U}) > 0 \quad \forall x \in \partial U.$$

Dabei gilt in jedem Fall $\det D_x f, \det(D_x f|_{\partial U}) \neq 0$.

BEWEIS

Umgeschrieben

- „1.“: Ist $x \in U$ mit $f(x) \in \partial\tilde{U}$, so gilt insbesondere $f_m(x) = 0$. Da f ein Diffeomorphismus ist, existiert andererseits ein Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ mit $D_x f(v) = e_m$.

Wäre nun $x \notin \partial U$ kein Randpunkt, so wäre für einen kleinen Radius $\varepsilon > 0$ der Ball $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ ganz im Definitionsbereich von f enthalten und es würde für kleine $h < \varepsilon$ bereits $f_m(x - hv) < 0$ gelten. Damit wäre $f : U \rightarrow H^m$ nicht wohldefiniert. Also gilt $x \in \partial U$. Mit der gleichen Betrachtung für die Umkehrabbildung $f^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$ folgt die Charakterisierung der Randpunkte über ihre Bilder unter f .

- „2.“: Es gilt $f|_{\partial U}(t^1, \dots, t^{m-1}) = f(t^1, \dots, t^{m-1}, 0)$, also ist mit $f \in C^\infty(U)$ auch $f|_{\partial U} \in C^\infty(\partial U)$. Also folgt mit „1.“ auch diese Aussage, da selbiges auch für die Umkehrabbildung gilt.

- „3.“: Für jeden Punkt $x_0 \in U$ gilt

$$Df_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial t^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial t^m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial t^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial t^m}(x_0) \end{pmatrix}$$

und nach „1.“ gilt $f(\partial U) \subseteq \partial H^m$, also $(f|_{\partial U})_m = 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f^m}{\partial t^i}(x_0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\}$$

und damit für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$

$$Df_{x_0} = \begin{pmatrix} Df|_{\partial U}(x_0) & B \\ 0 & \frac{\partial f^m}{\partial t^m}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wie im „1.“-Teil des Weiteren $f^m(x_0 + he^m) \geq 0$ und $f^m(x_0) = 0$, also

$$\frac{\partial f^m}{\partial t^m}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^m(x_0 + he^m) - f^m(x_0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \geq 0,$$

beziehungsweise, da f ein Diffeomorphismus ist, sogar > 0 . ///

Nun haben wir das nötige Werkzeug um zu definieren, was eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist:

VII.3.7 Definition (Mannigfaltigkeit mit Rand)

Eine Menge M heißt *m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand*, falls es eine Überdeckung $\{U_i\}_i$ mit Karten $\{x_i : U_i \rightarrow H^m\}_i$ gibt so, dass die Kartenabbildungen x_i jeweils injektiv und die Kartenübergangsfunktionen $x_i \circ x_j^{-1}$ jeweils C^∞ -Diffeomorphismen von offenen Teilmengen der oberen Halbebene H^m sind.

VII.3.8 Definition (Rand)

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so heißt

$$\partial M := \{p \in M \mid \exists \text{Karte } (U, x) \text{ mit } x(p) \in \partial H^m\}$$

*Rand*³ von M .

Nach dem vorangehenden Lemma VII.3.6 ist die Definition des Randes unabhängig von der Wahl der Karten, da falls eine Karte existiert so, dass der Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit auf einen Randpunkt $x(p) \in \partial H^m$ abgebildet wird, so gilt dies auch für jede andere Karte \tilde{x} , da $\tilde{x} \circ x^{-1}$ nach Voraussetzung eine glatte Abbildung zwischen offenen Teilmengen der oberen Halbebene ist.

VII.3.9 Bemerkung

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit leerem Rand $\partial M = \emptyset$, so ist M eine Mannigfaltigkeit im bisherigen Sinn. Wir bezeichnen daher Mannigfaltigkeiten im bisherigen Sinne auch als *Mannigfaltigkeiten ohne Rand*.

Wir können alle bisherigen⁴ Konstruktionen auch auf Mannigfaltigkeiten mit Rand übertragen.

Im Folgenden verstehen wir, falls nicht explizit anders erwähnt, unter einer Mannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit *mit* (eventuell leerem) Rand.

VII.3.10 Lemma (Randmannigfaltigkeiten)

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M , so

1. ist ∂M eine Untermannigfaltigkeit der Codimension 1 von M .
2. ist der Rand der Randmannigfaltigkeit ∂M leer: $\partial(\partial M) = \emptyset$.
3. ist die Mannigfaltigkeit ohne ihren Rand eine Mannigfaltigkeit ohne Rand: $\partial(M \setminus \partial M) = \emptyset$.

³Hierbei ist wichtig, dass ∂M *nicht* den topologischen Rand von M bezeichnet, der immer leer wäre, sondern tatsächlich den Mannigfaltigkeitsrand bezeichnet.

⁴und alle in den weiteren Kapiteln folgenden

BEWEIS

„1.“: Wir geben explizit die angepassten Karten für ∂M an.

Ist (U, x) eine *Randkarte* von M , d. h. $\partial M \cap U \neq \emptyset$, so ist $y := (x^1, \dots, x^{m-1})|_{\partial U}$ eine glatte Abbildung von $\partial U \cap \partial M$ nach ∂H^m und injektiv, also bijektiv auf ihr Bild. Betrachten wir nun eine weitere Karte (\tilde{U}, \tilde{x}) und die gleich konstruierte Randabbildung \tilde{y} , so erhalten wir nach Lemma VII.3.6 als Kartenwechselabbildung $\tilde{y} \circ y^{-1}$ einen C^∞ -Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des H^m . Damit ist $\partial M \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, die von den angepassten Karten $(\partial U, y)$ von (U, x) kommt.

„2.“: Da nach obiger Konstruktion die Randkarten als Bildbereiche offene Teilmengen des $\mathbb{R}^{m-1} \cong \partial H^m$ haben, gilt $\partial(\partial M) = \emptyset$.

„3.“: Ist $p \in M \setminus \partial M$ außerhalb des Randes, so existiert eine Karte (U, x) von M nach H^m . Da aber $p \notin \partial M$ kein Randpunkt ist, gilt per Definition $x(p) \notin \partial H^m$. Damit existiert ein Ball $B_\varepsilon(x(p)) \subseteq H^m$ außerhalb des Randes, d. h. $\partial H^m \cap B_\varepsilon(x(p)) = \emptyset$, und wir erhalten die Karte $\tilde{x} : x^{-1}(B_\varepsilon(x(p))) \rightarrow \mathbb{R}^m$ um x in $M \setminus \partial M$, ohne Randpunkte. Da $x \in M \setminus \partial M$ ein beliebiger Punkt außerhalb des Randes war, folgt $\partial(M \setminus \partial M) = \emptyset$. ///

VII.3.11 Definition (Randorientierung)

Ist (M, σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und (U, x) eine orientierte Karte von M , d. h. $[\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m] = o|_U$, so heißt

$$o_{\partial M}|_{\partial U} := (-1)^m \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}} \right]$$

Randorientierung von ∂M zu M .

Die Randorientierung ist nach dem vorangehenden Lemma VII.3.10 wohldefiniert.

VII.3.12 Bemerkung

Die Definition der Randorientierung entspricht der Orientierung durch die „äußere Normale“ des Randes. Einige Autoren verwenden die Orientierung durch die „innere Normale“, welches exakt die umgekehrte Orientierung ist und nach Korollar VII.2.5 bei Randintegralen jedes Vorzeichen ändert.

Nun können wir endlich den Satz von Stokes, VII.3.2 beweisen. Wir wiederholen noch einmal die Aussage:

VII.3.13 Theorem (Satz von Stokes)

Ist $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M^m, V)$ eine Vektorraum V -wertige $m - 1$ -Form mit kompakten Träger auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit, so gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

BEWEIS (THEOREM VII.3.2 BZW. SATZ VON STOKES, THEOREM VII.3.13)

Zunächst ist klar, dass der Träger der äußeren Ableitung $d\omega$ einer gegebenen Form $\omega \in \Omega^\bullet(M; V)$ im Träger der Form selbst enthalten ist, d. h. $\text{supp } d\omega \subset \text{supp } \omega$. Insbesondere hat $d\omega \in \Omega_c^m(M; V)$ kompakten Träger, falls $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M; V)$ kompakten Träger hat.

Es sei $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M; V)$ eine beliebige V -wertige $m - 1$ -Form auf M mit kompakten Träger. Seien $(U_i, x^{(i)})$ für $i = 1, \dots, n$ orientierte Karten, welche $\text{supp } \omega$ überdecken, d. h.

$$\text{supp } \omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$$

und es sei $\{\varphi_i : M \rightarrow [0; 1]\}_{i=1}^n$ eine dazugehörige Zerlegung der Eins. Insbesondere gilt

$$\omega = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) \omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i \omega \quad \text{und damit auch} \quad d\omega = \sum_{i=1}^n d(\varphi_i \omega).$$

Gilt also der Satz von Stokes für Formen mit Träger in *einer* Kartenumgebung, also $\text{supp } \varphi \subset U_i$, so gilt

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^n \int d(\varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^n \int_{\partial M} \varphi_i \omega,$$

also der Satz in der angegebenen Allgemeinheit.

Wir nehmen also an, dass ω nur Träger in einer orientierten Karte (U, x) hat, d. h. $\text{supp } \omega \subset (U, x)$. Nach Kartenübergang genügt es also den Satz von Stokes für $\omega \in \Omega_c^{m-1}(H^m)$ zu zeigen. Durch die Basisdarstellung existieren gewisse $f_i \in C_c^\infty(H^m)$ mit⁵

$$\omega(t) = f_i(t) dt^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \dots \wedge dt^m, \quad d\omega = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t^i}(t) (-1)^{i-1} \right) dt^1 \wedge \dots \wedge dt_m,$$

wobei $\partial f_i / \partial t_i \in C_c^\infty(H^m)$. Wir können also $R > 0$ mit $\text{supp } \omega \subseteq (-R; R)^{m-1} \times [0; R]$ wählen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{H^m} d\omega &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial t^i}(t) (-1)^{i-1} \right) dt_1 \dots dt_m \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [f_i(t)]_{t_i=-R}^R dt_1 \dots \widehat{dt_i} \dots dt_m \\ &\quad + (-1)^{m-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \int_0^R [f_m(t)]_{t_m=0}^R dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

Da nach Wahl von R bereits $f_i(t) = 0$ für $|t_i| \geq R$ gilt, folgt unter Verwendung der der Definiton der Orientierung des Randes

$$\int_{H^m} d\omega = \int_{\partial H^m} f_m(t_1, \dots, t_{m-1}, 0) \cdot (-1)^m dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{m-1} = \int_{\partial H^m} \omega. \quad ///$$

⁵Auch hier wird mit der Einsteinnotation summiert, obwohl i nur den „fehlenden Index“ angibt.

VII.3.14 Beispiel

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge deren Rand $\partial M = \gamma(S^1)$ das Bild einer glatten Einbettung $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist. Außerdem sei die 1-Form $\omega = xdy$ gegeben, also gilt $d\omega = dx \wedge dy$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Area}(M) &= \int_M dx \wedge dy = \int_{\partial M} xdy = \frac{1}{2} \int_{\partial M} xdy - ydx \\ &= \text{Wegintegral von } xdy \text{ über } \gamma. \end{aligned}$$

VII.3.15 Korollar (Integral exakter Formen)

Ist (M, o) eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit M^m der Dimension m mit leerem Rand $\partial M = \emptyset$, so ist das Integral jeder exakten m -Form Null, d. h.

$$\int_M \omega = 0 \quad \forall \eta \in \Omega^{m-1}(M; V), \omega = d\eta.$$

Kapitel VIII.

Cohomologie

VIII.1. Homotopieinvarianz

VIII.1.1 Erinnerung (Exakte und geschlossene Formen)

Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ einer Mannigfaltigkeit M^m heißt *exakt*, falls eine $k-1$ -Form $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ existieren, deren äußere Ableitung $d\eta = \omega$ gerade ω ergibt. Die Form heißt *geschlossen*, falls ihre äußere Ableitung verschwindet, d. h. $d\omega = 0$.

Insbesondere ist mit $d^2 = 0$ jede exakte Form geschlossen¹.

VIII.1.2 Definition (De-Rham-Cohomologie)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, so heißt die Menge

$$H_{dR}^k(M) = \left\{ \omega \in \Omega^k(M) \text{ geschlossen} \right\} / \left\{ \omega \in \Omega^k(M) \text{ exakt} \right\}$$

aller Restklassen von geschlossenen Formen modulo der exakten Formen k -te *de-Rham-Cohomologie* von M . Des Weiteren heißt

$$H_{dR} := H_{dR}^\bullet := \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H_{dR}^k(M)$$

die *de-Rham-Cohomologie* von M .

Wir erhalten sofort erste, offensichtliche Eigenschaften:

VIII.1.3 Lemma (Algebrastruktur der de-Rham-Cohomologie)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, so ist die de-Rham-Cohomologie mit dem Produkt $[\omega][\eta] := [\omega \wedge \eta]$ eine Algebra und jede glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten induziert mit dem *Pullback*

$$f^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M) : (f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

einen Algebrenhomomorphismus

$$f^* : H_{dR}^\bullet(N) \rightarrow H_{dR}^\bullet(M) : f^*[\omega] := [f^*\omega]$$

vom Grad 0, d. h. der Grad der Form bleibt erhalten, d. h. $f^*(H_{dR}^k(N)) \subseteq H_{dR}^k(M)$.

¹Wir bemerken noch einmal, dass wir hier *skalar-wertige* Formen betrachten. Bei *Vektorbündelwertigen* Formen würde dies nicht gelten.

VIII.1.4 Lemma

Der induzierte Algebrenhomomorphismus $f^* : H_{dR}^\bullet(N) \rightarrow H_{dR}^\bullet(M)$ eines Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ist ein Isomorphismus.

BEWEIS

Dies folgt direkt daraus, dass $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$. ///

Wir erhalten damit ein erstes Kriterium, wann zwei Mannigfaltigkeiten *nicht* diffeomorph sind.

VIII.1.5 Korollar

Sind M und N zwei Mannigfaltigkeiten, deren de-Rham-Cohomologiegruppen nicht isomorph sind, so sind M und N nicht diffeomorph.

Dies ist aber, wie wir mit Homotopie Invarianz, Satz VIII.1.7 sehen werden, nur ein schwaches Kriterium.

VIII.1.6 Definition (Homotopie)

Zwei glatte Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißen *homotop*, in Symbolen $f \sim g$, falls eine *Homotopie*, d. h. eine glatte Abbildung $F : [0; 1] \times M \rightarrow N$ mit $F(0, \cdot) = f$ und $F(1, \cdot) = g$ existiert.

VIII.1.7 Satz (Homotopie Invarianz)

Sind $f, g : M \rightarrow N$ homotope Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N , dann sind die induzierten Algebrenhomomorphismen $f^*, g^* : H_{dR}^\bullet(N) \rightarrow H_{dR}^\bullet(M)$ gleich, d. h.

$$f^*[\omega] = g^*[\omega] \quad \forall \omega \in H_{dR}^\bullet(N).$$

BEWEIS

Zerlegung: Wir erkennen als ersten Schritt dass jede k -Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R} \times M)$ sich eindeutig als

$$\omega = dt \wedge \alpha + \beta$$

mit $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R} \times M)$, $\beta \in \Omega^k(\mathbb{R} \times M)$ und $i_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha = i_{\frac{\partial}{\partial t}} \beta = 0$ zerlegen lässt, wobei der *Einsetzungoperator* i durch

$$i : v \in V \mapsto \left(\bigwedge^k V^* \rightarrow \bigwedge^{k-1} V^* \right) : v \mapsto (\eta \mapsto i_v \eta := \eta(v, \cdot, \dots, \cdot))$$

definiert ist und $\frac{\partial}{\partial t}$ der kanonische Basisvektor von \mathbb{R} ist. Wir erkennen dies, indem wir $\alpha := i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega$ und $\beta := \omega - dt \wedge \alpha$ setzen.

Homotopieoperator: Wir definieren nun den *Homotopieoperator* für α wie oben

$$K : \Omega^k(\mathbb{R} \times M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M) : \omega \mapsto \int_0^1 \alpha_{(s,\cdot)} ds.$$

Also gilt für $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R} \times M)$

$$K\omega_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{(s,p)} \left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1} \right) ds.$$

Wir zeigen nun, dass

$$K(d\omega) + d^M(K\omega) = j_1^* \omega - j_0^* \omega,$$

wobei $j_t : M \rightarrow \mathbb{R} \times M : p \mapsto (t, p)$ die natürlich Einbettung zur Zeit t ist. Ist für ein $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R} \times M)$ in obiger Zerlegung

„ $\alpha = 0$ “, so gilt offensichtlich $K\omega = 0$ und wir erhalten für gewisse $b_I \in C^\infty(M)$

$$d\omega = d\beta = \frac{\partial b_I}{\partial t} dt \wedge dx^I + d^M \beta,$$

also

$$\begin{aligned} K(d\omega)_p &= \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}}^* d\omega_{(s,p)} ds = \int_0^1 \frac{\partial b_I(p, s)}{\partial t} dx^I ds \\ &= \beta_{(1,p)} - \beta_{(0,p)} = \omega_{(1,p)} - \omega_{(0,p)}. \end{aligned}$$

„ $\beta = 0$ “, so gilt $\omega = dt \wedge \alpha$, also auch $d\omega = -dt \wedge d\alpha$ und in der Basisdarstellung $\alpha = a_I dx^I$ gilt

$$d\alpha = \frac{\partial a_I}{\partial t} dt \wedge dx^I + \underbrace{\sum \frac{\partial a}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^I}_{=d^M \alpha}$$

und damit $d\omega = -dt \wedge d\alpha = -dt \wedge d^M \alpha$. Somit erhalten wir insbesondere

$$(K d\omega)_p = \int -d_p^M \alpha_{(s,\cdot)} ds = -d_p^M \int_0^1 \alpha_{(s,\cdot)} ds = -(d^M K\omega)_p.$$

Durch Linearität erhalten wir die gewünschte Gleichung in jedem Fall.

Anwendung: Nun wenden wir dies auf die gegebene Homotopie an. Sei also

$$F : \mathbb{R} \times M \rightarrow N \quad \text{mit } F(0, \cdot) = f \text{ und } F(1, \cdot) = g$$

und es ist zu zeigen, dass für jede geschlossene k -Form $\omega \in \Omega^k(N)$, d. h. $d\omega = 0$ bzw. $[\omega] \in H_{dR}^k(N)$, bereits eine $k-1$ -Form $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ mit

$$f^* \omega = g^* \omega + d\eta$$

existiert, da dann $f^*[\omega] = [f^*\omega] = [g^*\omega] = g^*[\omega]$. Da $f^*\omega = (F^*\omega)_{t=0}$ und $g^*\omega = (F^*\omega)_{t=1}$ folgt aus obiger Gleichung und Lemma VI.1.8

$$g^*\omega - f^*\omega = dK(F^*\omega) + K \underbrace{d(F^*\omega)}_{=F^*d\omega=0} = d\eta \text{ f\"ur } \eta := K(F^*\omega).$$

///

VIII.1.8 Definition (Kontrahierbar)

Eine Mannigfaltigkeit M heißt *kontrahierbar*, falls die Identität homotop zur konstanten Abbildung $\text{id}_M \sim p_0 = (p \mapsto p_0)$ ist.

VIII.1.9 Beobachtung

Der euklidische Raum $M = \mathbb{R}^m$, offene Bälle in \mathbb{R}^m etc, sind kontrahierbar. Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit lokal kontrahierbar.

VIII.1.10 Korollar (Poincaré Lemma)

Ist M kontrahierbar und zusammenhängend, so ist

$$H_{dR}^\bullet(M, \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & : k = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Das heißt jede geschlossene $1 \leq k$ -Form auf M ist exakt.

BEWEIS

Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $F : \mathbb{R} \times M$ mit $F(0, \cdot) = \text{id}_M$ und $F(1, \cdot) = p_0 \in M$. Aber offensichtlich gilt $p_0^*\omega = 0$ für alle $\omega \in H_{dR}^k(M)$ für $k \geq 1$ und $(\text{id}_M)^* : H_{dR}^\bullet(M)$ ist offensichtlich die Identität. Nach Satz VIII.1.7 gilt somit für $k \geq 1$

$$H_{dR}^k(M) = \text{id}_M^* H_{dR}^k(M) \cong p_0^* H_{dR}^k(M) = 0. \quad ///$$

VIII.1.11 Korollar

Sind M und N Mannigfaltigkeiten und N kontrahierbar, so gilt

$$H_{dR}^\bullet(M \times N) \cong H_{dR}^\bullet(M).$$

BEWEIS

Da N kontrahierbar ist, existiert eine glatte Abbildung $G : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ mit $G(0, \cdot) = \text{id}_N$ und $G(1, \cdot) = q_0 \in N$. Damit ist aber auch

$$F : \mathbb{R} \times (M \times N) \rightarrow M \times N : (t, (p, q)) := (p, G(t, q))$$

eine Homotopie und wir erhalten für $\pi : M \times N \rightarrow M \times N : (p, q) \mapsto (p, q_0)$ bereits $F(1, \cdot) = \pi$ und $F(0, \cdot) = \text{id}_{M \times N}$. Offensichtlich gilt mit Satz VIII.1.7

$$\begin{aligned} H_{dR}^\bullet(M) &\cong \pi^* H_{dR}^\bullet(M \times N) = F(1, \cdot)^* H_{dR}^\bullet(M \times N) \\ &\cong F(0, \cdot)^* H_{dR}^\bullet(M \times N) = H_{dR}^\bullet(M \times N). \end{aligned} \quad ///$$

VIII.1.12 Korollar (Über geschlossene 1-Formen)

Ist M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so gilt $H_{dR}^1(M \times N) = 0$, d. h. jede geschlossene 1-Form auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist exakt.

Neu, da es spätestens in Theorem X.3.3 verwendet wird.

BEWEIS

Es sei $\omega \in \Omega^1(M)$ eine geschlossene 1-Form und $p_0 \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit. Wir definieren nun

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \int_0^1 \gamma_p^* \omega,$$

wobei $\gamma_p : [0; 1] \rightarrow M$ ein beliebiger glatter Weg von $p_0 = \gamma(0)$ nach $p = \gamma(1)$ ist. Wir erkennen, dass es ausreicht die Wohldefiniertheit von f zu zeigen, da dann $df = \omega$ aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt.

Sind $\gamma, \tilde{\gamma} : [0; 1] \rightarrow M$ zwei glatte Wege von $p_0 = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ zu einem Punkt $p = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ der Mannigfaltigkeit, so sind diese nach Voraussetzung homotop zueinander, d. h. es existiert eine Homotopie $h : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow M$ von $\gamma \equiv h|_{\{0\} \times [0; 1]}$ und $\tilde{\gamma} \equiv h|_{\{1\} \times [0; 1]}$ mit festem Endpunkten $p_0 \equiv h|_{[0; 1] \times \{0\}}$ und $p \equiv h|_{[0; 1] \times \{1\}}$. Außerdem ist $h^* \omega \in \Omega^1([0; 1]^2)$ nach Lemma VI.1.8 geschlossen², also nach dem Poincaré Lemma, Korollar VIII.1.10 exakt, d. h. es existiert eine Funktion $g \in C^\infty([0; 1]^2)$ mit $dg = h^* \omega$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) = (\gamma^* \omega)_{(0, t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

und äquivalent $\frac{\partial}{\partial t} f(1, t) = \omega_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\gamma}'(t))$ und wir erhalten mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\begin{aligned} \int_{[0; 1]} \tilde{\gamma}^* \omega &= \int_0^1 \omega_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\gamma}'(t)) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(1, t) dt = f(1, 1) - f(1, 0) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} (f(s, 1) - f(s, 0)) ds + f(0, 1) - f(0, 0). \end{aligned}$$

²Genau genommen könnten wir an dieser Stelle aufhören, da ein einfacherer, aber technischerer Beweis für die Unabhängigkeit des Integrals vom Integrationsweg aus dem Grundstudium der Analysis bekannt ist.

Da nach Annahme $h(\cdot, 1) \equiv p$ und $h(\cdot, 0) \equiv p_0$ gilt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} f(s, 1) = \omega_{h(s,1)} \left(D_{s,1} h \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \right) = 0$$

und äquivalent $\partial/\partial s f(s, 0) = 0$ und damit ergibt das hintere Integral Null. Somit gilt

$$\int_{[0;1]} \tilde{\gamma}^* \omega = f(0, 1) - f(0, 0) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) dt = \int_{[0;1]} \gamma^* \omega$$

und hiermit ist die Wegunabhängigkeit der Integration und damit die Wohldefiniertheit von f gezeigt. ///

VIII.2. Mayer-Vietoris-Sequenz

VIII.2.1 Definition ((exakte) Sequenz)

Sind V_i Vektorräume und $\alpha_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ Abbildungen, so heißt die *Sequenz*

$$\dots \rightarrow V_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} V_i \xrightarrow{\alpha_i} V_{i+1} \rightarrow \dots$$

exakt, wenn für alle i bereits $\text{Bild}(\alpha_{i-1}) = \ker(\alpha_i)$ gilt.

VIII.2.2 Definition (Cokettenkomplex)

Ein *Cokettenkomplex* (über \mathbb{R}) ist eine Familie $C = \{(C^k, d_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ von \mathbb{R} -Vektorräumen $(C^k)_{k \in \mathbb{Z}}$, mit $C^k = 0$ für $k < 0$, und linearen Abbildungen $d_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$, so genannten *Corand-Operatoren*, mit $d_{k+1} \circ d_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir schreiben kurz $d^2 = 0$ für „ $d_{k+1} \circ d_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ “.

VIII.2.3 Definition (Cozykel und Coränder)

Für einen Cokettenkomplex $C = \{(C^k, d_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ heißen die Elemente von $Z^k(C) := \ker(d_k) \subseteq C^k$ *Cozykeln* und $B^k(C) = \text{Bild}(d_{k-1}) \subseteq C^k$ *Coränder* von C . Des Weiteren heißt die Menge der Restklassen

$$H^k(C) := Z^k(C)/B^k(C)$$

k -te *Cohomologiegruppe* von C und

$$H^\bullet(C) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(C)$$

heißt *Cohomologiegruppe* von C .

VIII.2.4 Beispiel (Wiederholung der de-Rham-Cohomologie)

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\Omega^k(M)$, $0 \leq k \leq m =: \dim M$, der \mathbb{R} -Vektorraum der glatten k -Formen auf M . Sei weiter $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ die äußere Ableitung. Wegen $d^2 = 0$ ist

$$\Omega(M) := \left(\Omega^k(M), d_k := d|_{\Omega^k(M)} \right)$$

ein Cokettenkomplex. Er heißt *de-Rham-Komplex*. Die Elemente von $Z^k(\Omega(M)) =: Z^k(M)$ heißen *geschlossen*, die von $B^k(\Omega(M)) =: B^k(M)$ heißen *exakt*. Die zugehörige Cohomologie ist die *de-Rham-Cohomologie*

$$H_{dR}^k(M) := H^k(\Omega^\bullet(M), d) \quad H_{dR}^\bullet(M) := H_{dR}(M) := H^\bullet(\Omega^\bullet(M), d).$$

VIII.2.5 Definition (Cokettenabbildung)

Sind $C = \{C^k, d_k\}$ und $\tilde{C} = \{\tilde{C}^k, \tilde{d}_k\}$ Cokettenkomplexe, so heißt eine Familie $f = \{f_k : C^k \rightarrow \tilde{C}^k\}_k$ von Homomorphismen *Coketten-Abbildung*, falls für alle $k \in \mathbb{Z}$ bereits $\tilde{d}^k \circ f_k = f_{k+1} \circ d_k$ gilt, d. h. falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{C}^k & \xrightarrow{\tilde{d}_k} & \tilde{C}^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & f_k & & f_{k+1} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C^k & \xrightarrow{d_k} & C^{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutiert.

Eine Cokettenabbildung $f : C \rightarrow \tilde{C}$ induziert die lineare Abbildung

$$f_* = H^k(f) : H^k(C) \rightarrow H^k(\tilde{C}).$$

VIII.2.6 Definition ((exakte) Sequenz von Cokettenkomplexen)

Sind $(V_i, d^i) = \{V_i^k, d_k^i\}$ Cokettenkomplexe und $f_i = \{f_i^k : V_i^k \rightarrow V_{i+1}^k\} : V_i \rightarrow V_{i+1}$ Cokettenabbildungen, so heißt die *Sequenz*

$$\dots \rightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \rightarrow \dots$$

exakt, wenn für alle i bereits $\text{Bild}(f^{i-1}) =: (\text{Bild}(f_k^{i-1}))_k = \ker(f^i) := (\ker(f_k^i))_k$ gilt.

VIII.2.7 Lemma und Definition (Verbindender Homomorphismus)

Sei $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ eine *kurze* exakte Sequenz von Cokettenkomplexen. Dann ist der *verbindender Homomorphismus* δ_k wohldefiniert und linear, wobei

$$\delta_k : H^k(C'') \rightarrow H^{k+1}(C') : [x] \mapsto [f_{k+1}^{-1} \circ d_k \circ g_k^{-1}(x)].$$

Diagramm
vervollständigt

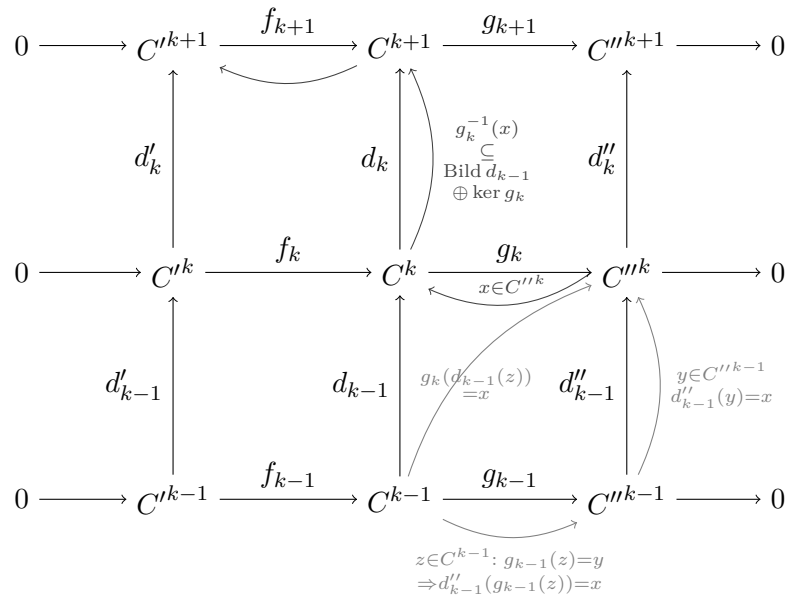


Abbildung VIII.1.: Diagramm zum verbindenden Homomorphismus

BEWEIS

Dies kann aus dem (Teil-)Diagramm, Abbildung VIII.1 ausgelesen werden.

Ausführung eingebaut.

Wir führen dies in diesem Fall einmal ausführlich vor: Für $x \in \text{Bild } d''_{k-1} \subseteq C''^k$, also $[x] = [0] \in H^k(C'')$, existiert per Definition ein $y \in C''^{k-1}$ mit $d''_{k-1}(y) = x$. Da die unterste der gezeigten kurzen Sequenzen exakt ist, ist g_{k-1} surjektiv und damit existiert ein $z \in C^{k-1}$ mit $g_{k-1}(z) = y$, also $d''_{k-1}(g_{k-1}(z)) = x$.

Mit der Kommutativität des Diagramms ist damit $d_{k-1}(z)$ ein Urbild von $x \in C''^k$ bezüglich g_k und damit gilt, wenn wir wieder die Exaktheit der horizontalen Sequenzen verwenden,

$$g_k^{-1}(x) = d_{k-1}(z) \oplus \ker g_k \subseteq \text{Bild } d_{k-1} \oplus \ker g_k = \text{Bild } d_{k-1} \oplus \text{Bild } f_k.$$

Da $d_k \circ d_{k-1} = 0$ gilt, folgt insbesondere

$$(d_k \circ g_k^{-1})(x) \subseteq d_k \circ f_k(C'^k) = f_{k+1} \circ d'_k(C'^k) \subseteq C^{k+1}.$$

Da die vertikalen Sequenzen exakt sind, folgt dass f_{k+1} injektiv ist und damit sichert die Kommutativität des Diagramms endlich $f_{k+1}^{-1}(d_k \circ g_k^{-1})(x) \subseteq d'_k(C'^k)$, also

$$[f_{k+1}^{-1}(d_k \circ g_k^{-1})(x)] = [0] \in H^{k+1}(C'). \quad ///$$

Wir haben insbesondere erkannt, dass es möglich ist im Diagramm „rückwärts“ zu gehen, falls wir Modulo der Bilder der d_k rechnen.

VIII.2.8 Satz (Die lange Cohomologiesequenz)

Sei $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Cokettenkomplexen. Dann ist die folgende Sequenz von Vektorräumen exakt:

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^k(C') \xrightarrow{f_*} H^k(C) \xrightarrow{g_*} H^k(C'') \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(C') \xrightarrow{f_*} \dots$$

BEWEIS

Dies ist wiederum eine reine Diagrammjagd. ///

VIII.2.9 Beispiel

Betrachten wir zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit, die M überdecken, d. h. $U \cup V = M$. Außerdem seien $j : U \cap V \rightarrow U$, $j' : U \cap V \rightarrow V$, $i : U \rightarrow M$ und $i' : V \rightarrow M$ die kanonischen Inklusionen, insbesondere kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{j} & U \\ \downarrow j' & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{i'} & M \end{array}$$

Definieren wir nun

$$f_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) : \omega \mapsto (i^*(\omega), i'^*(\omega))$$

und

$$g_k : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U \cap V) : (\alpha, \beta) \mapsto j'^*\beta - j^*\alpha.$$

Wir erkennen sofort, dass f_k injektiv ist, da $i^*(\omega) = \omega|_U$ und $i'^*(\omega) = \omega|_V$ gilt und diese Mengen die Mannigfaltigkeit überdecken, d. h. $U \cup V = M$. Weiter erkennen wir, dass $g_k \circ f_k = 0$ gilt, was wir mit

$$(g_k \circ f_k)(\omega) = j'^*i'^*(\omega) - j^*i^*(\omega) = (i' \circ j')^*(\omega) - (i \circ j)^*(\omega) = 0$$

erkennen. Somit gilt bereits $\text{Bild}(f_k) \subseteq \ker(g_k)$. Ist andererseits für $(\alpha, \beta) \in \ker(g_k)$, d. h. $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^k(V)$ mit $g_k(\alpha, \beta) = 0$, so gilt per Definition von g_k bereits $j'^*\beta - j^*\alpha = 0$. Definieren wir nun eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ durch

$$\omega|_U := \alpha, \quad \omega|_V := \beta,$$

so ist dies nach Voraussetzung an α und β wohldefiniert, da diese auf dem Schnitt nach Voraussetzung identisch sind. Damit ist aber bereits $i^*(\omega) = \alpha$ und $i'^*(\omega) = \beta$, also auch $f_k(\omega) = (\alpha, \beta)$. Somit haben wir gezeigt, dass $\text{Bild}(f_k) = \ker(g_k)$ gilt.

Wir können diese Ergebniss kurz damit zusammenfassen, dass die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{f_k} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{g_k} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

exakt ist.

BEWEIS (EXAKTHEIT)

Die Exaktheit bei $\Omega(M)$ gilt mit der Injektivität von f_k .

Die Exaktheit bei $\Omega(U) \oplus \Omega(V)$ gilt mit der obigen Gleichheit $\text{Bild}(f_k) = \ker g_k$.

Die Exaktheit bei $\Omega(U \cap V)$ bedeutet, dass g_k surjektiv ist. Dies ist jedoch leicht zu erkennen:

Sei dazu eine k -Form $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ auf dem Schnitt gegeben. Wir wählen eine Partition der Eins $\varrho_U, \varrho_V \in C^\infty(M)$ von M bezüglich (U, V) . Insbesondere können wir $\varrho_U \omega$ mit 0 auf $V \setminus U$ zu $\beta \in \Omega^k(V)$ und $-\varrho_V \omega$ auf V zu α fortgesetzt werden. Per Konstruktion gilt $g_k(\alpha, \beta) = \omega$. Da $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ beliebig war, gilt die Surjektivität. ///

VIII.2.10 Satz (Mayer-Vietoris)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, die von zwei offenen Teilmengen $U, V \subseteq M$ überdeckt wird, d. h. $U \cup V = M$, so ist die folgende Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H^k(M) \xrightarrow{f_*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{g_*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(M) \xrightarrow{f_*} \dots$$

exakt, wobei wie in Beispiel VIII.2.9 f die natürlich Einschränkung und g die Differenz sind, sowie Δ der Verbindender Homomorphismus, VIII.2.7 bezüglich f und g ist.

BEWEIS

Dies ist mit der langen Cohomologiesequenz Satz VIII.2.8 klar. ///

VIII.2.11 Anwendung (Die de Rham Cohomologie der Sphären)

Sind $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, so gilt

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k \in \{0, n\} \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases} .$$

BEWEIS

Da S^n ($n \geq 1$) zusammenhängend ist, ist $H^0(S^n) = \mathbb{R}$, denn für $f \in C^\infty(M)$ mit $df = 0$ gilt $f \equiv \text{const}$.

Sei $N = (0, \dots, 0, 1)$ der Nord- bzw. $S = (0, \dots, 0, -1)$ der Südpol und $U := S^n \setminus \{S\}$ bzw. $V := S^n \setminus \{N\}$. Damit ist $U \cong V \cong \mathbb{R}^n$ und mit dem Poincaré Lemma, Korollar VIII.1.10 gilt also $H^k(U) = H^k(V) = \{0\}$ für $k \geq 1$. Weiter ist $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, also folgt wieder mit dem Poincaré Lemma $H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{n-1})$.

Wir betrachten nun für $n \geq 2$ die Mayer-Vietoris-Sequenz, Abbildung VIII.2 und erkennen, dass g_* surjektiv und damit $\Delta = 0$ die Nullabbildung ist. Des Weiteren

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & & & 0 = H^1(U) \oplus H^1(V) & \xleftarrow{f_*^1} & H^1(S^n) \\
\downarrow & & & & & & \uparrow \Delta \\
H^0(S^n) & \xrightarrow{f_*^0} & H^0(U) \oplus H^0(V) & \xrightarrow{g_*} & H^0(U \cap V) \cong H^0(S^{n-1}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{R} \ni x & \longmapsto & (x, x) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \ni (x, y) & \longmapsto & y - x \in \mathbb{R} & &
\end{array}$$

Abbildung VIII.2.: Mayer-Vietoris-Sequenz der Sphäre

erkennen wir, dass $f_*^1 \equiv 0$, also ist $\text{Bild } \Delta = \ker f_*^1 = H^1(S^n)$ und damit ist Δ auch surjektiv, womit folgt, dass $H^1(S^n) = \{0\}$ und somit gilt die Aussage für $n \geq 2$ und $k \in \{0, 1\}$.

Seien nun $n, k \geq 2$. Mit der obigen Begründung erhalten wir

$$\{0\} = H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(U \cap V)$$

da wir nach obiger Argumentation wissen, dass $H^{k-1}(U \cap V) \cong H^{k-1}(S^{n-1})$, erhalten wir

$$\{0\} \rightarrow H^{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} H^k(S^n) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) = \{0\}.$$

Also ist Δ ein Isomorphismus und damit erhalten wir für $k \geq 1$

$$H^k(S^n) \cong \dots \cong H^1(S^{n-k+1}) = \begin{cases} H^1(S^1) & \text{für } n - k + 1 = 1 \text{ d. h. für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also wurde das Problem auf das Problem mit $n = k = 1$ reduziert.

Für³ $n = 1$ beachten wir, dass $H^0(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, weil $U \cap V$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, und $\dim \ker \Delta = \dim \text{Bild}(g_*) = 1$. Da $\Delta : H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(S^1)$ surjektiv ist, denn $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$, folgt $\dim H^1(S^1) = 2 - 1 = 1$. Also $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ und somit gilt die Aussage für $n = 1$ und beliebiges k . ///

³Alternativ könnten wir hier die Poincaré-Dualität, Theorem X.3.3 zitieren.

VIII.3. Abbildungsgrad

VIII.3.1 Definition (Abbildungsgrad)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei kompakten, zusammenhängenden und orientierten Mannigfaltigkeiten M^m und N^m ohne Rand, so gilt mit der Poincaré-Dualität, Theorem X.3.3⁴ $H_{dR}^m(M) \cong \mathbb{R} \cong H_{dR}^m(N)$. Also existiert eine lineare Abbildung $\deg f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^m(N, \mathbb{R}) & \xleftarrow{f^*} & H_{dR}^m(M, \mathbb{R}) \\ \uparrow \int_N & & \uparrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\deg f} & \mathbb{R} \end{array}$$

kommutiert. Da $\text{Hom}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ gilt, ist dies eine reelle Zahl $\deg f \in \mathbb{R}$ und diese heißt *Abbildungsgrad* von f .

VIII.3.2 Bemerkung (Berechnung)

Man kann dies ausrechnen, indem wir eine m -Form $\omega \in \Omega^m(N, \mathbb{R})$ mit $\int_N \omega \neq 0$ wählen. Insbesondere gilt $d\omega = 0$, da $\Omega^{(m+1)}(N) = \{0\}$. Und somit ist $[\omega] \in H_{dR}^m(N, \mathbb{R})$ nicht trivial, da

$$H_{dR}^m(N) \cong \mathbb{R} : [\omega] \mapsto \int_N \omega.$$

Somit liefert obiges Diagramm

$$\int_M f^* \omega = \deg f \cdot \int_N \omega, \text{ d. h. } \frac{\int_M f^* \omega}{\int_N \omega} = \deg f.$$

Wir wollen nun zeigen, dass für reguläre Werte q von f

$$\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \xi_p$$

gilt, wobei $\xi_p =$ die Orientierung von $D_p f$ ist.

VIII.3.3 Bemerkung (Homotopie-Invarianz)

Nach Satz VIII.1.7 ist \deg invariant unter Homotopie.

VIII.3.4 Definition (Reguläre Punkte und Werte, singuläre Punkte)

Für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißt

⁴Wir zitieren diese hier nur.

- $p_0 \in M$ regulärer Punkt von f , falls $D_{p_0}f : T_{p_0}M \rightarrow T_{f(p_0)}N$ maximalen Rang hat.
- $q_0 \in N$ regulärer Wert von f , falls jeder Urbildpunkte $p_0 \in f^{-1}(q_0)$ von q_0 ein regulärer Punkte ist.
- $p_0 \in M$ singulärer Punkt von f , falls $D_{p_0}f : T_{p_0}M \rightarrow T_{f(p_0)}N$ nicht maximalen Rang hat.

VIII.3.5 Satz (Satz von Sard)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten M und N , so hat die Menge der singulären Werte von f Maß Null. Insbesondere liegen die regulären Werte dicht in Bild f , falls f auf keiner Zusammenhangskomponente von M konstant ist.

BEWEIS

Wird hier nicht erbracht, folgt jedoch direkt aus dem Satz von Sard über Funktionen zwischen euklidischen Räumen, der aus dem Grundstudium bekannt ist. ///

VIII.3.6 Theorem (Gradsatz)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei kompakten, zusammenhängenden, orientierten Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ohne Rand und mit gleicher Dimension, so ist der Grad von f eine ganze Zahl, d. h. $\deg f \in \mathbb{Z}$, und $\deg f$ ist „die Anzahl der Urbilder eines beliebigen regulären Wertes von f mit orientierten Vorzeichen gezählt“.

BEWEIS

Für konstantes f gilt dies trivialerweise, also können wir annehmen, dass f nicht konstant ist. Sei $q_0 \in N$ ein regulärer Wert von f , d. h. für alle Urbildpunkte $p \in f^{-1}(q_0)$ hat $d_p f : T_p M \rightarrow T_{q_0} N$ maximalen Rang. Da die Dimensionen von M und N übereinstimmen, gilt insbesondere $\dim T_p M = \dim T_{q_0} N$ und damit ist $d_p f$ ein Isomorphismus. Nach dem inversen Funktionen Theorem existiert eine offene Umgebung $U_p \subseteq M$ von p so, dass

$$f : U_p \xrightarrow{\cong} f(U_p) \subseteq N,$$

ein Diffeomorphismus ist, wobei $f(U_p)$ eine offene Umgebung von q_0 ist. Insbesondere hat $f^{-1}(q_0)$ keinen Häufungspunkt und die Kompaktheit von M sichert damit, dass es nur endlich viele Urbildpunkte gibt, also $f^{-1}(q_0)$ endlich ist. Durch Nummerierung erhalten wir also

$$f^{-1}(q_0) = \{p_1, \dots, p_n\}$$

und wir können durch geeignetes Schneiden von Mengen und der Hausdorff-Eigenschaft ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f : U_i \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist, wobei U_i paarweise disjunkte, offene Umgebungen von p_i sind und V eine vom Index i unabhängige offene Umgebung von q_0 ist.

Für jede m -Form $\omega \in \Omega^m(N, \mathbb{R})$ mit $\text{supp } \omega \subseteq V$ und $\int_N \omega \neq 0$ gilt insbesondere $\text{supp } f^* \omega \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Mit der Transformationsformel folgt daraus

$$\deg f \cdot \int_N \omega = \int_M f^* \omega = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f^* \omega = \sum_{i=1}^n o_i \int_V \omega = \left(\sum_{i=1}^n o_i \right) \int_N \omega,$$

wobei $o_i \in \{\pm 1\}$ die Orientierung von df_{p_i} ist.

Da nach dem Satz von Sard, Satz VIII.3.5 die Menge der regulären Werte dicht liegt, können wir Bild f mit solchen Umgebungen V überdecken und die Existenz eines $\omega \in \Omega^m(N)$ mit $\int_N \omega \neq 0$ sichert damit, dass auch ein $\omega \in \Omega^m(N)$ mit $\int_N \omega \neq 0$ existiert, das wie gewünscht einen eingeschränkten Träger hat. ///

VIII.3.7 Beispiel

Für $f : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^n$ gilt also $\deg f = n$, da klar ist, dass für alle Punkte $u \in S^1$ bereits $|f^{-1}(u)| = n$ gilt.

VIII.3.8 Korollar (Rechenregel des Abbildungsgrades)

Sind $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen zwischen drei kompakten, zusammenhängenden, orientierten Mannigfaltigkeiten M , N und P mit gleicher Dimension, d. h. $\dim M = \dim N = \dim P$, ohne Rand, so gilt

1. $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$
2. ist f ein Diffeomorphismus, dann ist $\deg f = \pm 1$ – je nachdem, ob f orientierungserhaltend oder -umkehrend ist
3. ist f nicht surjektiv, dann ist $\deg f = 0$

BEWEIS

Der erste Teil folgt daraus, dass $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten Aussage, da offensichtlich $\deg \text{id} = 1$ gilt.

Für die dritte Aussage beachten wir, dass für alle $q_0 \in N \setminus \text{Bild } f$ bereits $f^{-1}(q_0) = \emptyset$ gilt, also q_0 ein regulärer Wert ist. Damit ist $\deg f = 0$. ///

VIII.3.9 Satz (von der Kämmlbarkeit des Igels)

Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S^{2m})$ auf einer gerade dimensionalen Sphäre hat mindestens eine Nullstelle.

BEWEIS

Hat $X \in \mathfrak{X}(S^{2m})$ keine Nullstelle, so ist

$$F : \mathbb{R} \times S^{2m} \rightarrow S^{2m} : (t, p) \mapsto \cos(\pi t)p + \sin(\pi t) \frac{X(p)}{\|X(p)\|} \in S^{2m},$$

wohldefiniert, da $p \perp X(p)$ und somit gilt $\|F(t, p)\| = 1$. Wir erkennen, dass $F(0, \cdot) = \text{id}_{S^{2m}}$ und $F(1, \cdot) = -\text{id}_{S^{2m}}$. Also ist $\text{id}_{S^{2m}}$ homotop zu $-\text{id}_{S^{2m}}$.

Wir erkennen außerdem, dass $\deg(-\text{id}_{S^{2m}}) = (-1)^{2m+1}$. Betrachten wir nun eine orientierte Basis \mathbf{v} von $T_p M$ so, dass $[p, \mathbf{v}]$ die Standard Orientierung im \mathbb{R}^{2m+1} besitzt, so erhalten wir

$$(-\text{id})^*[p, \mathbf{v}] = [-p, -\mathbf{v}] = (-1)^{2m-1}[p, \mathbf{v}]$$

und damit erhalten wir mit

$$1 = \deg \text{id}_{S^m} = \deg(-\text{id}_{S^m}) = (-1)^{2m-1}$$

einen Widerspruch.

///

Kapitel IX.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

IX.1. Riemannsche Vektorbündel

IX.1.1 Motivation (Für die Riemannschen Metriken)

Wir möchten eine weitere Eigenschaft der euklidischen Räume in Mannigfaltigkeiten übertragen, nämlich das Messen von Längen. Eine Möglichkeit dafür wäre, die Mannigfaltigkeit mit einer derartigen Metrik zu versehen, dass die Topologie von dieser induziert wird. Jedoch ist unklar, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen das geht und dies wäre nicht notwendigerweise in irgendeiner Form verträglich mit den Karten.

Zugefügt bzw. umgeschrieben

Stattdessen versuchen wir kürzeste Wege $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ zu finden und interpretieren die Länge des Weges als Abstand zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$. In den euklidischen Räumen gilt dabei

$$L_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t) | \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}}} dt$$

und eben dieses Konzept möchten wir übertragen. Das heißt, wir benötigen auf dem Tangentialraum $T_p M$ ein Skalarprodukt $g|_p(\cdot, \cdot)$. Wir betrachten dies direkt auf Vektorbündeln.

IX.1.2 Definition (Bündelmetrik & Riemannsches Vektorbündel)

Eine Abbildung $g \in \Gamma(\text{Bil}(E; \mathbb{R}))$ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt *Bündelmetrik*, falls sie positiv definit und symmetrisch bzw. hermitesch ist, d. h. für alle Punkte $p \in M$, Tangentialvektoren $\xi, \zeta, \varsigma \in T_p M$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} g|_p(\xi, \zeta) &= g|_p(\zeta, \xi) && \text{bzw.} && \text{(Symmetrie)} \\ g|_p(\xi, \zeta) &= \overline{g|_p(\zeta, \xi)} && && \text{(Hermitesch)} \\ 0 \leq g|_p(\xi, \xi) & \text{ mit } g|_p(\xi, \xi) = 0 \iff \xi = 0 && && \text{(Pos. Definitheit)} \\ g|_p(\alpha\xi + \beta\zeta, \varsigma) &= \alpha g|_p(\xi, \varsigma) + \beta g|_p(\zeta, \varsigma), && && \text{(Bilinearität)} \end{aligned}$$

wobei $g(\cdot, \cdot) := \langle \cdot | \cdot \rangle_g := g(\cdot, \cdot)$.

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und $g \in \Gamma(\text{Bil}(E; \mathbb{R}))$ eine Bündelmetrik, so heißt (E, g) *Riemannsches Vektorbündel*.

IX.1.3 Bemerkung

In dieser Allgemeinheit eingefügt

Ist $(E, g) \rightarrow M$ ein Riemannsches Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_U)^r$ ein lokaler Rahmen von E sowie $\Psi^* = (\psi^{*1}, \dots, \psi^{*r}) \in \Gamma(E^*|_U)^r$ der zu diesem Dualrahmen von E^* , so gilt für zwei beliebige Schnitte $\varphi = \varphi^i \psi_i, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^i \psi_i \in \Gamma(E)$

$$g(\varphi^i \psi_i, \tilde{\varphi}^j \psi_j) = g(\psi_i, \psi_j) \cdot \varphi^i \tilde{\varphi}^j = g(\psi_i, \psi_j) \cdot (\psi^{*i} \otimes \psi^{*j})(\varphi, \tilde{\varphi}),$$

also gilt für $g_{ij} := g(\psi_i, \psi_j)$ bereits $g = g_{ij} \psi^{*i} \otimes \psi^{*j}$.

IX.1.4 Satz und Definition (Musikalische Isomorphismen)

Aus der langen Bemerkung 3.1.4 (Nummer des original Skripts) herausgeholt.

Für ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit einer Bündelmetrik g heißen die Abbildungen

$$(\cdot)^b : E \rightarrow E^* : \psi \mapsto g(\psi, \cdot) =: \psi^b$$

bzw.

$$(\cdot)^\sharp : E^* \rightarrow E : a \mapsto a^\sharp \quad \text{mit} \quad a(b) = g(a^\sharp, b) \quad \forall b \in E.$$

musikalische Isomorphismen bezüglich g .

BEWEIS

Dass dies Isomorphismen sind, folgt, da (E_p, g_p) ein Hilbertraum ist. ///

IX.1.5 Bemerkung (In Koordinaten)

Eingefügt

Ist $\varphi \in \Gamma(E^r)$ ein Schnitt eines Vektorbündels $E \rightarrow M$, so gilt lokal für einen Rahmen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_U)^r$ und gewisse Funktionen $\varphi_i \in C^\infty(U)$ bereits $\varphi \in \Psi \varphi = \psi_i \varphi^i$, also auch

$$\varphi^b(\psi_j) = g(\psi_i \varphi^i, \psi_j) = \varphi^i g(\psi_i, \psi_j) = \varphi^i g_{ij} = \varphi^i g_{ik} \psi^{*k}(\psi_j)$$

und damit $\varphi^b = \varphi^i g_{ij} \psi^{*j}$, wenn $\Psi^* = (\psi^{*1}, \dots, \psi^{*r})$ der Duale Rahmen ist.

IX.1.6 Lemma (Existenz von Metriken)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M , so existiert eine Riemannsche Metrik g auf E .

BEWEIS

Wurde mehrfach als „klar“ erwähnt, aber nie bewiesen

Wir wählen eine Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ der Mannigfaltigkeit aus Bündel-Karten (U_α, x_α) , d. h. $M \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Nach Zerlegung der Eins können wir eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ wählen, d. h.

$$\varphi_\alpha \in C^\infty(M; [0; 1]), \text{ supp } \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha, \sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv \mathbb{1}_M$$

und definieren nun die Metrik mittels $g := \sum_\alpha \varphi_\alpha(x_\alpha^* g_\alpha)$, wobei g_α die triviale Metrik auf dem trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{K}^r$ ist. Dass dies nicht ausgeartet ist, folgt aus der Tatsache, dass $0 \leq \varphi_\alpha$ die Funktionen der Zerlegung der Eins nicht-negative Funktionen sind. ///

Für eine Bündelmetrik eines Vektorbündel $E \rightarrow M$ und zwei Schnitte $\psi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ gilt immer $g(\psi, \eta) = (p \mapsto g|_p(\psi_p, \eta_p)) \in C^\infty(M)$. Entsprechend ist es eine interessante Frage, was die Ableitung einer solchen Abbildung ist:

IX.1.7 Motivation (Für die metrischen Zusammenhänge)

Ist $\nabla = d$ der triviale Zusammenhang auf $TM = M \times \mathbb{R}^r$ und $g(\cdot, \cdot) := \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ die triviale Metrik auf $M = \mathbb{R}^r$, so gilt für $f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R}^r) = \mathfrak{X}(M)$

$$d \langle f | g \rangle_{\mathbb{R}} = \langle df | g \rangle_{\mathbb{R}} + \langle f | dg \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \nabla f | g \rangle_{\mathbb{R}} + \langle f | \nabla g \rangle_{\mathbb{R}},$$

also $d_X \langle f | g \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \nabla_X f | g \rangle_{\mathbb{R}} + \langle f | \nabla_X g \rangle_{\mathbb{R}}$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$. Diese „Produktregel“ ist eine zentrale Eigenschaft eines Zusammenhangs auf dem Tangentialbündel.

IX.1.8 Definition (Metrischer Zusammenhang)

Ein Zusammenhang ∇ auf einem Riemannschen Vektorbündel $(E, g) \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M heißt *metrisch* oder *Riemannscher Zusammenhang* (oder *symmetrisch* bzw. *hermitesch*), falls g parallel ist, d. h. $\nabla^{\Gamma(\text{Bil}(E))} g = 0$ bzw. gleichwertig falls

$$X \bullet g(\psi, \eta) = g(\nabla_X \psi, \eta) + g(\psi, \nabla_X \eta) \quad \forall \psi, \eta \in \Gamma(E), X \in \mathfrak{X}(M).$$

IX.1.9 Satz (Existenz von metrischen Zusammenhängen)

Ist $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bündelmetrik auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$, so existiert ein bezüglich g metrischer Zusammenhang ∇ auf E .

BEWEIS

Wir wählen mit Lemma V.1.20 einen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf E . Nach V.1.10 existiert für jeden anderen Zusammenhang ∇ auf E immer ein $\omega \in \Omega^1(\text{End } E)$ mit $\nabla = \tilde{\nabla} + \omega$. Wir wollen nun erreichen, dass für alle Schnitte $\psi, \eta \in \Gamma(E)$ und Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ immer

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} (\nabla_X g)(\psi, \eta) = X \bullet g(\psi, \eta) - g(\nabla_X \psi, \eta) - g(\psi, \nabla_X \eta) \\ &= X \bullet g(\psi, \eta) - g(\tilde{\nabla}_X \psi, \eta) - g(\omega(X)\psi, \eta) - g(\psi, \tilde{\nabla}_X \eta) - g(\psi, \omega(X)\eta) \\ &= (\tilde{\nabla}_X g)(\psi, \eta) - g(\omega_X \psi, \eta) - g(\psi, \omega_X \eta) \end{aligned}$$

gilt. Unter der Annahme, dass ω bezüglich g selbstadjungiert bzw. hermitesch ist, gilt also

$$0 = (\tilde{\nabla}_X g)(\psi, \eta) - 2g(\omega_X \psi, \eta)$$

Wir definieren also

$$\omega_X(\psi) = \left(\frac{1}{2} (\nabla_X g)(\psi, \cdot) \right)^\# \in \Gamma(E)$$

Eingefügt

Aus Abschnitt IX.2
hierher
verallgemeinertAus der langen
Bemerkung 3.1.4
(Nummer des original
Skripts) herausgeholt.

und müssen nur noch nachprüfen, dass dies selbstadjungiert bzw. hermitesch ist. Dies gilt wiederum, da für zwei Schnitte $\psi, \eta \in \Gamma(E)$

$$g(\omega\psi, \eta) = g\left(\left(\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}g)(\psi, \cdot)\right)^\#, \eta\right) = \frac{1}{2}(\nabla g)(\psi, \eta)$$

gilt und die rechte Seite symmetrisch bzw. hermitesch in ψ und η ist. ///

IX.1.10 Lemma (Krümmung metrischer Zusammenhänge)

Ist ∇ ein metrischer Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit einer Bündelmetrik g , so ist der Riemann-Tensor anti-adjungiert bezüglich g , d. h.

$$g(\nabla\mathcal{R}(X, Y)\psi, \eta) = -g(\psi, \nabla\mathcal{R}(X, Y)\eta) \quad \forall \psi, \eta \in \Gamma(E).$$

BEWEIS

Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und zwei Schnitte $\psi, \eta \in \Gamma(E)$ gilt

$$\begin{aligned} g(\eta, \nabla_X \nabla_Y \psi) &= d_X(g(\eta, \nabla_Y \psi)) - g(\nabla_X \eta, \nabla_Y \psi) \\ &= d_X d_Y(g(\eta, \psi)) - d_X(g(\nabla_Y \eta, \psi)) - d_Y(g(\nabla_X \eta, \psi)) \\ &\quad + g(\nabla_Y \nabla_X \eta, \psi). \end{aligned}$$

Da dies symmetrisch in X und Y ist, folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla\mathcal{R}(X, Y)\psi, \eta) &= g(\eta, \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X, Y]}\psi) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \eta - \nabla_X \nabla_Y \eta, \psi) - g(\nabla_{[Y, X]}\eta, \psi) \\ &\quad - d_{[X, Y]}(g(\eta, \psi)) \\ &= g(\nabla\mathcal{R}(Y, X)\eta, \psi) = -g(\nabla\mathcal{R}(X, Y)\eta, \psi). \end{aligned} \quad ///$$

IX.1.11 Lemma (Existenz von orthonormalen Rahmen)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einer Bündelmetrik g , so existieren lokal bezüglich g orthonormale Rahmen, d. h.

$$\forall p \in M \quad \exists \Psi \in \Gamma(E|_U)^r \text{ Rahmen um } p \in U : \forall q \in U : g|_p(\psi_{i_q}, \psi_{j_q}) = \delta_{ij}.$$

Ist ∇ ein metrischer Zusammenhang auf E , so ist jede zu einem orthonormalen Rahmen gehörende Zusammenhangsform ω bereits schiefsymmetrisch bzw. schieferhermitsch.

BEWEIS

Der erste Teil folgt, wie die Existenz einer Orthonormalbasis in jedem endlich dimensionalen Hilbertraum, mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren. Für

Aus dem Teil zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten hierher verallgemeinert

Aus der langen Bemerkung 3.1.4 (Nummer des original Skripts) herausgeholt.

den zweiten Teil sei $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E|_U)^r$ ein orthonormaler Rahmen und ω die zugehörige Zusammenhangsform, d. h. $\nabla\Psi = \Psi\omega = (\psi_i\omega^i_j)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \overline{\omega^i_j} &= g(\psi^i, \psi_k\omega^k_j) = g(\psi^i, \nabla\psi_j) \stackrel{\nabla g=0}{=} d(g(\psi^i, \psi_j)) - g(\nabla\psi^i, \psi_j) \\ &= -g(\nabla\psi^i, \psi_j) = g(\psi^k\omega_k^i, \psi_j) = \omega_j^i. \end{aligned} \quad ///$$

Wir wollen nun noch kurz eine weitere Krümmungsgröße einführen, die sich leicht aus der Riemannschen ableiten lässt.

IX.1.12 Definition (Skalarkrümmung)

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einer Bündelmetrik g und einem metrischen Zusammenhang ∇ , so heißt $\nabla^g\mathcal{S}$ die *Skalarkrümmung* von ∇ und g , wobei

$$\nabla^g\mathcal{S} : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \nabla^g\mathcal{S}(p) := \text{tr } \nabla\text{Ric} = \sum_{i=1}^n \nabla\text{Ric}(\xi_i, \xi_i),$$

falls $\{\xi_i\}$ eine Orthonormalbasis von E_p bezüglich g ist.¹

Wir können Lemma IX.1.11 erweitern, falls der betrachtete Zusammenhang flach ist:

IX.1.13 Lemma (Existenz von flachen, orthonormalen Rahmen)

Ist $E^r \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einer Bündelmetrik g und einem flachen, metrischen Zusammenhang ∇ , so existieren lokal flache, bezüglich g orthonormale Rahmen.

Aus der langen Bemerkung 3.1.4 (Nummer des original Skripts) herausgeholt.

BEWEIS

Wir wählen mit Satz V.3.15 lokal einen flachen Rahmen $\Psi \in \Gamma(E|_U)^r$ und erkennen

$$d(g(\psi_i, \psi_j)) = \underbrace{(\nabla g)}_{=0}(\psi_i, \psi_j) + g(\nabla\psi_i, \psi_j) + g(\psi_i, \nabla\psi_j) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

damit genügt es den Rahmen in einem Punkt zu orthonormalisieren. Dies funktioniert wieder mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren. ///

IX.2. Riemannsche Mannigfaltigkeiten & - Krümmung

IX.2.1 Definition (Riemannsche Mannigfaltigkeit, Riemannsche Metrik)

Ein Paar (M, g) heißt *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, falls M eine glatte Mannigfaltigkeit und $g \in \Gamma(\text{Bil}_{\mathbb{R}}(TM, TM; \mathbb{R}))$ eine Bündelmetrik auf TM ist. In diesem Fall heißt g *Riemannsche (Faser-)Metrik*.

Formaler ausgedrückt

¹Dies ist nicht unabhängig von der Basiswahl, wenn wir nicht Orthonormalität fordern – siehe Beispiel A.2.7. Insbesondere ist dies nicht ohne eine Bündelmetrik definiert. Nach Lemma A.2.9 ist dies mit dieser zusätzlichen Forderung wohldefiniert.

Es sei am Rand angemerkt, dass dies *auch* eine *topologische* Metrik auf der Mannigfaltigkeit impliziert.

IX.2.2 Bemerkung (Topologische Metrik einer Riem. Mannigfaltigkeit)

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist

$$d(p, q) := \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{g|_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \mid \begin{array}{l} \gamma : [0; 1] \rightarrow M \text{ glatte Kurve} \\ \text{mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \end{array} \right\}$$

eine topologische Metrik, die die Topologie der Mannigfaltigkeit induziert.

Wir beweisen dies nicht, es folgt aus der lokalen Existenz von kürzesten Verbindungen, Satz IX.3.15.

IX.2.3 Bemerkung (Lokale Darstellung)

Wie in Bemerkung IX.1.3 können wir auch diese Metrik lokal in Koordinaten ausdrücken. Da jede Karte (U, x) der Mannigfaltigkeit M^m in natürlicher Weise den Rahmen $\partial/\partial x = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$ induziert, betrachten wir für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine Karte (U, x) die Funktionen $g_{ij}(p) := g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) \in C^\infty(U)$ und erhalten für zwei Tangentialvektoren $\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$ und $\zeta = \zeta^j \partial/\partial x^j$

$$g(\xi, \zeta) = g\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \zeta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi^i \zeta^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} \xi^i \zeta^j.$$

Also gilt wiederum

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{IX.1}$$

und wie in Bemerkung IX.1.5 erhalten wir für ein Vektorfeld $X = X^i \partial/\partial x^i \in \mathfrak{X}(M)$ die zugehörige 1-Form $\omega = X^\flat \in \Omega^1(M)$, d. h.

$$\omega(Y) = g(X, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

lokal mittels

$$\omega = X^\flat = X^i g_{ij} dx^j \tag{IX.2}$$

bzw. für eine 1-Form $\omega = \omega_i dx^i \in \Omega^1(M)$ das zugehörige Vektorfeld $X = \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ lokal mittels

$$X = \omega^\sharp = \omega_i g^{ij} \partial/\partial x^j, \tag{IX.3}$$

wobei $(g^{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij}^{-1}$ die Inverse der Matrix-Darstellung der Metrik ist. Dabei ist die Matrix $(g_{ij})_{ij}$ invertierbar, da g nicht ausgeartet ist.

IX.2.4 Definition (Isometrie)

Eine Abbildung $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten heißt *Isometrie*, falls

$$f^*h = g, \quad \text{d. h.} \quad \forall p \in M : \forall v, w \in T_p M : g|_p(v, w) = h|_{f(p)}(D_p f(v), D_p f(w)).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle Punkte $p \in M$ durch $D_p f : (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{f(p)} N, h_{f(p)})$ eine lineare Isometrie gegeben ist.

Formalisiert bzw. ausgeführt

IX.2.5 Bemerkung

Wenn f eine Isometrie ist, dann ist f

1. eine Immersion, da $\ker Df_p = 0$ für $p \in M$. Dies folgt aus der positiven Definitheit. Insbesondere ist f lokal injektiv.
2. ein lokaler isometrischer Diffeomorphismus, falls $\dim M = \dim N$.

Das sogenannte „Wunder der Riemannschen Geometrie“ ist, dass es auf dem Tangentialraum jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau einen metrischen, torsionsfreien Zusammenhang $\mathcal{S}\nabla$ gibt und dass dieser die Nullkrümmung, wie wir in Theorem IX.2.19 zeigen werden, einfach charakterisiert.

IX.2.6 Satz und Definition (Levi-Civita-Zusammenhang)

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gibt es genau einen torsionsfreien, metrischen Zusammenhang $\mathcal{S}\nabla$ auf TM . Dieser heißt *Levi-Civita-Zusammenhang*.

BEWEIS

Ist ∇ ein Zusammenhang der metrisch und torsionsfrei ist, so folgt für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Korrigiert.

$$\begin{aligned} Z \bullet g(X, Y) - Y \bullet g(Z, X) + X \bullet g(Y, Z) & \\ &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) - g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Z + \nabla_Z X, Y) + \underbrace{g(X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z)}_{g(X, [Z, Y])} + \underbrace{g(Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X)}_{g(Z, [X, Y])} \\ &= g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y]) + g([X, Z], Y) + 2g(\nabla_Z X, Y) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die *Koszul-Formel*

$$g(\nabla_Z X, Y) = \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} &Z \bullet g(X, Y) - Y \bullet g(Z, X) + X \bullet g(Y, Z) \\ &-g(X, [Z, Y]) - g(Z, [X, Y]) - g([X, Z], Y) \end{aligned} \right). \quad (\text{IX.4})$$

Da g nicht ausgeartet ist und Y beliebig gewählt werden kann, können wir damit $\nabla_Z X$ in Termen, die unabhängig vom Zusammenhang sind, ausdrücken. Dass dies tatsächlich einen Zusammenhang ergibt, spricht die Linearität bzw. Leibnitzregel erfüllt, wird hier nicht nachgerechnet. Damit erhalten wir sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit des Zusammenhangs. ///

IX.2.7 Motivation (Für die Christoffelsymbole)

Für eine Karte (U, x) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gilt für den Levi-Civita Zusammenhang

$$\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \omega_j^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Offensichtlich charakterisieren solche Ausdrücke Zusammenhänge eindeutig und wir können dadurch eine lokale Darstellung des Zusammenhangs erhalten.

IX.2.8 Definition (Christoffelsymbole)

Ist (U, x) eine Karte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M , so heißt

$$\mathcal{G}\Gamma_{ij}{}^k := dx^k \left(\mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{IX.5}$$

Christoffelsymbole bezüglich (U, x) .

IX.2.9 Lemma (Erste Gleichung für Christoffelsymbole)

Ist (U, x) eine Karte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M , so gilt²

$$\overline{\mathcal{G}\Gamma}_{ij}{}^l = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{kl} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{G}_{jk}}{\partial x^i} \right). \tag{IX.4'}$$

BEWEIS

Da der Levi-Civita Zusammenhang metrisch ist, erhalten wir mit der Definition der Christoffelsymbole, Gleichung (IX.5), der lokalen Darstellung der Metrik (IX.1) und Gleichung (IX.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{kl} \mathcal{G}\Gamma_{ij}{}^l &= \mathcal{G}_{kl} dx^l \left(\mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \right) \\ &\quad - \mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \right) + \mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \right) + \mathcal{G} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ki}}{\partial x^j} \right). \end{aligned} \tag{///}$$

IX.2.10 Definition (Riemannscher Krümmungstensor)

Der Krümmungstensor $\mathcal{R} := \mathcal{G}\nabla \mathcal{R}$ des Levi-Civita-Zusammenhangs einer Riemannschen Metrik (M, \mathcal{G}) heißt *Riemannsche-Krümmung* der Metrik \mathcal{G} .

IX.2.11 Bemerkung (Riemannschen Krümmungstensors in Koordinaten)

Nach Bemerkung V.3.12 existieren für eine Karte (U, x) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{G}) gewisse Funktionen $\mathcal{R}_{ijk}{}^l \in C^\infty(U)$ mit

$$\mathcal{R}_{ijk}{}^l = dx^l \left(\mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

Da im Riemannschen Fall mittels der Musikalischen Isomorphismen $TM \cong TM^*$ gilt, wobei $\frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \mathcal{G}_{ij} dx^j$, da

$$\mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, v \right) = \mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = v^j \mathcal{G}_{ij} = g_{ij} dx^j(v)$$

²Die Bezeichnung als (IX.4') kommt daher, dass diese Gleichung ist die lokal Darstellung von Gleichung (IX.4) ist.

Ausgeführt bzw. bewiesen

gilt, können wir \mathcal{R} mittels

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \quad (\text{IX.6})$$

darstellen, wobei $\mathcal{R}_{ijkl} = g_{lm} \mathcal{R}_{ijk}{}^m$.³

Wir können dies auch durch die Christoffelsymbole, (IX.5) mittels

$$\mathcal{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{\Gamma_{jk}{}^l} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{\Gamma_{ik}{}^l} + g_{\Gamma_{jk}{}^m} g_{\Gamma_{im}{}^l} - g_{\Gamma_{ik}{}^m} g_{\Gamma_{jm}{}^l} \quad (\text{IX.7})$$

bzw.

$$\mathcal{R}_{ijkl} = g_{ln} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{\Gamma_{jk}{}^n} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{\Gamma_{ik}{}^n} + g_{\Gamma_{jk}{}^m} g_{\Gamma_{im}{}^n} - g_{\Gamma_{ik}{}^m} g_{\Gamma_{jm}{}^n} \right) \quad (\text{IX.7'})$$

darstellen. Dafür beachten wir, dass für jede Karte $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$ gilt, also bereits

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijk}{}^l &= dx^l \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= dx^l \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(dx^m \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \right)} \right) \\ &\quad - dx^l \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(dx^m \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \right)} \right) \\ &= dx^l \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(g_{\Gamma_{jk}{}^m} \frac{\partial}{\partial x^m} \right)} \right) - dx^l \left(g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(g_{\Gamma_{ik}{}^m} \frac{\partial}{\partial x^m} \right)} \right) \\ &= dx^l \left(g_{\Gamma_{jk}{}^m} g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^m}} \right) + dx^l \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{\Gamma_{jk}{}^m} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &\quad - dx^l \left(g_{\Gamma_{ik}{}^m} g_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^m}} \right) - dx^l \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{\Gamma_{ik}{}^m} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= g_{\Gamma_{jk}{}^m} g_{\Gamma_{im}{}^l} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{\Gamma_{jk}{}^l} - g_{\Gamma_{ik}{}^m} g_{\Gamma_{jm}{}^l} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{\Gamma_{ik}{}^l} \end{aligned}$$

folgt.

IX.2.12 Lemma (Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors)

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so

- ist \mathcal{R} anti-symmetrisch in den ersten beiden Koordinaten, d. h. $\mathcal{R}(X, Y) = -\mathcal{R}(Y, X)$ bzw. gleichwertig $\mathcal{R}_{ijkl} = -\mathcal{R}_{jikl}$;
- ist \mathcal{R} anti-adjungiert bezüglich g , d. h.

$$g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathcal{R}(X, Y)W, Z) (= -g(Z, \mathcal{R}(X, Y)W))$$

bzw. gleichwertig $\mathcal{R}_{ijkl} = -\mathcal{R}_{ijlk}$;

Gleichwertige Koordinatendarstellungen eingefügt

³Wir werden des häufigeren mittels der lokalen Darstellung g_{ij} von g Indices „verschieben“, d. h. nutzen, dass wir durch die Summation der Einstein Notation „aus einem oberen Index a^i einen unteren machen können, indem wir $a^i g_{ij}$ betrachten“.

- ist \mathcal{R} torsionsfrei bezüglich g , d. h.

$$g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathcal{R}(Z, W)X, Y)$$

bzw. gleichwertig $\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij}$;

- erfüllt \mathcal{R} die 1. Bianchi-Identität, d. h.

$$\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0 \quad (\text{IX.8})$$

bzw. gleichwertig $\mathcal{R}_{ijkl} + \mathcal{R}_{jkil} + \mathcal{R}_{kijl} = 0$;

- erfüllt \mathcal{R} die 2. Bianchi-Identität, d. h.

$$(\mathcal{L}_X \mathcal{R})(Y, Z) + (\mathcal{L}_Y \mathcal{R})(Z, X) + (\mathcal{L}_Z \mathcal{R})(X, Y) = 0. \quad (\text{IX.9})$$

BEWEIS

Ausgeführt

Dass dies anti-symmetrisch und anti-adjungiert ist sowie die 1. Bianchi-Identität, Gleichung (IX.8) erfüllt, folgt aus der Definition der Krümmung und als Spezialfall von Lemma IX.1.10 sowie Lemma V.3.13, da der Levi-Cevita Zusammenhang \mathcal{L} metrisch sowie torsionsfrei ist.

„torsionsfrei“: Mit der bereits gezeigten 1. Bianchi Identität folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) + g(\mathcal{R}(Y, Z)X, W) + g(\mathcal{R}(Z, X)Y, W) \\ &\quad + g(\mathcal{R}(W, X)Y, Z) + g(\mathcal{R}(X, Y)W, Z) + g(\mathcal{R}(Y, W)X, Z) \\ &\quad + g(\mathcal{R}(Z, W)X, Y) + g(\mathcal{R}(W, X)Z, Y) + g(\mathcal{R}(X, Z)W, Y) \\ &\quad + g(\mathcal{R}(Y, Z)W, X) + g(\mathcal{R}(Z, W)Y, X) + g(\mathcal{R}(W, Y)Z, X). \end{aligned}$$

Da \mathcal{R} anti-adjungiert bezüglich g ist, ergeben die ersten zwei „Spalten“ 0 und wir erhalten mittels der Anti-Symmetrien

$$\begin{aligned} 0 &= g(\mathcal{R}(Z, X)Y, W) + g(\mathcal{R}(Y, W)X, Z) + g(\mathcal{R}(X, Z)W, Y) \\ &\quad + g(\mathcal{R}(W, Y)Z, X) \\ &= 2g(\mathcal{R}(Z, X)Y, W) + 2g(\mathcal{R}(Y, W)X, Z). \end{aligned}$$

„2. Bianchi-Identität“: Wir wählen mit Lemma IX.1.13 einen orthonormalen Koordinatenvektorfelder $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathfrak{X}(U)^m$ von TM um $p \in U \subseteq M$. Wir können annehmen, dass $\mathcal{L}_{X_i} X_j = 0$ in p gilt und $[X_i, X_j]_p = 0$, also ist $\mathcal{R}(X_j, X_k) = \mathcal{L}_{X_j} \mathcal{L}_{X_k} - \mathcal{L}_{X_k} \mathcal{L}_{X_j}$ und damit gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{R})(X_j, X_k) &= \mathcal{L}_{X_i}(\mathcal{R}(X_j, X_k)) - \mathcal{R}(\mathcal{L}_{X_i} X_j, X_k) - \mathcal{R}(X_i, \mathcal{L}_{X_i} X_k) \\ &= \mathcal{L}_{X_i}(\mathcal{R}(X_j, X_k)) \\ &= \mathcal{L}_{X_i}(\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{L}_{X_k} - \mathcal{L}_{X_k} \mathcal{L}_{X_j}). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{R}^{\nabla_{X_i}})(X_j, X_k) + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_j}})(X_k, X_i) + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_k}})(X_i, X_j) \\
 &= \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} + \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \\
 &\quad + \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \\
 &= (\mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}}) \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}}) \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \\
 &\quad + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} - \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}}) \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}} \\
 &= \mathcal{R}(X_i, X_j) \mathcal{R}^{\nabla_{X_k}} + \mathcal{R}(X_k, X_i) \mathcal{R}^{\nabla_{X_j}} + \mathcal{R}(X_j, X_k) \mathcal{R}^{\nabla_{X_i}}.
 \end{aligned}$$

und entsprechend folgt

$$((\mathcal{R}^{\nabla_{X_i}})(X_j, X_k) + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_j}})(X_k, X_i) + (\mathcal{R}^{\nabla_{X_k}})(X_i, X_j))(X_l) = 0.$$

Da \mathcal{R} eine 2-Form, also C^∞ -linear, ist, folgt die Aussage. ///

IX.2.13 Bemerkung (Krümmungsgrößen im zwei Dimensionalen)

Ist die Dimension von M gleich zwei, so gilt mit den Symmetrien bereits $\mathcal{R}_{11ij} = \mathcal{R}_{22ij} = \mathcal{R}_{ij11} = \mathcal{R}_{ij22} = 0$ und $\mathcal{R}_{12ij} = -\mathcal{R}_{21ij} = \mathcal{R}_{ij12} = -\mathcal{R}_{ij21}$, also gilt für die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bereits

Ausgeführt

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{1111} & \mathcal{R}_{1112} \\ \mathcal{R}_{1121} & \mathcal{R}_{1122} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{1211} & \mathcal{R}_{1212} \\ \mathcal{R}_{1221} & \mathcal{R}_{1222} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2111} & \mathcal{R}_{2112} \\ \mathcal{R}_{2121} & \mathcal{R}_{2122} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2211} & \mathcal{R}_{2212} \\ \mathcal{R}_{2221} & \mathcal{R}_{2222} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{1212} \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$$

und damit ist \mathcal{R} allein durch den Wert von \mathcal{R}_{1212} bestimmt. Da Aufgrund der Symmetrien bereits $n \cdot \mathcal{R}_{1212} = \mathcal{S}$ gilt, folgt, dass im 2 Dimensionalen die Riemannsche Krümmung \mathcal{R} durch die Skalarkrümmung \mathcal{S} charakterisiert ist.

IX.2.14 Schreibweise

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so schreiben wir $\mathcal{R}ic$ für den Ricci-Tensor $\mathcal{R}ic^{\nabla}$ und \mathcal{S} für die Skalarkrümmung \mathcal{S}^{∇} , d. h.

Eingefügt

$$\mathcal{R}ic(u, v) = \text{tr}(\mathcal{R}(u, \cdot)v) \quad \text{und} \quad \mathcal{S} = \text{tr} \mathcal{R}ic = dx^i \left(\text{tr} \left(\mathcal{R} \left(u, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) v \right) \right),$$

falls $\partial/\partial x^i$ ein lokaler Orthonormalrahmen von TM ist. Wir haben in Bemerkung V.3.12

$$\mathcal{R}ic_{ik} := \mathcal{R}ic \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \mathcal{R}_{ij}{}^j{}_k$$

und

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}ic_i{}^i = \mathcal{R}_{ij}{}^{ij}$$

definiert.

Schnittkrümmung
eingefügt

Wir wollen nun noch mit der *Schnittkrümmung* zweier Tangentialvektoren, welche als die anschauliche *Gaußkrümmung* der durch die zwei Vektoren aufgespannten Fläche angesehen werden kann, eine weitere Krümmungsgröße einführen und werden erkennen, dass diese die Riemannsche Krümmung bereits vollständig charakterisiert.

IX.2.15 Definition (Schnittkrümmung)

Für zwei linear unabhängige Tangentialvektoren $\eta, \zeta \in T_p M$ im Tangentialraum in einem Punkt $p \in M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt $\mathcal{K}(\eta, \zeta)$ die *Schnittkrümmung* der *Tangentialfläche*, die von η und ζ aufgespannt wird, zu g , wobei

$$\mathcal{K}(\eta, \zeta) := \frac{g(\mathcal{R}(\eta, \zeta)\eta, \zeta)}{g(\eta, \eta)g(\zeta, \zeta) - g(\eta, \zeta)^2}.$$

Für eine Karte (U, x) schreiben wir wiederum $\mathcal{K}_{ij} := \mathcal{K}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$.

IX.2.16 Lemma (Riemannsche Krümmung aus Schnittkrümmung)

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so kann der Riemannsche Krümmungstensor aus der Schnittkrümmung erhalten werden, genauer gilt

Neu eingefügt

$$g|_p(\mathcal{R}|_p(\eta, \zeta)\lambda, \tau) = \frac{1}{6} \begin{cases} + \begin{cases} \mathcal{K}|_p(\eta + \tau, \zeta + \lambda) - \mathcal{K}|_p(\eta, \zeta + \lambda) - \mathcal{K}|_p(\tau, \zeta + \lambda) \\ - (\mathcal{K}|_p(\eta + \tau, \zeta) - \mathcal{K}|_p(\eta, \zeta) - \mathcal{K}|_p(\tau, \zeta)) \\ - (\mathcal{K}|_p(\eta + \tau, \lambda) - \mathcal{K}|_p(\eta, \lambda) - \mathcal{K}|_p(\tau, \lambda)) \end{cases} \\ - \begin{cases} \mathcal{K}|_p(\zeta + \tau, \eta + \lambda) - \mathcal{K}|_p(\zeta, \eta + \lambda) - \mathcal{K}|_p(\tau, \eta + \lambda) \\ - (\mathcal{K}|_p(\zeta + \tau, \eta) - \mathcal{K}|_p(\zeta, \eta) - \mathcal{K}|_p(\tau, \eta)) \\ - (\mathcal{K}|_p(\zeta + \tau, \lambda) - \mathcal{K}|_p(\zeta, \lambda) - \mathcal{K}|_p(\tau, \lambda)) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{IX.10})$$

falls $\eta, \zeta, \lambda, \tau \in T_p M$ vier bezüglich $g|_p$ orthonormale Tangentialvektoren an einem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit sind.

BEWEIS

Gleichung (IX.10) folgt durch eine direkte, einfache Rechnung bei der wir die Symmetrien der Riemannschen Krümmung ausnutzen. Da nach Lemma IX.1.11 immer ein orthogonaler Rahmen⁴ existiert und g nicht ausgeartet ist, folgt aus Gleichung (IX.10) tatsächlich, dass die Schnittkrümmungen die Riemannsche Krümmung charakterisieren. ///

Neu eingefügt

Durch das vorangehende Lemma IX.2.16 erhalten wir für einen Orthonormalrahmen $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ von $T_p M$ die Darstellung

$$g \text{ Ric } |_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{K}|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

der Ricci-Krümmung durch die Schnittkrümmungen und erkennen dadurch, dass die Ricci-Krümmung (bis auf einen Faktor n) eine Mittelung der Gaußkrümmungen der

⁴Wir bemerken, dass dieser nicht notwendigerweise durch eine Karte induziert werden kann.

Tangentialflächen an diesem Punkt ergibt, die den gegebenen Vektor beinhalten. Gleichartig erhalten wir die Darstellung

$$gS|_p = \sum_{i < j} \mathcal{K}|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

der Skalar­krümmung durch die Schnittkrümmungen und erkennen wiederum, dass die Skalar­krümmung (bis auf einen Faktor) eine Mittelung der Gaußkrümmungen der Tangentialflächen an diesem Punkt ergibt.

IX.2.17 Lemma (Diffeomorphismen in Riemannsche Mannigfaltigkeiten)

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von einer Mannigfaltigkeit M in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (N, g) , so gilt

1. $TM \cong f^*TN$ sind als Bündel über M isomorph, vermöge $(p, v) \mapsto D_p f(v)$. Wir bezeichnen diesen Isomorphismus wieder mit Df .
2. $f : M \rightarrow N$ ist eine Isometrie bezüglich f^*g und g .
3. $f^*g\nabla = (Df)_* f^*g\nabla$.
4. $f^*g\mathcal{R} = (Df)^{-1} \circ \mathcal{R} \circ Df$, d. h.

$$f^*g\mathcal{R}(X, Y)Z = Df^{-1} \left(\mathcal{R}(Df(X), Df(Y))Df(Z) \right) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

5. $f^*g\text{Ric} = f^*g\text{Ric}$, d. h.

$$f^*g\text{Ric}(X, Y) = g\text{Ric}(Df(X), Df(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

6. $f^*gS = gS \circ f = f^*gS$.

Insbesondere bleiben alle Krümmungsgrößen erhalten, wenn $f : M \rightarrow N$ ein isometrischer Diffeomorphismus zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist.

BEWEIS

Direkt aus den Definitionen folgt Aussage „1.“ und alle weiteren Aussagen ergeben sich aus „3.“. Dies zeigen wir wiederum über die Eindeutigkeit des Levi-Cevita Zusammenhangs. Wir definieren $\tilde{\nabla} := (Df)^{-1}_* (f^*g\nabla)$, wobei Df wie in 1. aufgefasst wird, d. h.

$$\tilde{\nabla}_X Y = Df^{-1} \left(g\nabla_{Df(X)} Df(Y) \right) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Somit gilt für $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ und $X := Df(\tilde{X}), Y := Df(\tilde{Y}), Z := Df(\tilde{Z})$

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}(f^*g) \right) (\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= d_Z \left(f^*g(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right) - f^*g(\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{X}, \tilde{Y}) - f^*g(\tilde{X}, \tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{Y}) \\ &= d_Z(g(X, Y)) - g(g\nabla_Z X, Y) - g(X, g\nabla_Z Y) = 0, \end{aligned}$$

da $\mathcal{R}\nabla$ metrisch bezüglich g ist. Des Weiteren gilt für diese Vektorfelder

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = Df^{-1}(\mathcal{R}\nabla_X Y - \mathcal{R}\nabla_Y X - [X, Y]) = 0,$$

da $\mathcal{R}\nabla$ torsionsfrei ist. Damit ist $\tilde{\nabla}$ metrisch bezüglich f^*g und torsionsfrei, also gilt $\tilde{\nabla} = f^*\mathcal{R}\nabla$, da der Levi-Cevita Zusammenhang eindeutig ist. ///

IX.2.18 Motivation (Für den Satz von Riemann)

Für die triviale Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^m$ ist der Levi-Civita Zusammenhang $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}} \nabla = D$ des gewöhnlichen euklidischen Skalarprodukts $g = \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$. Insbesondere in der Basis der euklidischen Basisvektoren⁵ $g_{ij} = \delta_{ij}$, also gilt mit Gleichung (IX.4') auch

$$\mathcal{R}\Gamma_{ij}{}^k = g_{kl} \mathcal{R}\Gamma_{ij}{}^l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) = 0$$

und somit folgt mit IX.7

$$\mathcal{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{R}\Gamma_{jk}{}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{R}\Gamma_{ik}{}^l + \mathcal{R}\Gamma_{jk}{}^m \mathcal{R}\Gamma_{im}{}^l - \mathcal{R}\Gamma_{ik}{}^m \mathcal{R}\Gamma_{jm}{}^l = 0.$$

Wir erkennen an dieser Rechnung, dass⁶ $g_{ij} = \delta_{ij}$ bereits $\mathcal{R} = 0$ impliziert.

IX.2.19 Theorem (Satz von Riemann)

Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, so verschwindet die Krümmung genau dann, d. h. $R \equiv 0$, wenn für alle $p \in M$ eine Karte (U, x) um p existiert, welche eine Isometrie ist, d. h. in diesen Karten gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$.

BEWEIS

„ \Leftarrow “: Ist mit Motivation IX.2.18 oder dem Lemma IX.2.17 klar.

„ \Rightarrow “: Ist $\mathcal{R} = 0$ und $p \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit, so existiert nach Lemma IX.1.13 in einer Umgebung $U \subseteq M$ von $p \in U$ ein paralleler Orthonormaler-Rahmen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathfrak{X}(U)^m$. Auf Grund der Orthonormalität gilt

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$$

und die Torsionsfreiheit des Levi-Cevita Zusammenhangs $\mathcal{R}\nabla$ impliziert mit der Parallelität des Rahmens

$$[X_i, X_j] = \mathcal{R}\nabla_{X_i} X_j - \mathcal{R}\nabla_{X_j} X_i = 0.$$

⁵Die von der Karte $(\mathbb{R}^m, \text{id}_{\mathbb{R}^m})$ auf TM induziert werden.

⁶Dies ist keine Gleichheit in einem Punkt, sondern eine globale oder zumindest lokale Gleichheit und gilt nicht nur in einem gewissen Rahmen $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)^m$, sondern in einem von einer Karte induzierten Rahmen $\mathbf{X} = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$.

Nach dem Satz über die Lokale Existenz von Integraluntermannigfaltigkeiten, Korollar III.2.12 existiert ein simultaner Fluss $F : I \subseteq \mathbb{R}^m \times M \rightarrow M$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t^i} = X_i \circ F, \quad F(0) = p_0 \in M,$$

welcher eine injektive Immersion ist. Aus Dimensionsgründen ist F damit ein Diffeomorphismus um 0 und wir können ohne Beschränkung annehmen, dass $F : I \rightarrow F(I)$ ein Diffeomorphismus ist und erhalten die gewünschte Kartenabbildung $x = F^{-1}$ auf $F(I)$. Diese ist eine Isometrie, da nach Konstruktion die Orthonormalbasis $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ auf die euklidische Orthogonalbasis überführt wird. ///

IX.2.20 Bemerkung

Ist $V \subseteq M$ eine offene Teilmenge einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , so ist $(V, g|_V)$ selbst wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Damit gilt die Aussage gleichzeitig für offene Teilmengen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

IX.3. Geodätische

IX.3.1 Frage

Sind $p \neq q \in M$ Punkt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , so stellt sich nun die Fragen, ob es kürzeste Verbindungen von p nach q gibt und falls ja, wie man diese charakterisieren kann. Mit dieser Fragestellung wird sich der folgende Abschnitt beschäftigen.

IX.3.2 Definition (Länge eines Weges)

Ist $\gamma : [a; b] \rightarrow M$ ein glatter Weg in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) , so heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \underbrace{\sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}}_{=: |\gamma'(t)|} dt$$

die *Länge* des Weges γ .

Da sich die Länge des Weges offensichtlich nicht ändert, wenn wir den Weg umparametrisieren, nehmen wir im Folgenden häufig ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Weg nach der *Bogenlänge parametrisiert* ist, d. h. $|\gamma'(t)| = 1$.

Die zweite Frage führt direkt auf ein Variationsproblem.

IX.3.3 Definition (Variation)

Ist $\tilde{\gamma} : [a; b] \rightarrow M$ ein glatter Weg in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) , so heißt eine glatte Abbildung $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \times [a; b] : (s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ *Variation* von $\tilde{\gamma}$, falls $\gamma_0 = \gamma|_{\{0\} \times [a; b]} = \tilde{\gamma}$. Sind die Endpunkte dabei fix, d. h. für alle $s \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ gilt $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ und $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$, so heißt γ *Variation mit festen Endpunkten*.

Formal eingefügt

Formal als Definition eingeführt

IX.3.4 Satz (Notwendiges Kriterium für kürzeste Verbindungen)

Ist $\gamma_0 : [a; b] \rightarrow M^m$ eine kürzeste Verbindung zweier Punkte $p, q \in M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , so gilt $\mathcal{S}\nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0 = 0$.

BEWEIS

Korrigiert

Wie angekündigt, nehmen wir an, dass für jeden Zeitpunkt $t \in [a; b]$ bereits $|\gamma'_0(t)| = 1$ gilt. Da der Levi-Cevita Zusammenhang metrisch und g symmetrisch sind, folgt

$$0 = \frac{d}{dt} (g(\gamma'_0(t), \gamma'_0(t))) = 2g\left(\left(\gamma_{0*} \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{dt}}\right) \gamma'_0(t), \gamma'_0(t)\right) = 2g\left(\mathcal{S}\nabla_{\gamma'_0(t)} \gamma'_0(t), \gamma'_0(t)\right),$$

also gilt $\mathcal{S}\nabla_{\gamma'_0(t)} \gamma'_0(t) \perp_g \gamma'_0(t)$. Für eine beliebige Variation γ von γ_0 mit festen Endpunkten gilt mit der Torsionsfreiheit von $\mathcal{S}\nabla$

$$\begin{aligned} 0 &= D\gamma\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = \left[D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \\ &= \mathcal{S}\nabla_{D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)} D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathcal{S}\nabla_{D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} D\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = (\gamma_* \mathcal{S}\nabla)_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} - (\gamma_* \mathcal{S}\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \sqrt{g(\gamma'_s(t), \gamma'_s(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(\gamma'_s(t), \gamma'_s(t))}{\sqrt{g(\gamma'_0(t), \gamma'_0(t))}} dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(\gamma'_s(t), \gamma'_s(t)) dt \\ &= \int_a^b 2g\left((\gamma_* \mathcal{S}\nabla)_{\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0}} \gamma'_s(t), \gamma'_0(t)\right) dt \\ &= 2 \int_a^b g\left((\gamma_* \mathcal{S}\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(t)\right), \gamma'_0(t)\right) dt \\ &= 2 \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(g\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(t), \gamma'_0(t)\right)\right) dt \\ &\quad - 2 \int_a^b g\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(t), (\gamma_{0*} \mathcal{S}\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}} (\gamma'_0(t))\right) dt \end{aligned}$$

und mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(b), \gamma'_0(b)\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(a), \gamma'_0(a)\right) \\ &\quad - \int_a^b g\left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(t), \mathcal{S}\nabla_{\gamma'_0(t)} (\gamma'_0(t))\right) dt. \end{aligned}$$

Beachten wir nun, dass $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ und $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ gilt, so erkennen wir, dass die ersten beiden Terme verschwinden, also folgt

$$\int_a^b \mathcal{G} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s(t), \mathcal{G}\nabla_{\gamma'_0(t)}(\gamma'_0(t)) \right) dt = 0.$$

Damit ergibt dies für alle Normalenvariationen mit festen Endpunkten Null und somit erhalten wir, dass $\mathcal{G}\nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0 \parallel_{\mathcal{G}} \gamma'_0$ gilt. Zusammen mit dem Obigen $\mathcal{G}\nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0 \perp_{\mathcal{G}} \gamma'_0$ erhalten wir $\mathcal{G}\nabla_{\gamma'_0(t)} \gamma'_0 = 0$, da $|\gamma'_0| = 1 \neq 0$. ///

IX.3.5 Definition (Geodätische)

Ein glatter Weg $\gamma_0 : [a; b] \rightarrow M$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *Geodätische* von $\gamma_0(a)$ nach $\gamma_0(b)$, falls er $\mathcal{G}\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ erfüllt.

IX.3.6 Bemerkung (Lokale Darstellung der Geodätenbedingung)

In Koordinaten sieht man, dass $\mathcal{G}\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ der gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\gamma'' + \omega_{\gamma'}(\gamma') \stackrel{!}{=} 0.$$

entspricht, präziser bedeutet dies, dass in einer Karte (U, x)

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \mathcal{G}\nabla_{\gamma'} \gamma' = \mathcal{G}\nabla_{\gamma^{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\gamma^{j'} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \gamma^{j''} \frac{\partial}{\partial x^j} + \gamma^{i'} \gamma^{j'} \mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \gamma^{j''} \frac{\partial}{\partial x^j} + \gamma^{i'} \gamma^{j'} \mathcal{G}\Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

gelten muss, wobei $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ und $x = (x^1, \dots, x^m)$. Mit der Unabhängigkeit der Koordinatenfunktionen ist also das System

$$0 \stackrel{!}{=} \gamma^{l''} + \gamma^{i'} \gamma^{j'} \mathcal{G}\Gamma_{ij}^l \quad l \in \{1, \dots, n\}$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen.

Als direktes Korollar dieser lokalen Darstellung erhalten wir sofort die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Geodätischen zu gegebenen Anfangswerten $\gamma(0)$ und $\gamma'(0)$. Bezeichnet $\pi : TM \rightarrow M$ die Bündelprojektion des Tangentialbündels, so gilt $\gamma(0) = \pi(\gamma'(0))$ und damit ist die Existenz und Eindeutigkeit durch Vorgabe von $v = \gamma'(0) \in TM$ gewährleistet.

IX.3.7 Satz und Definition (Geodätischer Spray)

Ist (M, \mathcal{G}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so existiert genau ein *geodätischer Spray*, d. h. ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(TM)$ auf TM so, dass eine glatte Kurve $v \in \Gamma(\gamma_* TM)$ genau dann eine Parallelverschiebung von $v(0)$ längs $\gamma = \pi \circ v$ bezüglich $\mathcal{G}\nabla$ ist, wenn v eine Integralkurve von X ist, d. h. falls $X_v = v'$ gilt.

Umformuliert bzw.
präzisiert

BEWEIS

War zum Teil eine Übungsaufgabe und der Aufschrieb vom Rest war falsch.

Sei $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ eine beliebige glatte Kurve. Wir wählen mit Satz V.2.3 einen parallelen Schnitt $\alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ über $\gamma = \pi \circ \alpha$ mit $\alpha(0) = \gamma'(0)$ und definieren $X_{\gamma'(0)} := \alpha'(0)$. Ist X wohldefiniert, so folgt für $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ sofort $X_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$ und wir erhalten $X \in \mathfrak{X}(TM)$.

Wir zeigen nun die Wohldefinietheit⁸ von X . Seien also $\alpha, \tilde{\alpha} : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ zwei parallele Kurven mit $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$. Wir müssen nun zeigen, dass $\alpha'(0) = \tilde{\alpha}'(0)$ gilt. Dafür wählen wir eine Karte (U, x) von M und indem wir notfalls $\varepsilon > 0$ verkleinern, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\text{Bild}(\pi \circ \alpha), \text{Bild}(\pi \circ \tilde{\alpha}) \subseteq U$. Somit gilt für gewisse glatte Funktionen $\alpha^i \in C^\infty(-\varepsilon; \varepsilon)$ bereits $\alpha = \alpha^i \partial/\partial x^i$ bzw. $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^i \partial/\partial x^i$. Da dies Parallelverschiebungen über $\gamma := \pi(\alpha)$ bzw. $\tilde{\gamma} := \pi(\tilde{\alpha})$ sind, gilt

$$0 = (\gamma^* \mathcal{F}\nabla)\alpha = \alpha^{i'} \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha_i \mathcal{F}\nabla_{\alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

und gleiches für $\tilde{\alpha}$. Da $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$ gilt, folgt $\alpha^i(0) = \tilde{\alpha}^i(0)$ und somit mit

$$\begin{aligned} \alpha^{i'}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha^i(0) \alpha^j(0) \mathcal{F}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} &= 0 = \tilde{\alpha}^{i'}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{\alpha}^i(0) \tilde{\alpha}^j(0) \mathcal{F}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \tilde{\alpha}^{i'}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha^i(0) \alpha^j(0) \mathcal{F}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

auch $\alpha^{i'}(0) = \tilde{\alpha}^{i'}(0)$. Damit gilt auch $\alpha'(0) = \tilde{\alpha}'(0)$ und somit ist X wohldefiniert.

Sei nun $\alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ eine Lösungskurve von X zum Anfangswert $\alpha(0)$. Wir definieren $\gamma := \pi \circ \alpha$ und wählen eine Parallelverschiebung $\tilde{\alpha} : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ von $\alpha(0)$ längs γ bezüglich $\mathcal{F}\nabla$. Nach Obigem gilt $\tilde{\alpha}' = X_{\tilde{\alpha}}$, also ist α eine Integralkurve von X zum Anfangswert $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(0)$ und da Integralkurven eindeutig sind, folgt $\tilde{\alpha} = \alpha$. Somit ist α eine Parallelverschiebung von $\alpha(0)$ längs $\pi \circ \alpha$. ///

Eingefügt bzw. aus Satz und Definition IX.3.7 extrahiert

IX.3.8 Korollar (Existenz von Geodätischen)

Ein Weg $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann eine Geodätische, falls $\gamma' : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ eine Integralkurve des geodätischen Sprays ist.

BEWEIS

Ist $\alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ eine Integralkurve des geodätischen Sprays X , so definieren wir durch $\gamma := \pi \circ \alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ einen Weg in M mit

$$\gamma'(t) = (\pi \circ \alpha)'(t) = D\pi(\alpha'(t)) = D\pi(X_{\alpha(t)}) = \alpha(t),$$

⁷Wir beachten, dass $X \in \mathfrak{X}(TM)$ und nicht $X \in \mathfrak{X}(M)$, also ist $X : TM \rightarrow TTM$ und nicht $M \rightarrow TM$.
⁸und auch die Eindeutigkeit

da $D\pi : TTM \rightarrow TM$ die Bündelprojektion von TTM über TM ist. Nach Satz IX.3.7 ist α eine Parallelverschiebung von $\alpha(0)$ längs $\pi \circ \alpha$ und somit gilt

$$0 = (\pi \circ \alpha)_* \mathcal{G}\nabla_{\alpha} = \mathcal{G}\nabla_{(\pi \circ \alpha)'} \alpha = \mathcal{G}\nabla_{\gamma'} \gamma',$$

also ist γ eine Geodätische.

Ist $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow M$ ein glatter Weg, so wählen wir eine Integralkurve $\alpha : (\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ mit $\alpha(0) = \gamma'(0)$ und erkennen mit Obigem, dass $\pi \circ \alpha$ eine Geodätische ist, nach Bemerkung IX.3.6 ist diese jedoch eindeutig. Damit ist γ genau dann eine Geodäte, falls $\gamma = \pi \circ \alpha$ und in diesem Fall gilt wiederum nach Obigem $\gamma' = \alpha$. ///

IX.3.9 Bemerkung

Auf Grund der glatten Abhängigkeit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen von ihrem Anfangswert ist der Fluss $\Phi : U \rightarrow TM$ zum Geodätischen Spray auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R} \times TM$ definiert und offensichtlich ist $\Phi(t, 0_p)$ für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}$ und Punkte $p \in M$ der Mannigfaltigkeit wohldefiniert, also ist U ein Umgebung des Nullschnittes $\{0_p \mid p \in M\}$.

Ist $v \in TM$ beliebig, so existiert eine Integralkurve $\alpha : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow TM$ zum Geodätischen Spray mit Anfangswert $\alpha(0) = v$. Nach Korollar IX.3.8 ist $\pi \circ \alpha$ damit eine Geodätische und damit ist auch $\tilde{\alpha} : (2; 2) \rightarrow TM : t \mapsto \alpha(t\varepsilon/2)$ eine Geodätische mit $\tilde{\alpha}'(0) = \varepsilon/2 \cdot v$, da

$$\mathcal{G}\nabla_{\tilde{\alpha}} \tilde{\alpha} = \frac{\varepsilon^2}{4} \mathcal{G}\nabla_{\alpha} \alpha = 0.$$

Somit ist $\tilde{\alpha}$ nach Korollar IX.3.8 auch eine Integralkurve zum Geodätischen Spray mit dem Anfangswert $\varepsilon/2 \cdot v$. Damit ist

$$D(\exp) = \tilde{U} := \{\lambda v \mid (\lambda, v) \in U\} \subseteq TM$$

eine offene Umgebung des Nullvektorfelds, der *Definitionsbereich der Exponentialabbildung* und für $v \in \tilde{U}$ ist $\Phi(1, v)$ definiert.

Mittels der bisherigen Ergebnisse ist es uns nun möglich die folgende Definition IX.3.10 zu machen:

IX.3.10 Definition (Exponentialabbildung)

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt die Abbildung

$$\exp : D(\exp) \subseteq TM \rightarrow M : v \mapsto \pi(\alpha_v(1))$$

Exponentialabbildung auf M , dabei ist α_v Integralkurve des Geodätischen Sprays zum Anfangswert $\alpha(0) = v$ und \tilde{U} eine offene Umgebung von $0 \in \mathfrak{X}(M)$.

IX.3.11 Schreibweise (Exponentialabbildung auf $T_p M$)

Wir bezeichnen mit $\exp|_p$ die Einschränkung der Exponentialabbildung auf $T_p M$, d. h. $\exp|_p = \exp_{T_p M \cap \tilde{U}} : T_p M \cap D(\exp) \rightarrow M$.

Eingefügt

IX.3.12 Proposition (Eigenschaften der Exponentialabbildung)

Ist $p \in M$ ein Punkt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , so ist die Exponentialabbildung $\exp|_p : D(\exp) \cap T_p M \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von 0_p in eine Umgebung von p mit $\exp|_p(0_p) = p$ und⁹ $D_{0_p} \exp|_p = \text{id}_{T_p M}$.

BEWEIS

Da die Integralkurve zum geodätischen Spray X mit Anfangswert $0_p \in T_p M$ die konstante Kurve $\gamma \equiv p$ ist, ist $\exp|_p(0) = p$.

Wie in Bemerkung IX.3.9 ausgeführt, ist $\alpha_s(t) := \alpha(st)$ für $0 \leq s, t \leq 1$ eine Integralkurve des geodätischen Sprays zum Anfangswert sv , falls α eine Integralkurve zum Anfangswert v ist. Damit ist

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\exp|_p(sv)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \pi(\alpha_s(1)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \pi(\alpha(s)) = (D\pi)(X_v) = v.$$

Insbesondere gilt $D_{0_p} \exp|_p = \text{id}_{T_p M}$. Der Rest ergibt sich durch den Inversenfunktionsatz. ///

IX.3.13 Lemma (Lemma von Gauß)

Sind $v, w \in T_p M \cap D(\exp)$ zwei Tangentialvektoren an einem Punkt $p \in M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) für die die Exponentialfunktion wohldefiniert ist, so gilt¹⁰

$$g|_p(\lambda v, w) = g|_{\exp|_p(v)}(D_v \exp|_p(\lambda v), D_v \exp|_p(w)).$$

BEWEIS

Gilt die Aussage für $|v|_{g|_p} = |w|_{g|_p}$ und $\lambda = 1$, so folgt für $v, w \neq 0$ und $0 < \lambda \leq 1$ sowie $c := |v|/|w|$

$$\begin{aligned} \frac{c \cdot g|_p(\lambda v, w)}{\lambda} &= g|_p(v, cw) = g|_{\exp|_p(v)}(D_v \exp|_p(v), D_v \exp|_p(cw)). \\ &= \frac{c \cdot g|_{\exp|_p(v)}(D_v \exp|_p(\lambda v), D_v \exp|_p(w))}{\lambda}, \end{aligned}$$

also gilt dann die Aussage für alle Fälle, da die Fälle $\lambda = 0$ oder $v = 0$ oder $w = 0$ klar sind. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|v|_{g|_p} = |w|_{g|_p}$ und $\lambda = 1$ annehmen.

Offensichtlich gilt die Aussage für $v \parallel w$, da dies unter obigen Annahmen $v = w$ impliziert, also nehmen wir mit der Linearität der zu zeigenden Gleichung außerdem an, dass $v \perp_{g|_p} w$ gilt, und definieren für $\gamma(s, \varphi) := s(\cos \varphi v + \sin \varphi w) \in T_p M$

$$F : [0; 1] \times [-1; 1] \rightarrow M : (s, \varphi) \mapsto \exp|_p(\gamma(s, \varphi)).$$

⁹Beachte dabei, dass $\exp|_p : T_p M \rightarrow M$, also die Ableitung dieser Abbildung im „Punkt“ $v \in T_p M$ eine Abbildung $D_v \exp|_p : TT_p M \rightarrow TM$ ist. Da $T_p M$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, gilt $TT_p M \cong T_p M$ und wir fassen dies als Abbildung $D_v \exp|_p : T_p M \rightarrow T_{\exp|_p(v)} M$ auf.

¹⁰Wir fassen dies wiederum wie in ⁹ als $D_v \exp|_p : T_p M \rightarrow T_{\exp|_p(v)} M$ auf.

Umgeschrieben bzw. korrigiert und vervollständigt

Insbesondere ist $F|_{[0;1] \times \{\varphi\}}$ für alle $\varphi \in [-1; 1]$ eine Geodäte und es gilt¹¹

$$\frac{\partial F}{\partial s} = D_{\gamma(s,\varphi)} \exp|_p(\cos \varphi v + \sin \varphi w), \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = D_{sv} \exp|_p(s(\cos \varphi v + \sin \varphi w)).$$

Damit folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \Big|_{(s,0)}, \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{(s,0)} \right) \\ &= \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial s} \right) \Big|_{(s,0)} + \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial s} \right) \Big|_{(s,0)}. \end{aligned}$$

Da der zweite Term verschwindet, da es sich um eine Geodätische handelt, folgt mit der Torsionsfreiheit also die Gleichheit zu

$$\begin{aligned} &= \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right) \Big|_{(s,0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(s,0)} \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right) - \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\frac{\partial F}{\partial s}, \mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial F}{\partial s} \right) \Big|_{(s,0)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(s,0)} \mathcal{G}|_{\exp|_p(sv)} \left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vervollständigt

Also gilt die Aussage für orthogonale $v, w \in T_p M$. ///

Aus den Eigenschaften der Exponential-Abbildung können wir uns „schöne“ Koordinaten konstruieren, die einige Rechnungen deutlich vereinfachen.

IX.3.14 Lemma (Riemannsche Normalkoordinaten)

Um jeden Punkte $p \in M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{g}) existiert eine Karte (U, x) mit

Eingefügt.

$$\mathcal{g}_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \mathcal{G}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x^j} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{g}_{ij}}{\partial x^k} \Big|_p = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{g}_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} = \begin{cases} \frac{1}{3} \mathcal{R}_{ijkl} & : i \neq l \\ \frac{2}{3} \mathcal{R}_{ijki} & : i = l, \end{cases}$$

d. h. es existiert eine Konstante $C_p > 0$ mit

$$\left| \mathcal{g}_{ij}(q) - \delta_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{R}_{ijkl}(p) x^k(q) x^l(q) \right| \leq C_p \cdot |x(q)|^3 \quad \forall q \in U.$$

BEWEIS

Mittels Taylor-Entwicklung genügt es die oberen Aussagen zu zeigen. Wir wählen nach Proposition IX.3.12 $V \subseteq T_p M$ und $U \subseteq M$ so, dass $\exp|_p : V \rightarrow \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus mit $0 \in V$ ist. Des Weiteren wählen wir eine Orthonormalbasis $\{e_i|_p\}_{i=1}^n$ von $T_p M$ bezüglich $\mathcal{g}|_p$ und definieren die gewünschte Karte durch ihre Umkehrabbildung

$$x^{-1} : \tilde{V} \rightarrow U : (y^1, \dots, y^n) \mapsto \exp|_p(y^i e_i|_p),$$

¹¹Wieder verwenden wir wie in ⁹ $TT_p M \cong T_p M$.

wobei $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ so gewählt ist, das $x^i e_i|_p \in V$ für alle $(x^i)_i \in \tilde{V}$. Da V offen ist, ist dies möglich. Da die $e_i|_p$ eine Basis von $T_p M$ bilden, ist x^{-1} ein Diffeomorphismus von \tilde{V} auf das Bild $U := \text{Bild } x^{-1} \subseteq \tilde{U}$.

Da nach Proposition IX.3.12 $D_0 \exp|_p = \text{id}|_{T_p M}$ gilt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = D_p x^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial e^i} \right) = D_0 \exp|_p (e_i|_p) = e_i|_p.$$

Insbesondere folgt $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, da $e_i|_p$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$ bezüglich $g|_p$ bilden. Betrachten wir $\gamma : (-1; 1) \rightarrow U : t \mapsto \exp(t \cdot v)$ für beliebiges $v \in V$, so erkennen wir das dies nach Definition der Exponentialabbildung eine Geodäte ist und mit $D_0 \exp|_p = \text{id}|_{T_p M}$ sowie Bemerkung IX.3.6 in p gilt

$$0 = (\gamma^* \mathcal{S}\nabla) \gamma' = \gamma^{i''} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma^{i'} \mathcal{S}\nabla_{\gamma^{j'} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i v^j \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Setzen wir für v ein e_i ein, so erhalten wir damit $\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ und durch Betrachtung von $v = e_i + e_j$ erhalten wir mit der Torsionsfreiheit von $\mathcal{S}\nabla$ bereits $\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$. Mit

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g \left(\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

gilt damit auch $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \Big|_p = 0$. Gleichartig erhalten wir mit $\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$ auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g \left(\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) \\ &= g \left(\mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \mathcal{R}_{iljk} \end{aligned}$$

Da mit selbiger Argumentation $\gamma' : (-1; 1) \rightarrow TU$ eine Parallel-Verschiebung ist, erhalten wir durch Taylorentwicklung der Parallel-Verschiebung den letzten Teil der Aussage, da wie in Motivation V.3.5 erklärt ie Krümmung die zweite Ordnung der Parallel-Verschiebung ist. ///

IX.3.15 Satz (Geodäten sind lokal kürzeste Verbindungen)

Gilt für zwei Punkte $p, q \in M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , dass $q \in \text{Bild } \exp|_p$, so existiert ein Tangentialvektor $v \in T_p M \cap D(\exp)$ mit $\exp|_p(v) = q$ und die Geodätische

$$\gamma : [0; 1] \rightarrow M : t \mapsto \exp|_p(tv)$$

ist der kürzeste Weg von p nach q .

BEWEIS

Nach Satz IX.3.4 und Korollar IX.3.8 sowie der lokalen Existenz von Integralkurven ist ein Weg¹² $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ genau dann die kürzeste Verbindung zweier Punkte $p = \gamma(0)$ und $q = \gamma(1)$, falls er eine Geodätische ist und für jede andere Geodätische $\tilde{\gamma} : [0; 1] \rightarrow M$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$ und $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(1)$ bereits $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ gilt.

Bewiesen

Wiederum mit Korollar IX.3.8 erkennen wir, dass γ' und $\tilde{\gamma}'$ Integralkurven zum geodätischen Spray zum Anfangswert $v := \gamma'(0)$ und $\tilde{v} := \tilde{\gamma}'(0)$ sind. Per Definition der Exponentialabbildung bzw. Bemerkung IX.3.9 gilt damit

$$\gamma(t) := \exp|_p(tv), \quad \tilde{\gamma}(t) := \exp|_p(t\tilde{v}).$$

Damit gilt nach Lemma IX.3.13 zu jedem Zeitpunkt $t \in (0; 1)$ jeweils $|\gamma'(t)|_{\mathcal{G}} = |\gamma'(0)|_{\mathcal{G}}$ und $|\tilde{\gamma}'(t)|_{\mathcal{G}} = |\tilde{\gamma}'(0)|_{\mathcal{G}}$ und wir erhalten

$$L(\gamma') = |\gamma'(0)|_{\mathcal{G}|_p} = |v|_{\mathcal{G}|_p}, \quad L(\tilde{\gamma}') = |\tilde{\gamma}'(0)|_{\mathcal{G}|_p} = |\tilde{v}|_{\mathcal{G}|_p}.$$

Da die Exponentialabbildung nach Proposition IX.3.12 ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt dass ein eindeutiger Vektor $v \in T_p M$ mit minimaler Länge bezüglich \mathcal{G} existiert. Damit existiert insbesondere eine kürzeste Verbindung zwischen p und q und diese ist durch die Exponentialabbildung gegeben. ///

IX.4. Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie

Wir beginnen mit einer Motiviation, welche auch die Notation einführt.

IX.4.1 Motivation

Wir betrachten nun eine glatte Kurve $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der euklidischen Ebene, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach der Bogenlänge parametrisiert ist, d. h. zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ gilt $|\gamma'(t)| = 1$. Damit ist $\gamma'(t)$ ein normierter Vektor im \mathbb{R}^2 und wir können diesen zu einer Orthonormalbasis $\{\gamma'(t), N(t)\}$ von \mathbb{R}^2 erweitern, wobei wir erhalten, dass $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatt ist.

Aus der Krümmung der Kurve, welche durch $\gamma''(t)$ gegeben ist, können wir die Kurve – bis auf euklidische Bewegungen – wiedererhalten. Da $\{\gamma'(t), N(t)\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bilden, gilt nämlich

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t) | N(t) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \gamma''(t) | N(t) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \gamma'(t) | N'(t) \rangle_{\mathbb{R}} = \kappa(t) + \langle \gamma'(t) | N'(t) \rangle_{\mathbb{R}}$$

und

$$0 = \frac{d}{dt} \langle N(t) | N(t) \rangle_{\mathbb{R}} = 2 \langle N'(t) | N(t) \rangle_{\mathbb{R}} \quad 0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t) | \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}} = 2 \langle \gamma''(t) | \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

¹²Wir bemerken, dass dieser Weg nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Damit gilt für eine gewisse Funktion $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bereits $\gamma''(t) = \kappa(t)N(t)$ und $N'(t) = -\kappa(t)\gamma'(t)$ und somit erfüllt γ die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ N(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ N(t) \end{pmatrix}.$$

Damit müssen wir für eine durch $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Krümmung für $F = (F_1, F_2)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung

$$F'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} F(t)$$

lösen. Die fehlende Anfangsbedingung verursacht, dass die Lösung nur bis auf Drehung, also Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix, eindeutig ist. Definieren wir weiter

$$\tilde{\gamma}(x) = \int_0^x F_1(t) dt,$$

so erhalten wir – dieses Mal bis auf eine Verschiebung – unsere original Kurve zurück. Drehung und Verschiebung zusammen ist gerade die oben erwähnte euklidische Bewegung.

Nun kann man sich beispielsweise die Frage stellen, wie Krümmungen von geschlossenen Wegen aussehen. Diese sind (geometrische offensichtlich) periodisch für jeden Durchlauf. Andersherum erkennen wir an dem Graphen des Sinus, Abbildung IX.1, dass es *nicht* genügt die Krümmung als periodisch zu fordern, um eine geschlossene

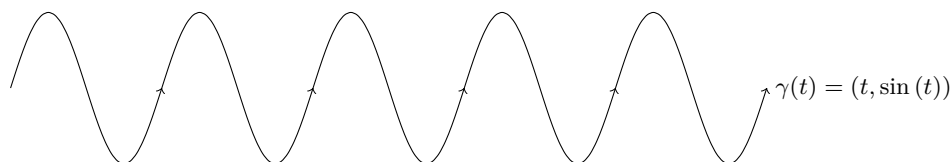


Abbildung IX.1.: Periodische, nicht geschlossene Kurve

Kurve zu erhalten.

Wir betrachten dies nun noch einmal in höherer Allgemeinheit: Es sei also (M^m, \mathcal{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : M \rightarrow \bar{M}$ eine Immersion in eine andere Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\bar{M}, \bar{\mathcal{g}})$. Diese Abbildung F ist per Definition genau dann isometrisch, falls M die induzierte Riemannsche Metrik hat, d. h. falls

$$\mathcal{g}(X, Y) = \bar{\mathcal{g}}(DF(X), DF(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Für jeden Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit gilt $T_{F(p)}\bar{M} = D_p F(T_p M) \times N_p M$, wobei

$$N_p M = (D_p F(T_p M))^\perp := \left\{ \xi \in T_{F(p)}\bar{M} \mid \xi \perp D_p F(T_p M) \right\}$$

der Normalenraum in $p \in M$ ist. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{DF} & T\bar{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{F} & \bar{M} \end{array}$$

kommutiert, erhalten wir also

$$F^*T\bar{M} = F^*(DF(TM) \times NM) \cong TM \times NM.$$

Entsprechend der Abbildung IX.2 bzw. Beispiel V.1.9, Nummer 3, zerlegen wir den

Abbildung eingefügt.

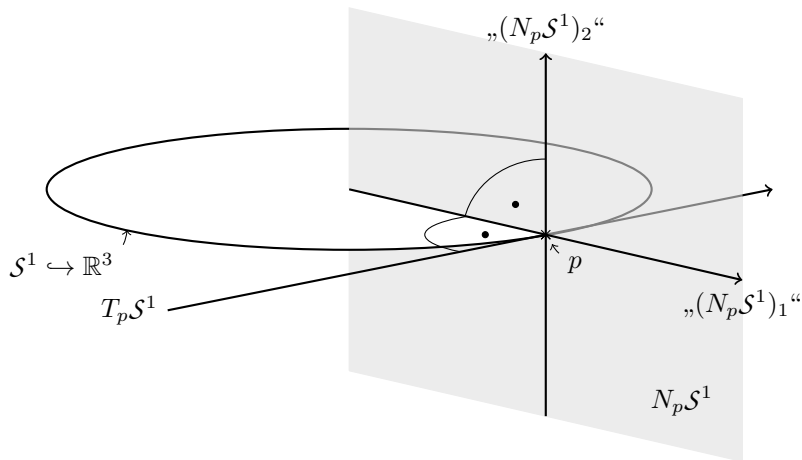


Abbildung IX.2.: Normalenraum zu $M = \mathcal{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Levi-Civita Zusammenhang $\bar{\nabla}$ auf $F^*T\bar{M} \cong TM \times NM$ zu

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla & \alpha \\ \beta & \perp \nabla \end{pmatrix},$$

d. h. für die Orthogonalprojektion $(\cdot)^T : \bar{M} \rightarrow TM$ auf TM und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_X Y)^T$ und vergleichbar gilt für die Normalenprojektion $(\cdot)^\perp : \bar{M} \rightarrow NM$ auf NM und $X, \xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\xi \perp X$ bereits ${}^\perp \nabla_X \xi := (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$. Dies sind beides Zusammenhänge – auf TM bzw. NM . Des Weiteren gilt für den obigen Schnitt $\alpha \in \Omega^1(\text{Hom}(NM, TM))$ bzw. $\beta \in \Omega^1(\text{Hom}(TM; NM))$

$$\alpha_X(\xi) := (\bar{\nabla}_X \xi)^T \quad \text{bzw.} \quad \beta_X(Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Vergleichen wir dies mit dem Resultat im ein-dimensionalen, so entspricht

$$\bar{\nabla}_{DF(X)}(DF(Y)) = \underbrace{DF(\nabla_X Y)}_{\text{tangential}} + \underbrace{\beta_X(Y)}_{\text{normal}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

gerade $F'' = \kappa N$, wobei wir bemerken, dass der erste „tangente“ Term im eindimensionalen nicht existiert. Gleichartig gilt

$$\bar{\nabla}_{DF(X)}\xi = DF(\alpha_X(\xi)) + {}^\perp\nabla_X\xi \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma(NM).$$

In der Schreibweise wie oben bezeichnen wir $\alpha \in \Omega^1(\text{Hom}(NM, TM))$ als *Weingarten Operator*, $\beta \in \Omega^1(\text{Hom}(TM; NM))$ als *2^{te} Fundamentalform* und die Metrik $g \in \Gamma(\text{Sym}(TM \times TM, \mathbb{R}))$ auch als *1^{te} Fundamentalform*

Wir werden im Folgenden die Bezeichnungen dieser Motivation IX.4.1 verwenden.

IX.4.2 Lemma (Der induzierte Levi-Civita Zusammenhang)

Ist $F : M \rightarrow \bar{M}$ eine Isometrie¹³ von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in eine andere (\bar{M}, \bar{g}) , so ist ∇ aus Motivation IX.4.1 der Levi-Civita Zusammenhang \mathcal{N} von g .

BEWEIS

Da $g = F^*\bar{g}$ vorausgesetzt ist, folgt dies aus der Lemma IX.2.17, 3. Aussage. ///

Ein Lemma wurde in Lemma IX.4.2, Lemma IX.4.3, Lemma IX.4.4 und Lemma IX.4.5 zerlegt

IX.4.3 Lemma (Der Weingarten Operator und die 2^{te} Fundamentalform)

Ist $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in eine andere (\bar{M}, \bar{g}) , so ist für alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ die zweite Fundamentalform $\beta_X \in \Gamma(\text{Hom}(TM; NM))$ anti-adjungiert zum Weingarten Operator $\alpha_X \in \Gamma(\text{Hom}(NM, TM))$ bezüglich g und ${}^\perp$, d. h.

$$g(\alpha_X\zeta, Y) = -{}^\perp(\zeta, \beta_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \zeta \in \Gamma(NM).$$

BEWEIS

Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\zeta \in \Gamma(NM)$ beliebig, so gilt, da $(DF(Y))^T = DF(Y)$,

$$\begin{aligned} g(\alpha_X\zeta, Y) &= \bar{g}\left(\left(\bar{\nabla}_{DF(X)}\zeta\right)^T, DF(Y)\right) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{DF(X)}\zeta, DF(Y)\right) \\ &= d_{DF(X)}\underbrace{\bar{g}(\zeta, Y)}_{\equiv 0} - \bar{g}\left(\zeta, \bar{\nabla}_{DF(X)}DF(Y)\right) \\ &= -\bar{g}\left(\zeta, \left(\bar{\nabla}_{DF(X)}DF(Y)\right)^\perp\right) = -{}^\perp(\zeta, \beta_X(Y)). \end{aligned} \quad ///$$

IX.4.4 Lemma (Die 2^{te} Fundamentalform ist symmetrisch)

Ist $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in eine andere (\bar{M}, \bar{g}) , so ist die zweite Fundamentalform aufgefasst als Bilineare Abbildung $\mathbb{I} \in \Gamma(\text{Bil}(TM, TM; NM))$ symmetrisch, d. h.

$$\mathbb{I}(X, Y) := \beta_X Y = \beta_Y X = \mathbb{I}(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

¹³Wir erinnern daran, dass jede Isometrie eine Immersion ist.

BEWEIS

Da $\bar{\nabla}$ torsionsfrei ist, gilt für alle Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\bar{\nabla}_{DF(X)}DF(Y) - \bar{\nabla}_{DF(Y)}DF(X) - [DF(Y), DF(X)] = 0.$$

Nach Bemerkung VI.4.7 gilt $[DF(Y), DF(X)] = DF([X, Y])$, also folgt die Behauptung mit

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(X, Y) &= \left(\bar{\nabla}_{DF(X)}DF(Y) \right)^\perp = \left(\bar{\nabla}_{DF(Y)}DF(X) + [DF(X), DF(Y)] \right)^\perp \\ &= \left(\bar{\nabla}_{DF(Y)}DF(X) \right)^\perp + (DF([X, Y]))^\perp = \mathbb{I}(Y, X). \end{aligned} \quad ///$$

IX.4.5 Lemma (Der Weingarten Operator)

Ist $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in eine andere (\bar{M}, \bar{g}) , so ist für alle Normalenfelder $\zeta \in \Gamma(NM)$ der Weingartenoperator $\alpha_{(\cdot)}\zeta \in \Gamma(\text{End}(TM))$ selbstadjungiert, d. h.

$$g(\alpha_X\zeta, Y) = g(X, \alpha_Y\zeta) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \zeta \in \Gamma(NM).$$

BEWEIS

Für zwei beliebige Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und ein Normalenfeld $\zeta \in \Gamma(NM)$ gilt nach Lemma IX.4.3 und Lemma IX.4.4

$$g(\alpha_X\zeta, Y) = -\langle \zeta, \mathbb{I}(X, Y) \rangle = -\langle \zeta, \mathbb{I}(Y, X) \rangle = g(\alpha_Y\zeta, X),$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die von (\bar{M}, \bar{g}) auf NM induzierte Metrik ist. ///

IX.4.6 Theorem (Gauß-, Codazzi- und Ricci-Gleichung)

Ist $F : M^m \rightarrow \bar{M}$ eine Isometrie von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in eine andere (\bar{M}, \bar{g}) , so gilt im Sinne von $\Omega^2(TM)$ - bzw. $\Omega^2(NM)$ -Gleichungen für $\xi \in \Gamma(NM)$ bzw. $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\mathcal{R}X)^T = \mathcal{R}X + (\alpha \wedge \beta)X \quad \text{(Gaußgleichung)}$$

$$(\mathcal{R}X)^\perp = (g d\alpha)X, \text{ bzw. } (\mathcal{R}\xi)^T = (g d\alpha)\xi \quad \text{(Codazzigleichung)}$$

$$(\mathcal{R}\xi)^\perp = \nabla^\perp \mathcal{R}\xi + (\beta \wedge \alpha)\xi, \quad \text{(Ricci-Gleichung)}$$

wobei \wedge das Wedge-Produkt über den natürlichen Paarungen von $\text{Hom}(TM, NM)$ und $\text{Hom}(NM, TM)$ bezeichnet.

Verallgemeinert von einer Isometrie in den euklidischen Raum. Diesen Spezialfall als Korollar IX.4.9 ausgelagert.

IX.4.7 Bemerkung (Interpretation der Gleichungen)

Diese Gleichungen besagen, dass für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $\xi \in \Gamma(NM)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}(Z, Y)X)^T &= \mathcal{R}(Z, Y)X + \alpha_Z(\beta_Y X) - \alpha_Y(\beta_Z X) \\ (\mathcal{R}(Z, Y)X)^\perp &= ((\mathcal{G}d\alpha)(Z, Y))X \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{R}(Z, Y)\xi)^T = ((\mathcal{G}d\beta)(Z, Y))\xi \\ (\mathcal{R}(Z, Y)\xi)^\perp &= \nabla^\perp \mathcal{R}(X, Y)\xi + \beta_Z(\alpha_Y \xi) - \beta_Y(\alpha_Z \xi) \end{aligned}$$

gilt, erklären also, wie die Krümmung der „umliegenden“ Mannigfaltigkeit und die der „inneren“ Manigfaltigkeit über die zweite Fundamentalform und die Weingartenabbildung gekoppelt sind. Dies erklärt, warum man die zweite Fundamentalform bzw. die Weingartenabbildung als Krümmung der „inneren“ Mannigfaltigkeit **in** der „äußeren“ interpretiert wird.

BEWEIS

Es gilt

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}\nabla & \alpha \\ \beta & \nabla^\perp \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{G}\nabla & 0 \\ 0 & \nabla^\perp \end{pmatrix}}_{=: \nabla} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}}_{=: \omega}$$

Nach Theorem VI.3.2 gilt auch $\nabla^{+\omega}\mathcal{R} = \nabla\mathcal{R} + \mathcal{G}d\omega + \omega \wedge \omega$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & {}^\perp\nabla\mathcal{R} \end{pmatrix} + \nabla \oplus {}^\perp\nabla d \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & {}^\perp\nabla\mathcal{R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \text{Hom}(NM, TM)\nabla d\alpha & \text{Hom}(NM, TM)\nabla d\beta & 0 \\ 0 & \beta \wedge \alpha & \alpha \wedge \beta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Komponentenvergleich liefert die Gleichungen. ///

IX.4.8 Bemerkung

Betrachten wir vier Vektorfelder $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ und beachten, dass wir durch die Basisdarstellung gewisse Abbildungen $\alpha_i \in \text{Hom}(NM; TM)$ und $\beta_i \in \text{Hom}(TM; NM)$ wählen können so, dass $\alpha = \alpha_i dx^i$ und $\beta = \beta_i dx^i$, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha \wedge \beta(X, Y)Z, W) &= \mathcal{G}(\alpha_i \circ \beta_j(Z) dx^i \wedge dx^j(X, Y), W) \\ &= dx^i \wedge dx^j(X, Y) \cdot \mathcal{G}(\alpha_i \circ \beta_j(Z), W) \\ &= - (dx^i(X) dx^j(Y) - dx^j(X) dx^i(Y)) \mathcal{G}(\beta_j Z, \beta_i W) \\ &= - \mathcal{G}(dx^j(Y) \beta_j Z, dx^i(X) \beta_i W) + \mathcal{G}(dx^j(X) \beta_j Z, dx^i(Y) \beta_i W) \\ &= - \mathcal{G}(\mathbb{I}(Y, Z), \mathbb{I}(X, W)) + \mathcal{G}(\mathbb{I}(X, Z), \mathbb{I}(Y, W)) \end{aligned}$$

die alternative Darstellung

$$\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = \begin{cases} \mathcal{G}(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) + \mathcal{G}(\mathbb{I}(X, Z), \mathbb{I}(Y, W)) \\ - \mathcal{G}(\mathbb{I}(Y, Z), \mathbb{I}(X, W)) \end{cases} \quad (\text{Gaußgl.})$$

Eingefügt

der Gaußgleichung¹⁴. Äquivalent erhalten wir mit

$$\bar{g}\left(\nabla^\perp \mathcal{R}(X, Y)\xi, \zeta\right) = \begin{cases} \perp(\nabla^\perp \mathcal{R}(X, Y)\xi, \zeta) \\ -\perp(\alpha_X \xi, \alpha_Y \zeta) + \perp(\alpha_Y \xi, \alpha_X \zeta) \end{cases} \quad (\text{Ricci gl.})$$

eine alternative Darstellung der Ricci-Gleichung.

IX.4.9 Korollar (Gauß-, Codazzi- und Ricci-Gleichung im Euklidischen)

Ist $F : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) in den euklidischen Raum, so gilt

$$0 = \mathcal{R} + \alpha \wedge \beta \quad (\text{Gaußgleichung})$$

$$0 = (g d\alpha), \text{ bzw. } 0 = (g d\alpha) \quad (\text{Codazzigleichung})$$

$$0 = \nabla^\perp \mathcal{R} + (\beta \wedge \alpha), \quad (\text{Ricci Gleichung})$$

wobei \wedge das Wedge-Produkt über den natürlichen Paarungen von $\text{Hom}(TM, NM)$ und $\text{Hom}(NM, TM)$ bezeichnet.

Das war das Theorem aus dem Mitschrieb

BEWEIS

Dies folgt direkt aus Theorem IX.4.6 für $\bar{M} = \mathbb{R}^n$, da der Levi-Civita Zusammenhang der Euklidischen Metrik der triviale Zusammenhang d ist und dieser flach ist. ///

IX.4.10 Beispiel

Wenn wir eine Hyperfläche $\Psi : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ betrachten, so ist NM ein reelles Linienbündel. Nehmen wir an, dass NM global trivialisierbar ist, also ein globaler Normalenrahmen

$$\exists N : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ Einheitsnormale, } \langle N|N \rangle = 1, N_p M = \mathbb{R} N(p)$$

existiert, so können wir NM mit $\underline{M} = M \times \mathbb{R}$ identifizieren. Wir erhalten die erste Fundamentalform $g \in \Gamma(\text{Sym}(TM, TM))$ und die zweite Fundamentalform $\mathbb{I} \in \Gamma(\text{Sym}(TM, TM; NM)) \cong \Gamma(\text{Sym}(TM, TM))$. Es gilt für den Weingartenoperator $\alpha \in \Omega^1(\text{Hom}(NM; TM)) \cong \Omega^1(TM) = \text{Hom}(TM; TM)$ mit Lemma IX.4.3

$$-g(\alpha(X), Y) = \langle N|\mathbb{I}(X, Y) \rangle \stackrel{NM \cong M}{\equiv} \mathbb{I}(X, Y),$$

die Gaußgleichung

$$\mathcal{R} + \alpha \wedge \beta = 0$$

¹⁴Da dies nicht üblich ist, wollen wir nur in einer Fußnote erwähnen, dass falls wir \mathbb{I} durch $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{ij}{}^{kl} \partial/\partial x^k dx^i \otimes dx^j$ in Koordinaten schreiben, so erhalten wir die gleichwertige Gleichung

$$\mathcal{R}_{ijkl} = \mathbb{I}_{ik}{}^m \mathbb{I}_{mn} \mathbb{I}_{jl}{}^n - \mathbb{I}_{jk}{}^m \mathbb{I}_{mn} \mathbb{I}_{il}{}^n \left(= \mathbb{I}_{ikn} \mathbb{I}_{jl}{}^n - \mathbb{I}_{jkn} \mathbb{I}_{il}{}^n \right). \quad (\text{Gaußgl.})$$



und die Codazzigleichung

$$\mathcal{G}d\beta = 0 \quad \left(\Leftrightarrow (\mathcal{G}\nabla_X\beta)(Y, Z) = (\mathcal{G}\nabla_Y\beta)(X, Z) \text{ mit } \nabla \text{ Levi-Civita-Zshg. bzgl } \mathcal{G} \right).$$

Die Riccigleichung ist für Co-Dimensionen 1 automatisch erfüllt.

Noch spezieller: Ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 gegeben, d. h. $m = 2$. Dann ist die Krümmung durch eine Funktion gegeben und die Gaußgleichung wird eine skalare Gleichung

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}(X, Y)Y, X) + \mathcal{G}(\alpha_X\beta_Y Y - \alpha_Y\beta_X Y, X) = 0$$

da $\beta_Y Y$ und $\beta_X Y$ hier reelwertig sind, gilt

$$\mathcal{G}(\alpha_X\beta_Y Y, X) = -\beta(Y, Y)\beta(X, X) + (\beta(X, Y))^2.$$

Ist nun X, Y eine Orthogonalbasis von $T_p M$, dann ist

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}(X, Y)Y, X) =: K^{\mathcal{G}} \text{ die Gaußkrümmung der Fläche}$$

also $K^{\mathcal{G}} = \det_{\mathcal{G}} \beta = \det \alpha$. Dies ist das *Theorema Egregium* von Gauß, welches eine Verbindung der intrinsischen Größe mit einer extrinsischen ist.

IX.4.11 Theorem (Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie)

Ist $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ ein reelles Riemannsches Vektorbündel mit einem metrischen Zusammenhang ∇^E über einer einfach-zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, \mathcal{G}) und $\beta \in \Omega^1(\text{Hom}(TM; E))$ eine Bündelabbildung, welche in den $\mathfrak{X}(M)$ -Einträgen symmetrisch ist, so, dass die Gauß-, Codazzi und Riccigleichungen erfüllt sind, d. h.

$$0 = \mathcal{R} - \beta^* \wedge \beta \quad \text{(Gaußgleichung)}$$

$$0 = \mathcal{G}d\beta \quad \text{(Codazzigleichung)}$$

$$0 = {}^E\mathcal{R} - \beta \wedge \beta^*, \quad \text{(Riccigleichung)}$$

dann existiert eine isometrische Immersion $\Psi : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+r}$, welche den Normalenraum $NM = E$ und die zweite Fundamentalform $\mathbb{I} = \beta_{(\cdot)}(\cdot)$ ergibt, und diese Abbildung ist bis auf euklidische Bewegung – also Drehungen und Verschiebungen – eindeutig.

Dabei bezeichnet $\beta^* \in \Omega^1(\text{Hom}(E; TM))$ den Dual von $\beta \in \Omega^1(\text{Hom}(TM; E))$ im Sinn von Lemma IX.4.3, also denjenigen Operator mit

$$\mathcal{G}(\beta^*_X \zeta, Y) = \mathfrak{h}(\zeta, \beta_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \zeta \in \Gamma(E).$$

BEWEIS

Wir definieren das Vektorbündel $V := TM \oplus E$ vom Rang $m + r$ und erhalten darauf die Metrik $\langle \cdot | \cdot \rangle_V := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ und den metrischen Zusammenhang $\mathfrak{g}\nabla_{\oplus} \nabla^E$. Wir wollen nun diesen Zusammenhang derart verändern, dass dieser flach wird. Daher definieren wir einen neuen Zusammenhang

$$D := \begin{pmatrix} \mathfrak{g}\nabla & \alpha \\ \beta & \nabla^E \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathfrak{g}\nabla & 0 \\ 0 & \nabla^E \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Zusammenhang bzgl. } \langle \cdot | \cdot \rangle_V} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\beta^* \\ \beta & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief adjungiert bzgl. } \langle \cdot | \cdot \rangle_V} =: \mathfrak{g}\nabla_{\oplus} \nabla^E + \omega,$$

und $\alpha := -\beta^*$. Da damit für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und zwei Schnitte $\psi, \varphi \in \Gamma(E)$ sowie die zugehörigen Schnitte $v := X \oplus \psi, w := Y \oplus \varphi \in \Gamma(V)$ in V bereits

$$\begin{aligned} d \langle v | w \rangle_V &= d\mathfrak{g}(X, Y) + d\mathfrak{h}(\psi, \varphi) \\ &= \mathfrak{g}(\mathfrak{g}\nabla_X Y) + \mathfrak{g}(X, \mathfrak{g}\nabla_Y) + \mathfrak{h}(\nabla^E \psi, \varphi) + \mathfrak{h}(\psi, \nabla^E \varphi) \\ &= \left\langle (\mathfrak{g}\nabla_{\oplus} \nabla^E)(X \oplus \psi) \middle| Y \oplus \varphi \right\rangle_V + \left\langle X \oplus \psi \middle| (\mathfrak{g}\nabla_{\oplus} \nabla^E)(Y \oplus \varphi) \right\rangle_V \\ &\quad + \underbrace{\langle \omega(X \oplus \psi) | Y \oplus \varphi \rangle_V + \langle X \oplus \psi | \omega(Y \oplus \varphi) \rangle_V}_{=0} \\ &= \langle Dv | w \rangle_V + \langle v | Dw \rangle_V \end{aligned}$$

gilt, folgt dass D ein metrischer Zusammenhang auf V bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ ist. Außerdem folgt für weitere Vektorfelder $W, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mit

$$D_W D_Z = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}\nabla_W \circ \mathfrak{g}\nabla_Z + \alpha_W \circ \beta_Z & \mathfrak{g}\nabla_W \circ \alpha_Z + \alpha_W \circ \nabla_Z^E \\ \beta_W \circ \mathfrak{g}\nabla_Z + \nabla_W^E \circ \beta_Z & \beta_W \circ \alpha_Z + \nabla_Y^E \circ \nabla_Z^E \end{pmatrix}$$

bereits

$${}^D \mathcal{R}(W, Z) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(W, Z) + (\alpha \wedge \beta)(W, Z) & (\mathfrak{g}\nabla_W \alpha_Z) - (\mathfrak{g}\nabla_Z \alpha_W) - \alpha_{[W, Z]} \\ (\mathfrak{g}\nabla_W \beta_Z) - (\mathfrak{g}\nabla_Z \beta_W) - \beta_{[W, Z]} & (\beta \wedge \alpha)(W, Z) + \nabla^E \mathcal{R}(W, Z) \end{pmatrix}.$$

Damit implizieren die Gauß-, Codazzi- und Ricci-Gleichung bereits, dass D ein flacher Zusammenhang ist. Mit Theorem V.3.22 existiert damit ein Bündelisomorphismus $F : V \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m+r}$ mit $F \circ D = d \circ F$. Auf $\underline{M} := M \times \mathbb{R}^{m+r}$ definieren wir nun die natürliche Bündelmetrik

$$\langle \psi | \varphi \rangle_{\underline{M}} = \left\langle F^{-1}(\psi) \middle| F^{-1}(\varphi) \right\rangle_V \quad \forall \psi, \varphi \in \Gamma(\underline{M}).$$

Nach Lemma IX.1.13 können wir annehmen, dass $d \langle \cdot | \cdot \rangle_{\underline{M}} = 0$. Also ist F eine Bündelisometrie bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$. Da $V = TM \oplus E$, können wir

$$\sigma := F|_{TM} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m+r} \rightarrow \mathbb{R}^{m+r}$$

definieren so, dass $\sigma \in \Omega^1(M; \mathbb{R}^n)$ und $\sigma_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und isometrisch ist.

Da wir insgesamt eine isometrische Immersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhalten wollen, versuchen wir nun ein solches f zu finden so, dass $df = \sigma$. Da M einfach-zusammenhängend und σ eine 1-Form ist, genügt es nach Korollar VIII.1.12 zu zeigen, dass σ geschlossen ist, d. h. $d\sigma = 0$. Dafür beachten wir, dass für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
 d\sigma(X, Y) &= X \bullet \sigma(Y) - Y \bullet \sigma(X) - \sigma \bullet ([X, Y]) \\
 &= X \bullet F(Y) - Y \bullet F(X) - F([X, Y]) \\
 &= d_X(F(Y)) - d_Y F(X) - F([X, Y]) = F(D_X Y - D_Y X - [X, Y]) \\
 &= F(\mathcal{L} \nabla_X Y + \beta_X(Y) - \mathcal{L} \nabla_Y X - \beta_Y(X) - [X, Y]) \\
 &= F(\underbrace{\mathcal{L} \nabla_X Y - \mathcal{L} \nabla_Y X - [X, Y]}_{=0} + \underbrace{\beta_X(Y) - \beta_Y(X)}_{=0}) = F(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Die Bestimmtheit von F und damit auch von σ und f verursacht die geforderte Eindeutigkeit. ///

IX.4.12 Bemerkung

Ist M nicht einfach zusammenhängend, so beachten wir die universelle Überdeckung \widetilde{M} und die sich damit ergebende isometrische Immersion $f : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^{m+r}$.

Kapitel X.

Hodge Theorie und Differentialoperatoren

Das Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass für jede kompakte, orientierte, zusammenhängende, Riemannsche Mannigfaltigkeit M^m ohne Rand die k -te de-Rham-Cohomologie $H_{dR}^k(M, \mathbb{K})$ ein endlich dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ist und die Poincare Paarung

$$H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^{m-k}(M) \rightarrow \mathbb{K} : ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

wohldefiniert und nicht-ausgeartet ist. Des Weiteren, dass die *Poincaré Dualität*

$$H_{dR}^k(M) \cong \left(H_{dR}^{m-k}(M) \right)^* \cong H_{dR}^{m-k}(M) : [\omega] \mapsto \int_M \omega \wedge \cdot,$$

gilt, also erhalten wir dann speziell für $k = m$

$$H_{dR}^m(M) \cong \left(H_{dR}^0(M) \right)^* \cong \mathbb{K} : [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Die Idee, welche Riemann für Dimension zwei und Hodge für beliebige Dimensionen durchführten, ist einen „guten“ Repräsentanten einer Cohomologieklassse $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$ zu finden. Dafür beachten wir, dass

$$[\omega] = \omega + d\Omega^{k-1}(M) \quad d\omega = 0$$

gilt. Nun wollen wir ω „gut“ wählen, wobei hier „gut“ bedeutet, dass ω von allen möglichen ω den „minimalen Abstand von der 0 hat“, was insbesondere bedeutet, dass ω „senkrecht“ auf $d\Omega^{k-1}(M)$ steht. Hierfür muss natürlich definiert werden, was hier „senkrecht“ und „Abstand“ bedeutet, also werden wir ein inneres Produkt auf der äußeren Algebra definieren. Ist (M, g) eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit, so können wir das L^2 -Skalarprodukt mit

$$\langle \alpha | \beta \rangle_{L^2} = \int_M g(\alpha, \beta) \, d\text{vol}_g \quad \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

definieren¹. Offensichtlich ist $\Omega^k(M)$ mit diesem Skalarprodukt nicht vollständig.

¹Dabei definieren wir das Skalarprodukt auf den k -Formen wie in Definition B.2.12.

Da dieser Ausdruck für Rechnung nicht sonderlich handlich ist, führen wir den folgenden Operator ein:

X.1. Der Hodge- \star -Operator

X.1.1 Lemma und Definition (Hodge \star -Operator auf Vektorräumen)

Für einen orientierten, m -dimensionalen euklidischen \mathbb{R} -Vektorraum existiert genau eine lineare Isometrie

$$\star_k : \bigwedge^k V^* \rightarrow \bigwedge^{m-k} V^*$$

mit²

$$\alpha \wedge (\star_k \beta) := \langle \alpha | \beta \rangle \det \quad \forall \alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*.$$

Es bezeichnet \star den zugehörigen Operator, den *Hodge \star -Operator*, auf \bigwedge^\bullet . Dabei gilt

1. $\star\star = (-1)^{k(m-k)}$, d. h.

$$\bigwedge^k \xrightarrow{\star_k} \bigwedge^{m-k} \xrightarrow{\star_{m-k}} \bigwedge^k : \alpha \mapsto \star_k \alpha \mapsto (-1)^{k(m-k)} \alpha$$

2. $\alpha \wedge \star \beta = (-1)^{k(m-k)} (\star \alpha) \wedge \beta$ für alle k -Formen $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*$

3. ist $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V^* , dann ist

$$\star \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} = \text{sign}(I, J) \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{m-k}}, \quad I = \{i_1, \dots, i_k\},$$

wobei für $J = \{j_1, \dots, j_{m-k}\}$ jeweils $I \cup J = \{1, \dots, m\}$ und $\text{sign}(I, J)$ das Signum der Permutation von $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ zu $\sigma^{i_1}, \dots, \sigma^{i_k}, \sigma^{j_1}, \dots, \sigma^{j_{m-k}}$ ist.

BEWEIS

Ist $I = (i_1, \dots, i_k)$ ein k -Multiindex, so gilt für jede lineare Abbildung $\star : \bigwedge^k \rightarrow \bigwedge^{m-k}$ bereits

$$\star dx^I = \alpha_J dx^J$$

für gewisse $\alpha_J \in \mathbb{R}$ und über alle $m - k$ -Multiindizes J summiert wird. Da für jeden k -Multiindex \tilde{I} bereits $\langle dx^I | dx^{\tilde{I}} \rangle = \delta^{I\tilde{I}}$ gilt, folgt aus der Voraussetzung an den Hodge- \star -Operator, dass in obiger Darstellung α_J falls (I, J) keine Permutation von $(1, \dots, m)$ ist. Da außerdem noch das Wedge-Produkt antisymmetrisch ist, gilt für eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ bereits

$$\star dx^I = \alpha dx^J$$

für einen $m - k$ -Multiindex J für den (I, J) eine Permutation von $(1, \dots, m)$ ist. Da damit

$$dx^I \wedge (\star dx^I) = \alpha dx^I \wedge dx^J$$

gilt, folgt $\alpha = \pm 1$, wobei genau dann ein positives Vorzeichen gewählt wird, falls (I, J) eine gerade Permutation von $(1, \dots, m)$ ist. Mit der Linearität ist damit konstruktiv die

²wiederum definieren wir das Skalarprodukt auf den k -Formen wie in Definition B.2.12 und beachten, dass nach Wiederholung B.2.13 die Determinante eine m -Form ist.

Ausgeführt bzw. vervollständigt.

Existenz und auch die Eindeutigkeit gezeigt ist. Außerdem ist damit auch „3.“ gezeigt und wir erhalten

$$\langle \star dx^I \mid \star dx^I \rangle = \langle dx^J \mid dx^J \rangle = 1,$$

also ist dies auch eine Isometrie.

Wir erkennen für zwei k -Formen $\alpha, \beta \in \wedge^k V^*$ mit der Gleichung

$$\alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha \mid \beta \rangle \det = \langle \beta \mid \alpha \rangle \det = \beta \wedge (\star \alpha) = (-1)^{k(m-k)} (\star \alpha) \wedge \beta$$

die Gültigkeit der zweiten Aussage.

Zuletzt beachten wir, dass wiederum für zwei k -Formen $\alpha, \beta \in \wedge^k V^*$

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mid \star \star \beta \rangle \det &= \alpha \wedge \star (\star \star \beta) = (-1)^{k(m-k)} \star \alpha \wedge \star (\star \beta) \\ &= (-1)^{k(m-k)} \langle \star \alpha \mid \star \beta \rangle \det = (-1)^{k(m-k)} \langle \alpha \mid \beta \rangle \det \end{aligned}$$

gilt. Und da $\alpha \in \wedge^k V^*$ beliebig war, folgt auch die erste Aussage. ///

X.1.2 Beispiel

In vier Dimensionen gilt beispielsweise für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $\sigma^1, \dots, \sigma^4$

$$\star \sigma^1 = \sigma^2 \wedge \sigma^3 \wedge \sigma^4$$

und

$$\star (\sigma^1 \wedge \sigma^3) = -\sigma^2 \wedge \sigma^4.$$

Wir übertragen dies in natürlicher Weise auf orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dafür müssen wir zunächst die Determinante übersetzen:

X.1.3 Definition (Volumenform)

Für eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^m, g) heißt $d\text{vol} \in \Omega^m(M, \mathbb{R})$ die *Volumenform* der Riemannschen Metrik, wobei für eine Karte (U, x) und einen Punkt $p \in U$ für den $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)_p$ eine Orthogonalbasis von $T_p M$ ist,

$$d\text{vol}_p = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p$$

gilt, d. h. für jede Karte (U, x) gilt

$$d\text{vol}|_U = \frac{\det(g_{ij})}{\sqrt{|\det(g_{ij})|}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

X.1.4 Definition (Hodge \star -Operator auf Mannigfaltigkeiten)

Der punktweise definierte isometrische Bündelisomorphismus

$$\star : \bigwedge^k TM^* \rightarrow \bigwedge^{m-k} TM^* \quad (\star\omega)_p = \star_p \omega_p$$

heißt *Hodge \star -Operator* von (M, g) , wobei \star_p den eindeutigen Hodge- \star -Operator auf dem orientierten Vektorraum $(T_p M, g|_p)$ bezeichnet.

Es gelten die Eigenschaften wie vorher und dieser Operator lässt sich punktweise auf Schnitte fortsetzen. Entsprechend erhalten wir wie in der Motiviation:

X.1.5 Definition (Skalarprodukt auf den Schnitten)

Für eine orientierte, kompakte³ Riemannsche Mannigfaltigkeit definieren wir

$$\langle \omega | \eta \rangle_{L^2} := \int_M \langle \omega | \eta \rangle \, \text{dvol} := \int_M \omega \wedge \star \eta,$$

welches ein positiv definiertes inneres Produkt auf $\Omega^k(M, \mathbb{R})$ definiert, dieses nennen wir *L^2 -Produkt*. Damit ist $\Omega^k(M, \mathbb{R})$ offensichtlich ein Prä-Hilbertraum.

X.1.6 Motivation

Wir wollen die Bedingung $\omega \perp d\Omega^{k-1}$ charakterisieren, also

$$\begin{aligned} \omega \perp d\Omega^{k-1} &\iff 0 = \langle \omega | d\eta \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall \eta \in \Omega^{k-1}(M) \\ &\iff 0 = \int_M \omega \wedge \star d\eta \quad \forall \eta \in \Omega^{k-1}(M). \end{aligned} \tag{X.1}$$

Wir bemerken, dass für $\omega \in \Omega^k$ und $\eta \in \Omega^{k-1}$ gilt⁴

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star d\eta &= (-1)^{k(m-k)} (\star\omega) \wedge d\eta = (d\eta) \wedge \star\omega \\ &= d(\eta \wedge \star\omega) + (-1)^k \eta \wedge d\star\omega \\ &= d(\eta \wedge \star\omega) + (-1)^k \underbrace{(-1)^{(k-1)(m-k+1)}}_{=\star_{k-1}^2} (d\star\omega) \wedge \eta \\ &= d(\eta \wedge \star\omega) + (-1)^k (d\star\omega) \wedge \star(\star\eta) \\ &= d(\eta \wedge \star\omega) + (-1)^k (-1)^{(k-1)(m-k+1)} (\star d\star\omega) \wedge \star\eta \\ &= d(\eta \wedge \star\omega) + (-1)^{k(m+1)-1} (\star d\star\omega) \wedge \star\eta \end{aligned}$$

Mit dieser Zwischenrechnung und dem Stokes Theorem mit $\partial M = \emptyset$ gilt also genau dann Gleichung (X.1) mittels dieser Zwischenrechnung, falls

$$0 = \int_M \omega \wedge \star d\eta = \int_M (\star d\star\omega) \wedge \star\eta = \langle \star d\star\omega | \eta \rangle_{L^2} \quad \forall \eta \in \Omega^{k-1}(M),$$

da $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2}$ nicht ausgeartet ist.

³wiederum benötigen wir die Kompaktheit nur um die Wohldefiniertheit des Integrals sicher zu stellen.

⁴Im letzten Schritt beachten wir, wann dies welches Vorzeichen gibt und drücken dies mit anderen Potenzen von -1 aus.

X.1.7 Definition

Für eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand heißt

$$\delta := (-1)^{k(m+1)+1} \star d\star : \Omega^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M, \mathbb{R})$$

die *Koäußere Ableitung*. Es gilt nach Motivation X.1.6

$$\langle \omega | d\eta \rangle_{L^2} = \langle \delta\omega | \eta \rangle_{L^2} \quad \forall \omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^{k-1},$$

d. h. δ ist der zu d adjungierte Operator bezüglich des L^2 -Skalarprodukts.

X.1.8 Bemerkung (Leichte Verallgemeinerung)

Ist V ein orientierter \mathbb{R} -Vektorraum und W ein \mathbb{K} -Vektorraum mit hermiteschem inneren Produkt. Dann lässt sich

$$\star : \bigwedge^k V^* \otimes W \rightarrow \bigwedge^{m-k} V^* \otimes W : \alpha \otimes w \mapsto (\star\alpha) \otimes w$$

definieren und dann gilt für $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V^* \otimes W$

$$\langle \alpha \wedge \star\beta \rangle_W = \langle \alpha | \beta \rangle_{L^2} \det,$$

wobei letzteres Skalarprodukt mittels

$$\langle \alpha_1 \otimes w_1 | \alpha_2 \otimes w_2 \rangle_{L^2} = \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle_{L^2} \langle w_2 | w_1 \rangle_W$$

definiert ist.

Auf Mannigfaltigkeit wird dies vergleichbar gemacht, d. h. für ein \mathbb{K} -Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit hermitescher Bündelmetrik über einer kompakten, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit definieren wir

$$\begin{aligned} \bigwedge^k TM^* \otimes E &\rightarrow \bigwedge^{m-k} TM^* \otimes E \\ \Omega^k(M, E) &\rightarrow \Omega^{m-k}(M, E) \end{aligned} : \alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha | \beta \rangle_{L^2} \text{ vol}$$

entsprechend definiert sich das L^2 -innere Produkt auf $\Omega^k(M, E)$ mittels

$$\langle \omega | \eta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \omega \wedge \star\eta \rangle = \int_M \langle \omega, \eta \rangle \text{ dvol}.$$

X.1.9 Lemma

Für eine kompakte und orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) ohne Rand und ein Riemannisches Vektorbündel $(E, h) \rightarrow M$ ist

$$g\delta := (-1)^{m(k-1)+1} \star g d \circ \star : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^{k-1}(M, E)$$

der adjungierte (bezüglich L^2 -Produkt) Operatoren zu $g d$, d. h.

$$\langle g\delta\omega | \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega | g d\eta \rangle_{L^2} \quad \forall \omega \in \Omega^k(M, E), \eta \in \Omega^{n+1-k}(M, E)$$

BEWEIS

Wie im speziellen Fall. ///



X.2. Lineare Differential Operatoren

X.2.1 Definition (Laplace Operator)

Für eine kompakte und orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand und ein Riemannsches Vektorbündel $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ mit einem metrischen Zusammenhang ∇ ist der *Laplace Operator* auf den k -Formen durch

$$\Delta_{\nabla}^g := g\delta g d + g d g\delta : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^k(M, E)$$

definiert.

Entsprechend bezeichnet $\Delta := \Delta_{\nabla}^g$ den Laplace-Operator auf den skalarwertige k -Formen $\Omega^k(M)$. Wenn keine Verwechslung möglich ist, werden wir im Folgenden nur Δ für Δ_{∇}^g bzw. für Δ schreiben.

X.2.2 Lemma (Eigenschaften des Laplace Operators)

Für eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand und ein Riemannsches Vektorbündel $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ mit metrischem Zusammenhang ∇ ist der Laplace Operator selbstadjungiert und kommutiert mit dem Hodge- \star -Operator, d. h.

$$\langle \Delta\omega | \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega | \Delta\eta \rangle_{L^2}, \quad \star \circ \Delta = \Delta \circ \star.$$

BEWEIS

Für zwei k -Formen $\omega, \eta \in \Omega^k(E)$ gilt

$$\langle \Delta\omega | \eta \rangle_{L^2} = \langle g d g\delta\omega + g\delta g d\omega | \eta \rangle_{L^2} = \langle g\delta\omega | g\delta\eta \rangle_{L^2} + \langle g d\omega | g d\eta \rangle_{L^2} = \langle \omega | \Delta\eta \rangle_{L^2}$$

und damit ist der Laplace-Operator selbstadjungiert. Des Weiteren gilt per Definition auf den k -Formen $\Omega^k(E)$

$$\begin{aligned} \star\Delta &= \star g\delta g d + \star g d g\delta = \star \left((-1)^{mk+1} \star g d \star \right) g d + \star d \left((-1)^{m(k-1)+1} \star g d \star \right) \\ &= \left((-1)^{mk+1} \underbrace{\star_k \star_{m-k}}_{(-1)^{k(m-k)}} g d \star \right) g d + \underbrace{(-1)^{m(k-1)+1} (-1)^{m(m-k)}}_{=1} g\delta g d \star \\ &= (-1)^{mk+1} g d \star \underbrace{g d (-1)^{k(m-k)}}_{=\star_{m-k} \star_k} + g\delta g d \star \\ &= (-1)^{mk+1} (-1)^{m(m-k-1)+1} g d g\delta \star + g\delta g d \star = g d g\delta \star + g\delta g d \star = \Delta \star. \quad /// \end{aligned}$$

X.2.3 Beispiel (Laplace auf den Funktionen)

Für eine Funktion $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ gilt $\Delta f = \delta df + d\delta f = \delta df$, da $\delta f = 0$. Wir nehmen zur deutlichen Vereinfachung an, dass eine Karte (U, x) existiert so, dass $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m) \in \mathfrak{X}(U)$ ein Orthonormalrahmen ist, also

$$g = \sum_{i=1}^m dx^i \wedge dx^i \quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

und da auf Ω^1 immer $\delta = - \star d \star$ gilt, folgt

$$\star df = \frac{\partial f}{\partial x^i} (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m$$

und damit berechnen wir

$$\begin{aligned} d \star df &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} (-1)^{i+1} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} \underbrace{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m}_{= \text{dvol}} \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta f = - \star d \star df = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}.$$

Wir bemerken, dass das ungewohnte minus eine Konventionsfrage ist – hier nehmen wir diese Konvention, damit der Δ positiv ist – sprich positive Eigenwerte hat.

X.2.4 Motivation (Wiederholung)

Wir wiederholen die Motivation X.1.6: Für $\omega \in \Omega^k(E)$ suchen wir eine k -Form

$$\alpha \in \Omega^k(E) \text{ mit } d\alpha = 0, \alpha \in [\omega] \text{ und } \alpha \perp (d^\nabla \Omega^{k-1}(E)).$$

Dies ist aber der Fall, wenn $\mathcal{J}d\alpha = 0$ und $\mathcal{J}\delta\alpha = 0$. Wir werden noch zeigen, dass dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\Delta\alpha = 0$. Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen α ist gewöhnliche Theorie von partiellen Differentialgleichungen – allerdings nur in der L^2 -Vervollständigung von $\Omega^k(M, E)$.

X.2.5 Definition (Harmonische Formen)

Für eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und ein Riemannsches Vektorbündel $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ mit metrischem Zusammenhang ∇ ist

$$\text{Harm}^k(E) := \text{Harm}^k(M, E) := \ker \Delta_{\nabla}^{\mathcal{J}} \quad \Delta_{\nabla}^{\mathcal{J}} : \Omega^k(E) \rightarrow \Omega^k(E).$$

die Menge der *Harmonische k -Formen*.

X.2.6 Lemma (Charakterisierung von Harmonik)

Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M, E)$ auf einer kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{g}) ohne Rand mit Werten in einem Riemannsches Vektorbündel $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ mit einem metrischen Zusammenhang ∇ ist genau dann harmonisch, d. h. $\Delta_{\nabla}^{\mathcal{J}}\omega = 0$, falls $\mathcal{J}\delta\omega = 0$ und $\mathcal{J}d\omega = 0$.

BEWEIS

Für $\omega \in \Omega^k(E)$ gilt

$$\langle \Delta\omega | \omega \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{J}d\mathcal{J}\delta\omega + \mathcal{J}\delta\mathcal{J}d\omega | \omega \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{J}\delta\omega | \mathcal{J}\delta\omega \rangle_{L^2} + \langle \mathcal{J}d\omega | \mathcal{J}d\omega \rangle_{L^2}$$

und somit folgt die Aussage aus der Tatsache, dass die letzten beiden Terme nicht-negativ sind. ///



X.2.7 Bemerkung

Offensichtlich können wir die Inklusion

$$\text{Harm}^k(E) \rightarrow H_{dR}^k(E) : \omega \mapsto [\omega]$$

betrachten und wir müssen noch Bijektivität zeigen.

X.2.8 Beispiel

Für eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand (M, g) gilt mittels des Maximums Prinzips

$$\Delta f = 0 \iff f = \text{konst.}$$

BEWEIS

Nach Lemma X.2.6 gilt

$$\Delta f = 0 \iff \delta f = 0 \text{ und } df = 0 \iff f = \text{konst.} \quad ///$$

Wir gehen jetzt dazu über den Laplace zu verallgemeinern.

X.2.9 Definition (Linearer Differentialoperator auf Mannigfaltigkeit)

Für zwei Vektorbündel $E, F \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M heißt eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$$

linearer Differentialoperator der Ordnung k , falls in einer⁵ Trivialisierung von E und F durch Karten (U, x) , d. h.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E|_U) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{C}^\infty(x(U), V) & & E|_U & \xrightarrow{\Phi} & x(U) \times V \\ \downarrow D & & \downarrow \Psi \circ D \circ \Phi^{-1} & & & & \\ \Gamma(F|_U) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{C}^\infty(x(U), W) & & F|_U & \xrightarrow{\Psi} & x(U) \times W \end{array}$$

gilt, dass $\Psi \circ D \circ \Phi^{-1}$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf $x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist.

X.2.10 Bemerkung

Diese lokale Form ist unabhängig von Karte und Trivialisierungswahl. Die Koeffizienten sind dagegen *nicht* Karten- und Trivialisierungsunabhängig. Dies machen wir uns am Beispiel eines Differentialoperators D 2.ter Ordnung klar. Sei dazu lokal

$$D = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \text{niedere Ordnung.}$$

⁵und damit in jeder

Dann gilt bei einem Kartenwechsel von x nach \tilde{x} :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} = \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \sum_{n,l} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^l}.$$

In der „neuen“ Karte \tilde{x} hat D dann die Form

$$D = \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \text{niedere Ordnung}, \quad \tilde{a}_{ij} := \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j}.$$

Somit transformieren sich die Koeffizienten (a_{ij}) wie ein Schnitt in $TM^* \otimes TM^*$. Deshalb kann man das *Symbol* $\sigma(D)$ für D auf ganz M als

$$\sigma(D) \in \Gamma(\text{Sym}^k(TM^*, \text{Hom}(E, F)))$$

definieren, also gilt mit $p \in M$ und $\alpha \in TM^*$ bereits $\sigma_p(D)(\alpha) \in \text{Hom}(E_p, F_p)$. Und lokal gilt mit

$$\alpha = \sum_i \xi_i dx^i, \quad D = \sum_{|I| \leq k} a_I \frac{\partial}{\partial x^I}$$

auch

$$\sigma(D)(\alpha) = \sum_{|I|=k} a_I \xi^I.$$

X.2.11 Definition (elliptischer Differentialoperator)

Ein (linearer) Differentialoperator $D \in \text{Hom}(\Gamma(M, E); \Gamma(M, F))$ zwischen zwei Vektorbündel $E^r, F^s \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M heißt *elliptisch*, falls

$$\sigma_p(D)(\alpha) \in \text{Hom}(E_p, F_p), \quad \forall p \in M, \forall \alpha \in T_p M^* \setminus \{0\}$$

invertierbar ist. Insbesondere gilt dann $r = s$.

X.2.12 Beispiel

- Sei $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E) = \Gamma(\text{Hom}(TM, E))$ ein Zusammenhang. Dann gilt für das zugehörige Symbol

$$\sigma(\nabla)(\alpha) = \alpha \text{id}_E \in \text{Hom}(E, \text{Hom}(TM, E)).$$

Dies ist offenbar nicht invertierbar und somit ist ∇ nicht elliptisch.

- Betrachte die äußere Ableitung $\mathcal{d} : \tilde{E} := \Omega^k(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(E) =: \tilde{F}$. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{d})(\alpha) = \alpha \wedge \cdot \in \text{Hom}(\tilde{E}, \tilde{F}).$$

Also ist im Allgemeinen \mathcal{d} nicht elliptisch. Wir bemerken, dass $\sigma(\mathcal{d})$ unabhängig von ∇ ist.



- Für die Koableitung $\delta^\nabla : \Omega^k(E) \rightarrow \Omega^{k-1}(E)$ gilt

$$\sigma(\mathcal{G}d)(\alpha) = i_{\alpha^\sharp},$$

wobei $i_v \alpha = \alpha(v, -)$ für $\alpha \in \wedge^k V^*, v \in V$ ist.

X.2.13 Lemma

Ist M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und zwei Riemannsche Vektorbündel $(E, \tilde{h}), (F, \tilde{h}) \rightarrow M$, so gibt es zu jedem linearen Differentialoperator $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ der Ordnung k genau einen adjungierten linearen Differentialoperator $D^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ der Ordnung k , d. h.

$$\langle D\Psi | \varphi \rangle_F = \langle \Psi | D^*\varphi \rangle_E, \quad \Psi \in \Gamma(E), \varphi \in \Gamma(F).$$

Dabei gilt $\sigma(D^*)(\alpha) = (\sigma(D)(\alpha))^* \in \text{Hom}(F, E)$, also insbesondere ist D genau dann elliptisch, wenn D^* dies ist.

BEWEIS

Verwende den Satz von Stokes. Für $D = \mathcal{G}d, \mathcal{G}\delta, \Delta_{\nabla}^{\mathcal{G}}$ kennen wir die adjungierten Operatoren schon – dies genügt für unsere Zwecke.

X.2.14 Beispiel

Es gilt $\sigma(\delta^\nabla)(\alpha) = \pm i_{\alpha^\sharp} = \pm (\sigma(D^\nabla(\alpha)))^*$ (vgl. vorheriges Beispiel). Damit folgt nun

$$\begin{aligned} \sigma_D(\Delta)(\alpha) &= \sigma(\mathcal{G}\delta \mathcal{G}d)(\alpha) + \sigma(\mathcal{G}d \mathcal{G}\delta)(\alpha) \\ &= \sigma(\mathcal{G}\delta)(\alpha) \circ \sigma(\mathcal{G}d) + \sigma(\mathcal{G}d)(\alpha) \circ \sigma(\mathcal{G}\delta) \\ &= (\pm i_{\alpha^\sharp}) \circ (\alpha \wedge \cdot) + \alpha \wedge (i_{\alpha^\sharp} \cdot) \\ &= \pm \|\alpha\|^2 \text{id}, \end{aligned}$$

wobei id hier die Identität auf $\wedge^k TM^* \otimes E$ ist, also ist der Laplace-Operator Δ elliptisch ist.

Die Wiederholung, die vor diesem Theorem stand, wurde in Abschnitt A.2 verschoben

X.2.15 Theorem (Eigenschaften elliptischer Differentialoperatoren)

Ist (M^m, \mathcal{g}) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $(E, \tilde{h}), (F, \tilde{h}) \rightarrow M$ zwei Riemannsche Vektorbündel mit metrischen Zusammenhängen ∇ bzw. $\tilde{\nabla}$, so gilt für jeden linearen, elliptischen Differentialoperator $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$

1. $\ker D, \ker D^*, \text{CoKer } D, \text{CoKer } D^*$ sind endlichdimensional.
2. $\text{Bild } D = (\ker D^*)^\perp$ (\perp bzgl. dem L^2 -Skalarprodukt).
3. $\Gamma(E) \cong \ker D \oplus \text{Bild } D$.
4. Der Index $\text{ind}(D) = \dim \ker D - \dim \text{CoKer } D$ hängt nur von der Homotopieklasse des Symbols $\sigma(D)$ ab.
5. $D = D^* \Rightarrow \Gamma(E) = \ker D \oplus (\ker D)^\perp = \ker D \oplus \text{Bild } D$.

BEWEIS

Wird nicht erbracht. ///

Insbesondere ist die Gleichung $D\Psi = \varphi$ genau dann lösbar, wenn $\varphi \perp \ker D^*$ gilt. Die Lösung ist dabei wieder eindeutig bis auf $\ker D$.

X.2.16 Proposition (Hodge-Zerlegung)

Ist (M^m, \mathcal{g}) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $(E, \mathfrak{h}) \rightarrow M$ ein Riemannsches Vektorbündel mit metrischem Zusammenhang ∇ , insbesondere ist der Laplace-Operator Δ elliptisch, so gilt

1. $\text{Harm}^k(M, E) = \ker \Delta \subset \Omega^k(M, E)$ ist endlichdimensional.
2. $\Omega^k(M, E) = \ker \Delta \oplus \text{Bild } \Delta$ und $\text{Bild } \Delta = \text{Bild } \mathcal{d} \oplus \text{Bild } \delta$ (jeweils orth. Summen).
 Insbesondere ist die Gleichung $\Delta\omega = \eta$ genau dann lösbar, wenn $\eta \perp \ker \Delta$ gilt, d. h. wenn

$$0 = \langle \eta | \alpha \rangle_{L^2} = \int_M \langle \eta \wedge \star \alpha \rangle \quad \forall \alpha \in \text{Harm}^k(M, E).$$

BEWEIS

Wende Theorem X.2.15 auf $\tilde{E} := \wedge^k TM^* \otimes E$ und $D = \Delta$ an. Mit Lemma X.2.2 folgt damit insbesondere $\Gamma(\wedge^k TM^* \otimes E) = \ker \Delta \oplus \text{Bild } \Delta$ und damit verbleibt nur zu zeigen, dass $\text{Bild } \Delta = \text{Bild } \mathcal{d} \oplus \text{Bild } \delta$, wobei die Inklusion „ \subseteq “ per Definition klar ist. Für die umgekehrte Inklusion erhalten wir mit Lemma X.2.6 $\ker \Delta = \ker d \cap \ker \delta$ und

$$\langle \eta | \alpha \rangle_{L^2} = \langle d\omega | \alpha \rangle_{L^2} = \langle \omega | \delta \alpha \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall \eta = d\omega \in \text{Bild } \mathcal{d}, \alpha \in \ker \Delta$$

bereits $\text{Bild } \mathcal{d} \perp \ker \Delta$. Gleichartig erhalten wir auch $\text{Bild } \delta \perp \ker \Delta$. ///

X.3. Poincaré-Dualität

X.3.1 Theorem (von de Rham und Hodge)

Es gilt $\text{Harm}^k(M) \cong H_{dR}^k(M)$, falls M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Insbesondere gilt $\dim H_{dR}^k(M, \mathbb{K}) < \infty$.

BEWEIS

Wir wählen eine Riemannsche Metrik \mathcal{g} auf M und zeigen die natürliche Isomorphie

$$\text{Harm}^k(M) \cong H_{dR}^k(M),$$

vermöge $\omega \mapsto [\omega]$, da wir dann mit der Hodge-Zerlegung, Proposition X.2.16 die Aussage erhalten.

Beweis der Surjektivität vervollständigt



„**Injektivität**“: Ist $\omega \in \text{Harm}^k(M)$ eine Harmonische k -Form mit $0 = [\omega] \in H_{dR}^k(M)$, so gilt per Definition $\omega \in \text{Bild } d \subseteq \text{Bild } \Delta$ und damit, wiederum mit der Hodge-Zerlegung, gilt $\omega \perp \ker \Delta$. Da aber nach Voraussetzung $\omega \in \text{Harm}^k(M) = \ker \Delta$ gilt, folgt $\omega = 0$.

„**Surjektivität**“: Ist $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$ die de-Rham Restklasse einer geschlossenen k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$, so gilt nach der Hodge-Zerlegung

$$\omega = \omega_0 + d\eta + \delta\nu, \quad \omega_0 \in \text{Harm}^k(M), \eta \in \Omega^{k-1}(M), \nu \in \Omega^{k+1}(M).$$

Da ω nach Voraussetzung geschlossen ist, folgt mit Lemma X.2.6

$$0 = d\omega = \underbrace{d\omega_0}_{=0} + \underbrace{d^2}_{=0} \eta + d\delta\nu = d\delta\nu$$

und daher gilt

$$\Delta\delta\nu = d \underbrace{\delta\delta}_{=0} \nu + \delta \underbrace{d\delta\nu}_{=0} = 0,$$

also $\Delta\delta\nu = 0$. Da nach der Hodge-Zerlegung $\text{Bild } \delta \perp \ker \Delta$ gilt, folgt also $\delta\nu = 0$, also

$$\omega = \omega_0 + d\eta$$

und daher gilt $[\omega] = [\omega_0] \in H_{dR}^k(M)$. Da $\omega_0 \in \text{Harm}(M)$ harmonisch ist, folgt die Aussage. ///

X.3.2 Definition (Bettizahlen)

Ist M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand, so heißt

$$b_k(M) := \dim H_{dR}^k(M) \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

k -te Bettizahl.

X.3.3 Theorem (Poincaré-Dualität)

Ist M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand, so ist durch

$$H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^{m-k}(M) \rightarrow \mathbb{K} : ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

eine nicht-ausgeartete Bilinearform definiert und daher gilt $H_{dR}^k \cong (H_{dR}^{m-k})^*$, also gilt insbesondere $H_{dR}^m \cong \mathbb{K}$ vermöge \int_M und $b_k = b_{m-k}$, falls M zusammenhängend ist.

BEWEIS

Sind $\omega, \tilde{\omega} \in H_{dR}^k(M)$ zwei geschlossene k - und $\eta \in H_{dR}^{m-k}(M)$ eine geschlossene $m-k$ -Form mit $\omega - \tilde{\omega} \in \text{Bild } d$, also $\omega - \tilde{\omega} = d\alpha$ für eine $k-1$ -Form $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, so gilt nach dem Satz von Stokes, VII.3.13

$$\int_M (d\alpha) \wedge \eta = \int_M d(\alpha \wedge \eta) - (-1)^{k-1} \alpha \wedge \underbrace{d\eta}_{=0} = \int_{\partial M} \alpha \wedge \eta = 0$$

und damit ist diese Bilinearform wohldefiniert. Insbesondere genügt es nach X.3.1 zu zeigen, dass diese auf Harmonischen k -Formen nicht ausgeartet ist, um zu erhalten, dass sie nicht-ausgeartet ist.

Ist allerdings $\omega \in \text{Harm}^k(M)$ eine beliebige harmonische k -Form mit

$$\int_M \omega \wedge \eta = 0 \quad \forall \eta \in \text{Harm}^{m-k}(M),$$

so gilt insbesondere

$$0 = \int_M \omega \wedge \star \omega = \langle \omega | \omega \rangle_{L^2}$$

da nach Lemma X.2.2 insbesondere $\Delta \star \omega = \star \Delta \omega = 0$ und damit $\star \omega \in \text{Harm}^{m-k}(M)$ gilt. Da $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2}$ ein Skalarprodukt ist, folgt $\omega = 0$. Damit ist diese Bilinearform nicht ausgeartet. ///

Anhang und Verzeichnisse

Vorwort zum Anhang

Der Anhang wurde aus Teilen der unkorrigierten \LaTeX Live-Mitschriebs von MARKUS KLEIN der *Differentialgeometrie I* Vorlesung und des ebenfalls unkorrigierten \LaTeX Live-Mitschriebs von CHRISTOPHER NERZ der *Differentialgeometrie II* Vorlesung extrahiert, beide Vorlesungen wurden von PROF. DR. FRANZ PEDIT an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen gehalten.

Der Anhang entstammt dabei den diversen Einschüben, Anmerkungen, Voraussetzungen, Einfügungen usw. der Vorlesung.

- Abschnitt A.1, „Lexikon der Topologie“ entstammt dem Einschub „Lexikon der Topologie“ des ersten Kapitels „Manigfaltigkeiten“ und wurde deutlich umsortiert und um einiges (ursprünglich in den anderen Kapiteln eingeführtes) erweitert.
Er wird ab dem ersten Kapitel in Differentialgeometrie I vorausgesetzt.
- Abschnitt A.2, „Multilineare Algebra und Tensoren“ entstammt Wiederholungen aus Abschnitt IV.2, „Unterbündel und Bündelkonstruktionen“ und wird auch ab diesem Abschnitt vorausgesetzt.
- Der Anhang Abschnitt A.3, „Analysis und gewöhnliche Differentialgleichungen“ wird ab Kapitel III, „Differentialgleichungen“ vorausgesetzt und entstammt teilweise Bemerkungen etc. und wurde teilweise neu hinzugefügt.
- Der Abschnitt Abschnitt B.2, „Tensoren“ wird ab dem Abschnitt IV.2, „Unterbündel und Bündelkonstruktionen“ vorausgesetzt und wurde von dort aus Anmerkungen, Definitionen etc. extrahiert.
- Der Abschnitt Abschnitt B.3, „Differentialgleichungen“ wurde aus Anmerkungen des Abschnitts „Hodge-Theorie“ des sechsten Kapitels „Kohomologieberechnung“ entnommen und wird ab Kapitel X, „Hodge Theorie und Differentialoperatoren“ vorausgesetzt.

Wie die original Mitschriebe erhebt auch dieses Scriptum definitiv keinen Anspruch auf Richtigkeit, Vollständigkeit oder sonst irgendetwas. Es ist *nicht* durch PROF. PEDIT autorisiert.

Bei Fragen, Wünschen oder Verbesserungsvorschlägen freue ich mich über jede E-Mail an studium@phoenixes.de.

Vielen Dank!
CHRISTOPHER R. NERZ

Inhaltsverzeichnis – Anhang

A. Wiederholungen	215
A.1. Lexikon der Topologie	215
A.2. Multilineare Algebra und Tensoren	220
A.3. Analysis und gewöhnliche Differentialgleichungen	222
B. Weiteres aus anderen Gebieten	225
B.1. Topologie	225
B.2. Tensoren	226
B.3. Differentialgleichungen	233
Verzeichnisse	235
Literaturverzeichnis	235
Abbildungsverzeichnis	237
Verzeichnis der Sätze und Definitonen	239
Symbolverzeichnis	247
Stichwortverzeichnis	253

Anhang A.

Wiederholungen

A.1. Lexikon der Topologie

A.1.1 Definition (Topologischer Raum, Offen)

Ein Paar (X, \mathcal{T}) heißt *Topologischer Raum*, falls X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \wp(X)$ eine Familie von Teilmengen von X ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Wenn $\{O_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, dann auch $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$
3. Wenn $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, dann auch $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$

$O \in \mathcal{T}$ nennen wir *offen*.

A.1.2 Definition (Abgeschlossenheit)

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, so heißt eine Menge $A \subseteq X$ *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist. Das heißt A ist abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

A.1.3 Definition (Umgebung)

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, so heißt eine Menge $U \subseteq X$ *Umgebung* von $p \in X$, falls eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $p \in O \subseteq U$ existiert.

A.1.4 Beispiel

Für $X = \mathbb{R}^n$ heißt eine Menge $O \subseteq X$ offen bzgl. der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie, falls für jeden Punkt $p \in O$ ein positiver Radius $\varepsilon > 0$ existiert so, dass

$$B_\varepsilon(p) := \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < \varepsilon\} \subseteq O.$$

A.1.5 Definition (Umgebungsbasis)

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, so heißt eine Familie $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{T}$ von offenen Mengen *Umgebungsbasis* von $p \in X$, falls für jede Umgebung U von $p \in X$ eine Menge $U_p \in \mathcal{U}_p$ der Familie existiert mit $p \in U_p \subseteq U$.

Dieser Abschnitt war nach Bemerkung I.1.2 eingeordnet und wurde umsortiert.

A.1.6 Definition ((Sub-)Basis der Topologie)

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ *Basis* der Topologie \mathcal{T} , falls

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subseteq U}} B \quad \forall U \in \mathcal{T}.$$

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ *Subbasis* der Topologie \mathcal{T} , falls die Familie

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{k=1}^n B_k \mid n \in \mathbb{N}, B_k \in \mathcal{S} \right\}$$

eine Basis von \mathcal{T} ist.

A.1.7 Definition (Abzählbarkeitsaxiome)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls für jeden Punkt $p \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis existiert.

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls es eine abzählbare Basis der Topologie \mathcal{T} gibt.

A.1.8 Beispiel

\mathbb{R}^n erfüllt das beide Abzählbarkeitsaxiom, denn zu einem Punkt ist $\{B_{\frac{1}{n}}(p) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{U}_p$ eine abzählbare Umgebungsbasis und

$$\mathcal{B} = \left\{ B_\varepsilon(p) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, p \in \mathbb{Q}^n \right\}$$

ist eine Basis der Topologie.

A.1.9 Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) heißt *stetig*, falls das Urbild offener Mengen offen ist, d. h.

$$f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X \quad \forall O \in \mathcal{T}_Y.$$

A.1.10 Definition (Weg)

Wir später verwendet

Eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow X$ von einem zusammenhängenden Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt *Weg* oder *Kurve*.

A.1.11 Schreibweise

Wir später verwendet

Für Wege $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [0; 1] \rightarrow X$ in einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) schreiben wir

- für den umgekehrt durchlaufende Weg $(-\gamma)(t) := \gamma(1 - t)$;

- für das „hintereinander Laufen“ beider Wege

$$\gamma_2 \star \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

falls $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

Entsprechend ist dies jeweils für Wege von beliebigem Intervall definiert.

A.1.12 Definition ((Weg-)Zusammenhängend)

Ein Topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *zusammenhängend*, falls er nicht darstellbar ist als Vereinigung zweier offener disjunkte Mengen, die nichtleer sind, d. h., falls

$$X = U \cup V \implies U \cap V \neq \emptyset \quad \forall U, V \in \mathcal{T} \text{ mit } U, V \neq \emptyset.$$

Der Raum heißt *wegzusammenhängend*, falls zwischen jeweils zwei Punkten immer ein stetiger Weg existiert, d. h.

$$\forall p, q \in X \exists \gamma : [0; 1] \rightarrow X \text{ stetig: } \gamma(0) = p \wedge \gamma(1) = q.$$

Der Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, falls für jeden Punkt $p \in X$ eine zusammenhängende offene Umgebung existiert, d. h.

$$\forall p \in X \exists U \in \mathcal{T} \forall q \in U \exists \gamma : [0; 1] \rightarrow X \text{ stetig: } \gamma(0) = p \wedge \gamma(1) = q.$$

A.1.13 Lemma (Wegzusammenhängend und zusammenhängend)

Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend, aber die Umkehrung gilt nicht. Aber jeder lokal wegzusammenhängende und zusammenhängende Weg ist wegzusammenhängend.

A.1.14 Definition (Kompaktheit)

Eine Teilmenge $K \subseteq X$ eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}) heißt *kompakt*, falls jede offene *Überdeckung* eine endliche Teilüberdeckung existiert. Das heißt für jede Familie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \supseteq K$ existiert eine endliche Teilfamilie $\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}$ mit $\bigcup_{O \in \tilde{\mathcal{O}}} O \supseteq K$.

A.1.15 Beispiel

Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann in der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

A.1.16 Definition (Hausdorff-Raum)

(X, \mathcal{T}) heißt *Hausdorff-Raum* bzw. *Hausdorffsch*, falls zwei verschiedene Punkte immer durch offene Mengen getrennt werden können, d. h.

$$\forall p \neq q \in X \exists O_p, O_q \in \mathcal{T} : \quad p \in O_p, q \in O_q, O_p \cap O_q = \emptyset.$$

Eingefügt, da es
später verwendet wird.

A.1.17 Definition (Erzeugte Topologie)

Ist X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ eine Familie von Teilmengen von X , so heißt die kleinste Topologie \mathcal{T} auf X , die \mathcal{B} beinhaltet, die von \mathcal{B} erzeugte Topologie. Wie leicht nachzuweisen ist, gilt

$$\mathcal{T} = \bigcap_{\substack{T \supseteq \mathcal{B} \\ \text{Topologie}}} T = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{k_i} B_{i,k} \mid I \text{ Indexmenge, } k_i \in \mathbb{N}, B_{i,k} \in \mathcal{B} \right\}$$

und \mathcal{B} ist eine Subbasis von \mathcal{T} .

A.1.18 Definition (Induzierte Topologie)

Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}) , so heißt $\tilde{\mathcal{T}}$ die durch \mathcal{T} auf A induzierte Topologie, wobei

$$\tilde{\mathcal{T}} := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

A.1.19 Bemerkung (Allgemeine induzierte Topologie)

Wir können dies verallgemeinern: Ist I eine Indexmenge und $f_i : A \rightarrow X_i$ für $i \in I$ Abbildung in topologische Räume (X_i, \mathcal{T}_i) , so heißt die von \mathcal{S} erzeugte Topologie die von $\{f_i\}_i$ und $\{\mathcal{T}_i\}_i$ induzierte Topologie auf A , wobei

$$\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}.$$

Wir erhalten den obigen Spezialfall mit $A \subseteq X$ durch Betrachtung von $i : A \rightarrow X : x \mapsto x$.

A.1.20 Definition (Produkttopologie)

Sind (X_1, \mathcal{T}_1) und (X_2, \mathcal{T}_2) topologische Räume, so heißt die von

$$\mathcal{B} := \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

erzeugte Topologie die *Produkttopologie* von $X_1 \times X_2$.

A.1.21 Bemerkung

Auch dieses Konzept lässt sich auf beliebige Produkte erweitern. Sei dafür I eine beliebige Indexmenge und für alle $i \in I$ ein topologischer Raum (X_i, \mathcal{T}_i) gegeben. Durch

$$\pi^i : \bigotimes_{j \in I} X_j \rightarrow X_i : (x_j)_{j \in I} \mapsto x_i$$

ist für $i \in I$ die kanonische i -te Projektion definiert und

$$\mathcal{B} := \{\pi_i^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_i\}$$

erzeugt die *Produkttopologie* auf dem Produkt $\bigotimes_{i \in I} X_i$.

A.1.22 Satz (Eindeutigkeit der Finaltopologie)

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so gibt es genau eine Topologie auf X/\sim so, dass

1. die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow X/\sim : x \mapsto [x]$ stetig ist
2. ist (Z, \mathcal{T}_Z) ein weiterer topologischer Raum und $f : X \rightarrow Z$ stetig und konstant auf Äquivalenzklassen, so ist die induzierte Abbildung $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Z : [x] \mapsto f(x)$ stetig.

Diese Topologie heißt *Quotienten-* oder *Finaltopologie* X/\sim . Dabei ist $O \subseteq X/\sim$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(O) \subseteq X$ offen ist.

A.1.23 Korollar

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation, so gilt:

1. Falls X Hausdorffsch ist, dann ist $\sim \subseteq X \times X$ genau dann abgeschlossen, falls X/\sim Hausdorffsch ist.
2. Falls X kompakt ist, dann ist auch X/\sim kompakt.

A.1.24 Beispiel

1. Betrachten wir auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $[x] := \mathbb{R}x$, so ist $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim =: \mathbb{R}P^n$.
2. Betrachten wir die *Sphäre* $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Äquivalenzrelation $[x] := \{\pm x\}$, so ist $S^n / \sim = \mathbb{R}P^n$.
3. Wir erhalten den *n-Torus* \mathbb{T}^n durch die Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^n , wobei $x \sim y : \iff y - x \in \mathbb{Z}^n$: $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \sim$.

Unsere Beispiele haben gemeinsam, dass alle Äquivalenzrelationen von *Gruppenaktionen/-wirkungen* kommen. d. h. für eine Gruppe G und eine Menge X operiert G auf X (von links), falls eine Abbildung $\mu : G \times X \rightarrow X$ existiert mit $\mu(1, x) = x$ und $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x))$. Wir schreiben normalerweise: $\mu(g, x) = g \cdot x = gx$. Dann muß gelten: $1 \cdot x = x$ und $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Äquivalent ist dies beschreibbar durch Darstellungen, d. h. einen Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ deren Äquivalenz man durch $\mu(g, x) = \varrho(g)(x)$ erkennt.

Wir erhalten mit $G \times X \rightarrow X$ dann eine Äquivalenzrelation \sim auf X durch

$$p \sim q \iff \exists g \in G : q = g \cdot p.$$

Dann ist $X/\sim = X/G$. Wir nennen $[p] = G \cdot p$ den *G-Orbit* durch $p \in X$ oder *Bahn* von $p \in X$. Die *Isotropiegruppe* $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\} \subseteq G$ von $p \in M$ ist dann eine Untergruppe von G und wir erkennen, dass $G/G_p \cong G \cdot p$ ist. Solche Räume nennen wir *homogene Räume*.

A.1.25 Definition (Einfach zusammenhängend)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *einfach zusammenhängend*, falls für jeden Punkt $p_0 \in X$ die Fundamentalgruppe trivial ist, d. h. $\pi_0(M, p_0) = \{1\}$ gilt.

A.2. Multilineare Algebra und Tensoren

Es werden kurz einige Begriffe und Aussagen aus der linearen Algebra wiederholt, dabei werden die meisten Beweise nicht geführt.

A.2.1 Wiederholung (Endlichdimensionale Situation)

Seien V, W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume mit hermiteschen Metriken. Dann gilt für eine lineare Abbildung („Operator“) $D : V \rightarrow W$ mit adjungierter Abbildung $D^* : W \rightarrow V$ folgendes¹:

1. Bild $D = (\ker(D^*))^\perp$.
2. $V \cong \ker D \oplus \text{Bild } D$ (vgl. Homomorphie-Satz).
3. $\text{CoKer } D := W/\text{Bild } D$ und für den Index $\text{ind}(D) := \dim \ker D - \dim \text{CoKer } D$ von D gilt $\text{ind}(D) = \dim V - \dim W$.
4. Ist D selbstadjungiert, so folgt $\text{Bild } D = (\ker D)^\perp$ und $V = \ker D \oplus \text{Bild } D$ (sogar orth. Summe).

Dabei ist „1.“ äquivalent zu folgenden Aussage: Die Gleichung $Dv = w$ hat genau dann eine Lösung, wenn $w \perp \ker D^*$ gilt (vgl. Fredholm-Alternative). Die Lösung ist bis auf $\ker D$ eindeutig bestimmt.

A.2.2 Definition (Multilineare Abbildungen)

Für Vektorräume V_1, \dots, V_r und W ist

$$\text{Mult}_{\mathbb{K}}^k(V_1, \dots, V_k; W) := \{T : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W : T \text{ ist multilinear}\}$$

die Menge der \mathbb{K} -multilinearen Abbildungen. Dies ist ein \mathbb{K} -dimensionaler Vektorraum der Dimension $\dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_k \cdot \dim W$.

Hiervon haben wir zwei Spezielle Unterräume, falls $V_i = V$:

A.2.3 Definition (Symmetrische und Alternierende Abbildungen)

Für zwei \mathbb{K} -Vektorräume V und W und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\text{Sym}^k(V, W) := \left\{ T \in \text{Mult}^k(V, \dots, V; W) : T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = T(v_1, \dots, v_k) \right\}$$

¹In dieser Situation ($\dim M = 0$) ist D immer elliptisch.

die Menge der *symmetrischen multilinearen Abbildungen*

$$\text{Alt}^k(V, W) := \left\{ T \in \text{Mult}^k(V, \dots, V; W) : \begin{array}{l} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ = (-1)^\sigma T(v_1, \dots, v_k) \end{array} \right\}$$

die Menge der *antilinearen Abbildungen*

A.2.4 Lemma

Es gilt $\dim \text{Alt}^k(V, W) = \binom{\dim V}{k} \dim W$.

A.2.5 Definition (Spur eines Endomorphismuses)

Für einen Endomorphismus $T \in \text{End}(V)$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V und eine Basis $\{e_i\}_i$ ist die *Spur* durch

$$\text{tr } T := \sum_{i=1}^n a_i^i$$

definiert, wobei a_i^j implizit durch $Te_i = a_i^j e_j$ definiert ist.

A.2.6 Lemma (Die Spur eines Endomorphismus ist wohldefiniert)

Die Spur ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Basiswahl.

BEWEIS

Sind $\{f_i = b_i^j e_j\}_i$ und $\{e_i\}_i$ zwei Basen, so gilt für $B = (b_i^j)$ und $(c_i^j) := C := B^{-1}$ bereits $e_i = c_i^j f_j$, also auch

$$a_i^j e_j = Te_i = T(c_i^k f_k) = c_i^k T(f_k) = c_i^k \tilde{a}_k^l f_l = c_i^k \tilde{a}_k^l b_l^m e_m.$$

Da die e_k linear unabhängig sind, folgt $a_i^j = c_i^k \tilde{a}_k^l b_l^j$, also gilt auch

$$\sum_{i=1}^n a_i^i = \sum_{i=1}^n c_i^k \tilde{a}_k^l b_l^i = b_l^i c_i^k \tilde{a}_k^l = (BC)_l^k \tilde{a}_k^l = \delta_l^k \tilde{a}_k^l = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^i. \quad ///$$

A.2.7 Beispiel (Spur einer Bilineareabbildung)

Sei $e_i = (\delta_i^j)_j$ und $f_i = 2e_i$, sowie

$$T(e_i, e_j) := \delta_i^1 \delta_j^1 + \delta_i^1 + \delta_j^1.$$

Somit gilt in der Basisdarstellung bezüglich e_i

$$\text{tr}_e T = \sum_{i=1}^n T(e_i, e_i) = 2 \sum_{i=1}^n \delta_i^1 + \delta_i^2 = 4 \neq 0.$$

Andererseits gilt

$$T(f_i, f_j) = T(2e_i, 2e_j) = 4T(e_i, e_j) = 4(\delta_i^1 \delta_j^1 + \delta_i^1 + \delta_j^1),$$

also auch

$$\operatorname{tr}_f T = \sum_{i=1}^n T(f_i, f_i) = 4 \sum_{i=1}^n T(e_i, e_i) = 4 \operatorname{tr}_e T \neq \operatorname{Spur}_e T.$$

Damit ist die Spur à priori nicht wohldefiniert für bilinearen Abbildungen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum.

A.2.8 Definition (Spur einer Bilineareabbildung auf einem Hilbertraum)

Für eine Bilineareabbildung $T \in \operatorname{Bil}(V, V; \mathbb{R})$ auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum (V, \mathcal{g}) und eine Orthonormalbasis $\{e_i\}_i$ ist die *Spur* durch

$$\operatorname{tr} T := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

definiert, wobei $a_{ij} = T(e_i, e_j)$.

A.2.9 Lemma (Spur einer Bilineareabbildung auf einem Hilbertraum)

Die Spur ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.

BEWEIS

Folgt wie bei Lemma A.2.6, da die Basiswechselformen nun Orthogonalformen sind. ///

A.3. Analysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

A.3.1 Definition (Träger einer Abbildung)

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung von einem topologischen Raum in eine Menge, so heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{a \in A \mid f(a) \neq 0\}}$$

der *Träger* von f .

A.3.2 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede glatte Selbstabbildung $f : B^m \rightarrow B^m$ des abgeschlossenen $m + 1$ -dimensionalen Einheitsballs $B^m = \{p \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|p\|_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ hat einen Fixpunkt.

BEWEIS

Für $m = 0$ ist dies gerade der Mittelwertsatz, wir zeigen nun den allgemeinen Fall durch einen Widerspruchsbeweis.

Sei also $m \geq 1$ und $f : B^m \rightarrow B^m$ eine glatte Abbildung ohne Fixpunkt, d.h für alle Punkte $p \in B^m$ gilt $p \neq f(p)$. Wir definieren nun eine glatte Abbildung $F : B^m \rightarrow S^m$

vom Einheitsball auf die Sphäre durch Projektion von $f(p)$ durch p , d. h. $F(p)$ ist $f(p) + t(p - f(p))$ für das kleinste $0 \leq t$ mit $f(p) + t(p - f(p)) \in S^m$.²

Per Definition gilt $F|_{S^m} = \text{id}_{S^m}$. Also ist $S^m \xrightarrow{\text{inc}} B^m \xrightarrow{F} S^m$ wohldefiniert und $F \circ \text{inc} = \text{id}_{S^m}$. Damit gilt aber insbesondere $(\text{id}_{S^m})^* = \text{inc}^* \circ F^*$ und somit ist auch

$$H_{dR}^m(S^m) \xrightarrow{F^*} H_{dR}^m(B^m) = 0 \xrightarrow{\text{inc}^*} H_{dR}^m(S^m)$$

die Identitätsabbildung, dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass $H_{dR}^m(S^m) \cong \mathbb{R}$ – siehe bspw. Anwendung VIII.2.11. ///

A.3.3 Satz (Fortsetzungssatz)

Existiert für $f : S^m \rightarrow S^m$ eine Fortsetzung $\tilde{f} : B^m \rightarrow S^m$, dann ist $\deg f = 0$.

BEWEIS

Ähnlich wie der Beweis des Satzes Fixpunktsatz von Brouwer, Satz A.3.2. ///

A.3.4 Definition (Gewöhnliches, glattes Anfangswertproblem)

Sei V ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum und $U \subseteq V$ offen und $\xi : U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Dann heißt

$$\dot{c}(t) = \xi(c(t))c(t_0) = x_0 \in U$$

das Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Diese Differentialgleichung ist sogar autonom, da ξ zeitunabhängig ist.

A.3.5 Satz

Jedes gewöhnliche, glatte Anfangswertproblem hat eine eindeutige glatte Lösung $c : I \rightarrow U$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $T_0 \in I$ ist. c heißt dann Integralkurve von ξ mit der Anfangsbedingung $c(t_0) = x_0$.

A.3.6 Bemerkung

1. Es ist extrem wichtig, Differentialgleichungen zu untersuchen, da wir dafür viele Anwendungen bspw. in der Physik haben – etwa die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die klassische Bewegung eines Massenpunktes $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$.
2. Wir können jede gewöhnliche Differentialgleichung auf die erste Ordnung reduzieren und schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet = \begin{pmatrix} y \\ F(x, y) \end{pmatrix} = \xi(x, y)$$

falls F zeitunabhängig ist.

²ist $p \notin S^m$, so ist dieses $0 \leq t$ offensichtlich eindeutig bestimmt. Für den Fall, eines Punktes $p \in S^m$ auf der Sphäre ist dieses Argument diffizieler.

Anhang B.

Weiteres aus anderen Gebieten

B.1. Topologie

B.1.1 Definition (Homotopie)

Für zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [t_A; t_E] \rightarrow X$ heißt eine Abbildung $h : [0; 1] \times [t_A; t_E] \rightarrow X : (s, t) \mapsto h_s(t)$ *Homotopie*, falls

Wird später verwendet

$$h(i, t) = h_i(t) = \gamma_i(t) \quad \forall t \in [t_A; t_E], i \in \{0, 1\}$$

und entweder (*Homotopie geschlossener Kurven*)

$$h(s, t_A) = h(s, t_E) \quad \forall s \in [0; 1]$$

oder (*Homotopie festen Endpunkten*)

$$h(s, t_i) = \gamma_0(t_i) \quad \forall s \in [0; 1], i \in \{A, E\}$$

gilt. In beiden Fällen heißen die Wege *homotop* zueinander.

B.1.2 Definition (Erste Fundamentalgruppe)

Ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, so heißt für einen Punkt $p_0 \in X$

$$\Lambda_{p_0} := \{\gamma : [0; 1] \rightarrow M : \gamma(0) = \gamma(1) = p_0, \gamma \text{ ist stückweise glatt}\}$$

der *Raum der geschlossenen Kurven* in p_0 und

$$\pi_0(M, p_0) = \Lambda_{p_0} / \sim$$

die *erste Fundamentalgruppe* in p_0 , wobei die zwei Wege $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Lambda_{p_0}$ äquivalent, d. h. $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, sind, falls sie geschlossen homotop sind.

B.1.3 Beispiel

Auf der Kugeloberfläche \mathcal{S}^2 gilt offensichtlich $\pi_0(\mathcal{S}^2, p_0) = \{1\}$ unabhängig von dem Punkt $p_0 \in \mathcal{S}^2$.

Ebenso gilt für die Sphäre \mathcal{S}^1 unabhängig vom Punkt $p_0 \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ jeweils $\pi_0(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1, p_0) \cong \mathbb{Z}^2$.

B.1.4 Definition ((k -fache) Überlagerung)

Eine stetige Abbildung $pr : U \rightarrow V$ zwischen zwei topologischen Räumen U und V heißt *Überlagerung*, falls für jeden Punkt $v \in V$ eine offene Umgebung $V_v \subseteq V$ existiert so, dass ihr Urbild $pr^{-1}(V_v) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i$ in paarweise disjunkte, offene Mengen zerfällt, die jeweils vermöge pr homöomorph zu V_v sind, d. h. jeweils ist $pr|_{U_i} : U_i \rightarrow V_v$ ein Homöomorphismus.

Eine Überlagerung $pr : U \rightarrow V$ zwischen zwei topologischen Räumen U und V heißt *k -fache Überlagerung*, falls jeder Punkt $v \in V$ eine offene Umgebung $V_v \subseteq V$ besitzt, deren Urbild $pr^{-1}(V_v) = U_1 \cup \dots \cup U_k$ in k paarweise disjunkte, offene Mengen zerfällt, die jeweils vermöge pr homöomorph zu V_v sind.

B.1.5 Satz (Überlagerungseigenschaft)

Ist $\gamma : [a; b] \rightarrow V$ ein stetiger Weg in einen topologischen Raum V , $pr : U \rightarrow V$ eine Überlagerung von V und $\tilde{p} \in pr^{-1}(\gamma(0))$ ein Punkt der Überlagerung über $\gamma(0)$, so existiert genau ein stetiger Weg $\tilde{\gamma} : [a; b] \rightarrow U$ mit $pr \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$.

B.2. Tensoren

Der restliche Abschnitt muss noch korrigiert werden und stammt aus dem Kapitel „Äußere Ableitung und Differentialformen“ Abschnitt „Lineare Algebra Wiederholung – abstrakte Begriffe“.

B.2.1 Motivation (für das Tensorprodukt)

Seien V, W, \tilde{W} \mathbb{K} -Vektorräume und es sei $b : V \times W \rightarrow \tilde{W}$ eine bilineare Abbildung. Es wird nun versucht eine universelle Bilineare Abbildung s von $V \times W$ in einen noch unbekanntem Vektorraum zu finden, um dann eine von b abhängige lineare Abbildung \tilde{b} zu finden so, dass $b = \tilde{b} \circ s$. Es wird gelten, dass dieser unbekanntem Vektorraum gerade $V \otimes W$ ist.

B.2.2 Definition (Tensorprodukt)

Wir definieren das *Tensorprodukt* zweier \mathbb{K} -Vektorräume V und W

$$V \otimes W := \mathbb{K}^{(V \times W)} / U,$$

wobei

$$\mathbb{K}^{(V \times W)} := \left\{ f : V \times W \rightarrow \mathbb{K} \mid \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \text{ für alle bis auf} \\ \text{endlich viele } (x, y) \in V \times W \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathbb{K}$$

der freie \mathbb{K} -Vektorraum über der Menge $V \times W$ mit Basis

$$E_{(v,w)}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \begin{cases} 1 & : (v, w) = (\tilde{v}, \tilde{w}) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Also

$$f \in \mathbb{K}^{(V \times W)} \implies f = \sum_{(v,w) \in V \times W} f(v,w)e_{(v,w)},$$

wobei die Summe nach Definition endlich ist, und

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{array}{l} e_{(v_1+v_2,w_1)} - e_{(v_1,w_1)} - e_{(v_2,w_1)}, \\ e_{(v_1,w_1+w_2)} - e_{(v_1,w_1)} - e_{(v_1,w_2)}, \\ e_{(\lambda v_1,w_1)} - \lambda e_{(v_1,w_1)}, \quad e_{(v_1,\lambda w_1)} - \lambda e_{(v_1,w_1)} \end{array} \middle| \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ w_1, w_2 \in W \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

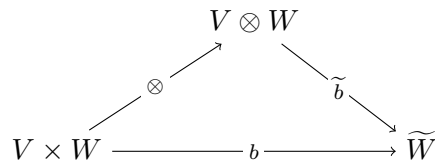
Nun definieren wir eine bilineare Abbildung

$$V \times W \rightarrow \mathbb{K}^{(V \times W)} \rightarrow V \otimes W : (v,w) \mapsto e_{(v,w)} \mapsto [e_{(v,w)}] =: v \otimes w.$$

B.2.3 Lemma

Wir beweisen einige Aussagen

1. Die obige bilineare Abbildung ist universell im Sinne, dass für alle $b \in \text{Bil}(V, W)$ genau ein $\tilde{b} \in \text{Hom}(V \otimes W, \tilde{W})$, sodass



kommutiert. Also $\text{Bil}(V \times W, \tilde{W}) \cong \text{Hom}(V \otimes W, \tilde{W})$.

2. $V \otimes W \cong W \otimes V$ kanonisch
3. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ kanonisch
4. Für $\{v_i\}$ Basis von V , $\{w_j\}$ Basis von W ist

$$\{v_i \otimes w_j \mid i = 1, \dots, m = \dim V, j = 1, \dots, n = \dim W\}$$

ine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

und

$$t \in V \otimes W \implies t = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} t_{ij} v_i \otimes w_j.$$

B.2.4 Definition (Tensoralgebra)

Die *Tensoralgebra*

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{-mal}} \stackrel{=: V^{\otimes k}}{\quad}$$

wobei $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$, ist eine assoziative Algebra mit 1 unter \otimes .

B.2.5 Beispiel

1. $W \otimes V^* \cong \text{Hom}(V, W)$, dies vermöge $(w \otimes \alpha) \mapsto (v \mapsto w \cdot \alpha(v))$. Also

$$T \in \text{Hom}(V, W) \implies T(v_k) = \sum_{l=1}^n w_l T_{lk},$$

wobei T_{lk} „Matrix von T in Basis $\{v_i\}, \{w_j\}$ “. Also, falls $\{\alpha_i\}$ duale Basis zu $\{v_i\}$,

$$T = \sum_{i,j} \underbrace{(w_j \otimes \alpha^j)}_{\text{Basis von } W \otimes V^*} T_{ji}.$$

2. $V^* \otimes W^* \cong \text{Bil}(V \times W, \mathbb{K}) \cong (V \otimes W)^*$ dies vermöge

$$\alpha \otimes \beta \mapsto ((v, w) \mapsto \alpha(v)\beta(w))$$

und die Abbildung aus 1.. Ist andersrum $B \in \text{Bil}(V \times W, \mathbb{K})$, dann

$$b = \sum b_{ij} \alpha^j \otimes \beta^i,$$

wobei $\{\alpha^i\}, \{\beta^j\}$ duale Basis zu $\{v_i\}, \{w_j\}$ sind und $b_{ij} = b(v_i, w_j)$.

3. Allgemein

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W \cong \text{Mult}^k(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$$

mittles

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes w \mapsto ((v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_k(v_k)w).$$

B.2.6 Lemma und Definition (Alternierende Tensoren)

Für einen \mathbb{K} -Vektorraum V und $v_1, \dots, v_k \in V$ definieren wir das Wedge-Produkt durch

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k := \sum_{\sigma \in \Pi(k)} \underbrace{(-1)^\sigma}_{=: \text{sgn } \sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Und das k -te *Dach-Produkt* (k -te *Wedge-Produkt*, k -te *alternierendes Tensorprodukt*) durch

$$\bigwedge^k V := \text{Span}\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mid v_i \in V\} \subset V^{\otimes k}.$$

Ist $\{v_i\}$ eine Basis von V , dann ist

$$\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$$

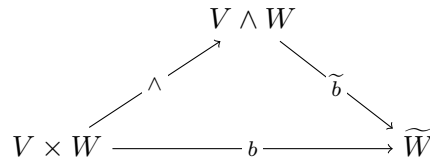
eine Basis von $\wedge^k V$. Insbesondere

$$\dim \wedge^k V = \binom{\dim V}{k}$$

insbesondere $\wedge^0 V = \mathbb{K}$, $\wedge^1 V = V$, $\wedge^{\dim V} V \cong \mathbb{K}$, wobei die letzte Isomorphie nicht kanonisch ist, sondern von der Wahl der Basis abhängt. Es gilt $\wedge^k V^* \cong \text{Alt}^k(V \times \dots \times V, \mathbb{K})$, dies vermöge

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \mapsto \left[(v_1, \dots, v_k) \mapsto \begin{cases} \sum_{\sigma \in \Pi(k)} (-1)^\sigma \alpha_1(v_{\sigma(1)}) \dots \alpha_k(v_{\sigma(k)}) \\ = \det(\alpha_i(v_j))_{i,j} \end{cases} \right]$$

Es gilt die universelle Eigenschaft, dass für jedes $b \in \text{Alt}(V \times V, W)$ genau ein $\tilde{b} \in \text{Hom}(V \wedge V, W)$ existiert, so dass



kommutiert.

B.2.7 Beispiel

- $v_1 \wedge v_2 = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$.
- $\wedge^2 V^* \cong \text{Alt}^2(V \times V; \mathbb{K}) \cong (\wedge^2 V)^*$, denn ist $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ schief, $\{v_i\}$ Basis von V und $\{\alpha^i\}$ duale Basis von V^* , dann ist

$$b = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \alpha^i \wedge \alpha^j = \sum_{i < j} b_{ij} \alpha^i \wedge \alpha^j,$$

wobei $b_{ij} = b(v_i, v_j) = -b_{ji}$.

B.2.8 Definition (Wedge Produkt über Paarungen)

Sei $b : W_1 \times W_2 \rightarrow W$ bilinear (*Paarung*), dann heißt die Abbildung

$$\text{Alt}^k(V; W_1) \times \text{Alt}^l(V; W_2) \rightarrow \text{Alt}^{k+l}(V; W) : (\omega, \eta) \mapsto b(\omega \wedge \eta),$$

das *Wedge-Produkt über b* bilinear, wobei

$$b(\omega \wedge \eta) := \left((v_1, \dots, v_{k+l}) \mapsto \frac{1}{k! \cdot l!} \sum_{\sigma \in \Pi(k+l)} (-1)^\sigma b \left(\omega \left((v_{\sigma(i)})_{i=1}^k \right), \eta \left((v_{\sigma(i)})_{i=k+1}^{k+l} \right) \right) \right).$$

B.2.9 Bemerkung

Das Wedge-Produkt ist

1. „kommutativ“, indem Sinn, dass falls b (anti-)symmetrisch ist, insbesondere $W_1 = W_2$, dann gilt

$$b(\omega \wedge \eta) = \binom{-}{+} (-1)^{k \cdot l} b(\eta \wedge \omega)$$

2. „assoziativ“, indem Sinn, dass falls b assoziativ ist, insbesondere $W_1 = W_2 = W$, also $b(v, b(w, u)) = b(b(w, u), v)$, dann gilt

$$b(\omega \wedge b(\eta \wedge \tau)) = b(b(\omega \wedge \eta) \wedge \tau).$$

Neu eingefügt

3. Beachten wir, dass $\text{Alt}^k(V; W_i) = \text{Alt}^k(V) \otimes W_i$, so erkennen wir

$$b(\omega_1 \wedge \omega_2) = b(\psi_1^i, \psi_2^i) \eta_{1i} \wedge \eta_{2i},$$

wobei $\omega_{1/2} = \psi_{1/2}^i \eta_{1/2i}$ mit $\eta_{1i} \in \text{Alt}^k(V)$ und $\eta_{2i} \in \text{Alt}^l(V)$ sowie $\psi_{1/2}^i \in W_{1/2}$.

B.2.10 Lemma und Definition (Äußere Algebra)

Für einen \mathbb{K} -Vektorraum definieren wir die *äußere Algebra* $\wedge^\bullet V^*$ durch

$$\wedge^\bullet V^* = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \wedge^k V^*,$$

wobei $\wedge^0 V^* = \mathbb{K}$ und klarerweise $\wedge^k V^* = \{0\}$ für $k > \dim V$.

Es gilt

$$\dim(\wedge^\bullet V^*) = \sum_{k=0}^{\dim V} \binom{\dim V}{k} = (1 + 1)^{\dim V} = 2^{\dim V}$$

und die äußere Algebra ist eine endlich dimensionale (graduierte), assoziative \mathbb{K} Algebra mit 1 und

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega.$$

B.2.11 Beispiel

Beispiele dafür sind

1. $W_1 = W_2 = W = \mathbb{K}$, b Multiplikation in \mathbb{K} – b wird in der Notation weggelassen:

$$\wedge : \wedge^k V^* \times \wedge^l V^* \rightarrow \wedge^{k+l} V^* : (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta.$$

Da g kommutativ und assoziativ ist, ist auch \wedge im obigen Sinne kommutativ und assoziativ.

2. Ist $b : \mathbb{K} \times W \rightarrow W$ die Skalarmultiplikation, so ist

$$\wedge : \bigwedge^\bullet \times \bigwedge^\bullet \otimes W : \bigwedge^\bullet \otimes W : (\alpha, \omega) \mapsto \alpha \wedge \omega,$$

wobei wir wieder zum Verkürzen der Schreibweise b weglassen. Es gilt

$$\omega \wedge \eta (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega.$$

3. Ist W eine Liealgebra, mit der Lieklammer $[\cdot, \cdot] : W \times W \rightarrow W$, welche \mathbb{K} -linear und schief ist und die Jacobiidentität erfüllt. Wir definieren

$$[\cdot \wedge \cdot] : \bigwedge^\bullet \otimes W \times \bigwedge^\bullet \otimes W \rightarrow \bigwedge^\bullet \otimes W : (\omega, \eta) \mapsto [\omega \wedge \eta]$$

sind $\omega, \eta \in \bigwedge^1 V^* \otimes W = \text{Hom}(V, W)$, so gilt

$$[\omega \wedge \eta] = [\eta \wedge \omega],$$

was bemerkenswert ist, da hier zwei schiefe-kommutative „Operationen“ zusammen eine kommutative ergeben.

4. Oft wird noch das wedge-Produkt über b der natürliche Paarung, also

$$b : \text{Hom}(W_1, W_2) \times W_1 \rightarrow W_2 : (T, w) \mapsto T(w),$$

verwendet.

B.2.12 Definition (Skalarprodukt auf den Formen)

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$, so definiert

$$\langle \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k | \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^k \rangle := \det \left(\langle \alpha^i | \beta^j \rangle \right) \quad \forall \alpha^i, \beta^i \in V^*,$$

wobei wir V^* natürlich über $\langle \cdot | \cdot \rangle$ mit V identifizieren.

B.2.13 Wiederholung (Determinante)

Ist V^m ein endlich-dimensionaler euklidischer, orientierter \mathbb{R} -Hilbertraum, so existiert genau eine m -Form $\det \in \bigwedge^m V^*$ mit

$$\det(e_1, \dots, e_m) = 1,$$

für jede positiv orientierte Orthonormalbasis e_1, \dots, e_m . Ist $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ dual zu (e_i) , so gilt

$$\det = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^m.$$

Ist $\alpha_1, \dots, \alpha^m$ eine Basis, aber keine Orthonormalbasis von V^* , so gilt für eine gewisse lineare Abbildung (bzw. Matrix) $A \in GL^*(\mathbb{R}^m)$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sigma A$$

War im Abschnitt „Hodge Theorie“ im Kapitel „Kohomologieberechnung“

und für dieses A gilt dann

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^m \det A.$$

Bezeichnet $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das euklidische Produkt von V (und V^*), dann gilt

$$\langle \alpha^T | \alpha \rangle = A^T A, \text{ also } 0 < \det A = \sqrt{\det (\langle \alpha^i | \alpha^j \rangle)} = \frac{1}{\sqrt{\det (\langle v_i | v_j \rangle)}}$$

mit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ dual zu (α^i) . Also ist

$$\det = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^m = \sqrt{\det (\langle v_i | v_j \rangle)} \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m$$

B.3. Differentialgleichungen

B.3.1 Definition (Linearer Differentialoperator)

Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und zwei endlich-dimensionale Vektorräume V und W heißt ein Operator

$$D : C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U, W)$$

der Form

$$D = \sum_{|I| \leq k} a_I \frac{\partial}{\partial x^I} \quad \text{mit } a_I \in C^\infty(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$$

einen *linearen Differentialoperator* der Ordnung k , falls für zumindest einen Multiindex I mit $|I| = k$ bereits $a_I \neq 0$ gilt.

B.3.2 Definition (Symbol eines linearen Differentialoperators)

Für einen linearen Differentialoperator $D : C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U, W)$ von k -ter Ordnung, einen Punkt $p \in U$ und einen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^m$ heißt

$$\sigma_p(D)(\xi) := \sum_{|I| \leq k} a_I \xi^I$$

wobei $\xi^I = \xi_1^{i_1} \cdots \xi_m^{i_m}$, das *Symbol* von D , also

$$\sigma(D) : U \xrightarrow{C^\infty} \text{Sym}^k(\mathbb{R}^m, \text{Hom}(V, W)).$$

B.3.3 Definition (Elliptischer Differentialoperator)

Ein linearen Differentialoperator D

$$D : C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U, W)$$

k -ter Ordnung heißt *elliptisch* (auf U), falls für jeden Punkt $p \in U$ und jeden von 0 verschiedenen Vektor $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^m$ bereits $\sigma_p(D)(\xi) \in \text{Iso}(V, W)$ invertierbar ist.

B.3.4 Beispiel

1. Für den Δ -Operator auf den Funktionen gilt

$$\Delta f = - \sum_{i=0}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} \quad \implies \quad \sigma(\Delta)(\xi) = -|\xi|^2.$$

Also ist dieser elliptisch (sogar gleichmäßig elliptisch)..

2. Für den Wellenoperator (etwa der Laplace mit Lorenzmetrik) auf den Funktionen gilt

$$D = (dx^i)^2 + \cdots + (dx^k)^2 - (dx^{k+1})^2 - \cdots - (dx^m)^2,$$

also

$$\sigma(D)(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_k^2 - (\xi_{k+1}^2 + \cdots + \xi_m^2)$$

und somit ist dieser nicht elliptisch.

3. Für den Differentialoperator

$$d : C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U, \text{Hom}(\mathbb{R}^m, V)) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

gilt

$$d = dx^i \text{id}_V \frac{\partial}{\partial x^i}$$

und somit auch

$$\sigma(d)(\xi) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \xi_i dx^i \right)}_{\dim \ker \doteq m-1} \text{id}_V$$

also ist dieser nur für $m = 1$ elliptisch.

B.3.5 Bemerkung

Sind

$$D_1 : C^\infty(U, V_1) \rightarrow C^\infty(U, V) \quad D_2 : C^\infty(U, V_2) \rightarrow C^\infty(U, V_3)$$

Differentialoperatoren der Ordnung k_i , so ist offensichtlich

1. $D_2 \circ D_1$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $k_1 + k_2$
2. $\sigma(D_2 \circ D_1)(\xi) = \sigma(D_2)(\xi) \circ \sigma(D_1)(\xi)$

Literaturverzeichnis

- [Con08] CONLON, Lawrence: *Differentiable Manifolds*. Birkhäuser, 2008 (Modern Birkhäuser Classics). – ISBN 9780817647667
- [O’N83] O’NEILL, Barrett: *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983. – ISBN 0125267401

Abbildungsverzeichnis

1.	Abhängigkeiten der Skript-Abschnitte	ix
2.	Abhängigkeiten der Skript-Abschnitte – Teil 2	x
I.1.	Stereographische Projektion	12
I.2.	Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten mit Karten	16
II.1.	Tangentialraumbeispiel: Sphäre	19
III.1.	Integralkurve	45
IV.1.	Injektive Immersion, die keine Einbettung ist	71
IV.2.	Möbiusband	78
V.1.	Horizontal Anteil	80
V.2.	Ein Beispiel für Holonomie	97
VIII.1.	Diagramm zum verbindenden Homomorphismus	154
VIII.2.	Mayer-Vietoris-Sequenz der Sphäre	157
IX.1.	Periodische, nicht geschlossene Kurve	186
IX.2.	Normalenraum des Kreis im drei-Dimensionalen	187

Verzeichnis der Sätze und Definitionen

Theoreme

II.1.12	Tangentialvektoren und Derivationen	23
II.5.8	Kettenregel	40
III.2.14	Satz von Frobenius	54
IV.3.1	Fundamentallemma der Tensorrechnung	72
V.1.16	Vektorbündel mit Zusammenhang aus lokalen Daten	89
V.3.16	Lemma von Maurer-Cartan	105
V.3.22	Trivialisierung von flachen Vektorbündeln	110
VI.3.2	Krümmungsänderung bei Zusammenhangsänderung	126
VII.1.9	Charakterisierung von Orientierbarkeit	135
VII.3.2	Satz von Stokes	140
VII.3.13	Satz von Stokes	144
VIII.3.6	Gradsatz	159
IX.2.19	Satz von Riemann	176
IX.4.6	Gauß-, Codazzi- und Ricci-Gleichung	189
IX.4.11	Fundamentalsatz der Untermannigfaltigkeitstheorie	192
X.2.15	Eigenschaften elliptischer Differentialoperatoren	204
X.3.1	von de Rham und Hodge	205
X.3.3	Poincaré-Dualität	206

Sätze

I.1.8	Geometrische Version des Satz über implizite Funktionen	13
I.1.10	Über die Mannigfaltigkeitstopologie	13
I.1.12	Charakterisierung der Mannigfaltigkeitstopologie	14
I.2.3	Charakterisierung der Differenzierbarkeit	16
I.2.5	Karten sind Diffeomorphismen	17
I.2.8	Partition der Eins	18
II.1.5	Vektorraumstruktur des Tangentialraums	21
II.1.15	Kettenregel	25
II.2.2	Normalformensatz	28
II.2.6	Vom konstanten Rang	29
II.3.6	Über die Inklusion von Untermannigfaltigkeiten	32
II.3.10	Bilder von Einbettungen sind Untermannigfaltigkeiten	33
II.5.5	Mannigfaltigkeitsstruktur des Tangentialbündels	39
II.6.9	Vektorfelder und Derivationen	43
III.1.2	Lokale Existenz von Integralkurven	45
III.2.10	über kommutierende Flüsse	52

III.2.15	Eindeutigkeit von Integraluntermannigfaltigkeiten	55
IV.1.11	Äquivalenz von lokalem Rahmen und Trivialisierung	61
IV.4.7	Vektorbündel durch Kozykel	76
V.1.8	Zusammenhang ist gleich kovarianter Ableitung	82
V.1.10	Der affine Raum der Zusammenhänge	87
V.2.3	Paralleler Schnitt längs einer Kurve	93
V.2.7	Vektorbündel über Intervallen trivialisieren	94
V.3.8	Die Krümmung ist eine 2-Form	101
V.3.15	Lokales Holonomietheorem	104
VI.2.3	Ultimate Produktregel	125
VIII.1.7	Homotopie Invarianz	148
VIII.2.8	Die lange Cohomologiesequenz	155
VIII.2.10	Mayer-Vietoris	156
VIII.3.5	Satz von Sard	159
VIII.3.9	von der Kämbarkeit des Igels	160
IX.1.9	Existenz von metrischen Zusammenhängen	165
IX.3.4	Notwendiges Kriterium für kürzeste Verbindungen	178
IX.3.15	Geodäten sind lokal kürzeste Verbindungen	184
A.1.22	Eindeutigkeit der Finaltopologie	219
A.3.2	Fixpunktsatz von Brouwer	222
A.3.3	Fortsetzungssatz	223
B.1.5	Überlagerungseigenschaft	226

Lemmata und Korollare

I.1.13	Topologie einer Produktmannigfaltigkeit	15
II.1.2	Charakterisierung für Untermannigfaltigkeiten	20
II.1.6	Basis von T_pM	21
II.1.8	Wohldefiniertheit der Richtungsableitung	22
II.1.17	Koordinatenwechsel	26
II.2.5	Charakterisierung von Bimersion bzw. lokalem Diffeom.	28
II.2.8	Sub-/Immersionen sind von lokal konstanten Rang	29
II.3.11	Injektiv-immersive Bilder kompakter Mannigfaltigkeiten	34
II.4.14	Kompakte Gruppen wirken eigentlich	38
II.5.7	Differential als glatte Abbildung	40
II.6.3	Lokale Beschreibung von Vektorfeldern	41
II.6.5	Karte mit vorgegebenen Koordinatenvektorfeldern	42
II.6.6	Vektorfelder sind ein freier $C^\infty(M)$ -Modul	42
III.1.6	Flüsse bestehen aus Diffeomorphismen	47
III.1.9	Über nicht maximale Integralkurven	48
III.2.11	Satz über die Simultane Flussabbildung	53
III.2.12	Lokale Existenz von Integraluntermannigfaltigkeiten	54
IV.1.8	Schnitte sind ein freier $C^\infty(M)$ -Modul	61
IV.2.3	Unterbündel durch lokale Rahmen	64
IV.2.24	Induzierter Algebrenhomomorphismus	71

V.1.14	Zusammenhangsformänderung unter Rahmenwechsel	88
V.1.20	Existenz von Zusammenhängen	91
V.2.9	Eigenschaften der Parallelverschiebung	95
V.3.13	Erste Bianchi-Identität der Krümmung	103
V.3.17	Flache Bündel über kompakten Ebenen trivialisieren	107
V.3.18	Charakterisierung der Nullkrümmung	108
V.3.20	Transformation der Holonomiegruppe	109
VI.1.6	Cartan Formel für die äußere Ableitung	121
VI.1.8	Pull-Back der äußeren Ableitung	123
VI.4.15	Maurer-Cartan Lemma	131
VII.2.4	Eigenschaften des Integrals	139
VII.2.5	Integral der umgekehrten Orientierung	140
VII.3.6	Diffeomorphismen in der oberen Halbebene	141
VII.3.10	Randmannigfaltigkeiten	143
VII.3.15	Integral exakter Formen	146
VIII.1.3	Algebrastruktur der de-Rham-Cohomologie	147
VIII.1.10	Poincaré Lemma	150
VIII.1.12	Über geschlossene 1-Formen	151
VIII.3.8	Rechenregel des Abbildungsgrades	160
IX.1.6	Existenz von Metriken	164
IX.1.10	Krümmung metrischer Zusammenhänge	166
IX.1.11	Existenz von orthonormalen Rahmen	166
IX.1.13	Existenz von flachen, orthonormalen Rahmen	167
IX.2.9	Erste Gleichung für Christoffelsymbole	170
IX.2.12	Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors	171
IX.2.16	Riemannsche Krümmung aus Schnittkrümmung	174
IX.2.17	Diffeomorphismen in Riemannsche Mannigfaltigkeiten	175
IX.3.8	Existenz von Geodätischen	180
IX.3.13	Lemma von Gauß	182
IX.3.14	Riemannsche Normalkoordinaten	183
IX.4.2	Der induzierte Levi-Civita Zusammenhang	188
IX.4.3	Der Weingarten Operator und die 2 ^{te} Fundamentalform	188
IX.4.4	Die 2 ^{te} Fundamentalform ist symmetrisch	188
IX.4.5	Der Weingarten Operator	189
IX.4.9	Gauß-, Codazzi- und Ricci-Gleichung im Euklidischen	191
X.2.2	Eigenschaften des Laplace Operators	200
X.2.6	Charakterisierung von Harmonik	201
A.1.13	Wegzusammenhängend und zusammenhängend	217
A.2.6	Die Spur eines Endomorphismus ist wohldefiniert	221
A.2.9	Spur einer Bilineareabbildung auf einem Hilbertraum	222

Definitionen

I.1.1	Mannigfaltigkeit, Karte, Atlas	9
I.1.3	Dimension einer Manigfaltigkeit	10

I.1.6	Produktmannigfaltigkeit	12
I.1.7	Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums	13
I.2.2	k -fache Differenzierbarkeit	15
I.2.6	(stückweise) glatter Weg	18
I.2.7	(stückweise) glatte Homotopie	18
II.1.1	Tangententialraum für Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	20
II.1.4	Tangententialraum	21
II.1.7	Richtungsableitung	22
II.1.9	Derivation	23
II.1.13	Ableitung	25
II.2.1	Immersion, Submersion, Bimersion	28
II.2.3	Rang	28
II.3.2	Untermannigfaltigkeit	30
II.3.4	Angepasste Karte und Lokale Parametrisierung	31
II.3.9	Einbettung	33
II.4.1	Lie-Gruppe	35
II.4.3	(Links-)Gruppenwirkung	36
II.4.6	Orbitabbildung, Bahn	36
II.4.9	Isotropiegruppe, Stabilisator, Standgruppe	37
II.4.12	Frei und transitive Operation	37
II.4.13	Eigentliche Gruppenwirkung	38
II.5.1	Tangententialbündel, -projektion	38
II.5.6	Ableitung	39
II.6.1	Vektorfeld	40
II.6.4	Koordinatenvektorfeld	41
III.1.1	(maximale) Integralkurve	45
III.1.3	Fluss eines Vektorfelds	46
III.1.4	Vollständigkeit eines Vektorfelds	47
III.2.3	(Integrables) Unterbündel	49
III.2.4	Integraluntermannigfaltigkeit	50
III.2.5	Tangentiale Vektorfelder	50
III.2.16	Untermannigfaltigkeit	56
IV.1.2	Vektorbündel	59
IV.1.5	Übergangsfunktion	60
IV.1.6	Schnitt eines Vektorbündels	61
IV.1.10	Rahmen	61
IV.1.13	Rahmenwechselformen	62
IV.1.15	Bündelhomomorphismus	63
IV.2.1	Unterbündel	63
IV.2.6	Direktes Summen- & Tensorprodukt-Bündel	65
IV.2.7	Quotientenbündel	65
IV.2.8	Duales Vektorbündel	66
IV.2.9	Kotangententialbündel, Eins-Formen	66
IV.2.10	Totales Differential	67

IV.2.11	Duale Basis	67
IV.2.12	Homomorphismenbündel	67
IV.2.14	Multimorphismenbündel	68
IV.2.15	Bündel der k -Formen	68
IV.2.17	Paarung	69
IV.2.19	Das bündelwertige Wedge-Produkt	69
IV.2.20	Pullback von k -Formen	69
IV.2.21	Pullback-Bündel	70
IV.2.23	Äußere Algebra einer Mannigfaltigkeit	71
IV.4.2	1-Kozykel	74
IV.4.4	1-Korand, Kohomologie von Vektorbündeln	75
IV.4.5	Erste Čech-Kohomologie	76
V.1.4	Kovariante Ableitung	80
V.1.7	Zusammenhang	81
V.1.12	Zusammenhangsform	88
V.1.17	Torsionstensor, Torsionsfrei	90
V.1.18	Zurückgeholter Zusammenhang	90
V.2.1	Paralleler Schnitt	92
V.2.5	Paralleler Schnitt längs einer Kurve	94
V.2.8	Parallelverschiebung	95
V.2.11	Parallele Paarung	96
V.3.1	Schleifenraum	97
V.3.3	Holonomie	98
V.3.6	Krümmung eines Zusammenhangs	101
V.3.11	Ricci-Tensor	103
V.3.14	Flacher Zusammenhang	104
V.3.19	Holonomie-Repräsentation & Holonomiegruppe	109
VI.1.2	Äußere Ableitung	119
VI.1.4	Geschlossene und exakte k -Formen	121
VI.2.1	Äußere Ableitung	123
VI.4.1	Lie-Algebra	127
VI.4.3	Links-Invarianz	127
VI.4.14	Exponential-Abbildung	131
VII.1.2	Vektorraum Orientierung	133
VII.1.4	Orientierter Vektorraum	134
VII.1.5	Orientierungserhaltend und -umkehrend	134
VII.1.7	Orientierbar	135
VII.1.12	Orientierter Atlanten und Karten	137
VII.1.13	Orientierungserhaltend, -umkehrend	137
VII.2.2	Integration für Formen mit Träger in Kartenumgebung	138
VII.3.3	Modellraum und Ableitungen im Modellraum	141
VII.3.7	Mannigfaltigkeit mit Rand	143
VII.3.8	Rand	143
VII.3.11	Randorientierung	144

VIII.1.2	De-Rham-Cohomologie	147
VIII.1.6	Homotopie	148
VIII.1.8	Kontrahierbar	150
VIII.2.1	(exakte) Sequenz	152
VIII.2.2	Cokettenkomplex	152
VIII.2.3	Cozykel und Coränder	152
VIII.2.5	Cokettenabbildung	153
VIII.2.6	(exakte) Sequenz von Cokettenkomplexen	153
VIII.3.1	Abbildungsgrad	158
VIII.3.4	Reguläre Punkte und Werte, singuläre Punkte	158
IX.1.2	Bündelmetrik & Riemannsches Vektorbündel	163
IX.1.4	Musikalische Isomorphismen	164
IX.1.8	Metrischer Zusammenhang	165
IX.1.12	Skalarkrümmung	167
IX.2.1	Riemannsche Mannigfaltigkeit, Riemannsche Metrik	167
IX.2.4	Isometrie	168
IX.2.6	Levi-Civita-Zusammenhang	169
IX.2.8	Christoffelsymbole	170
IX.2.10	Riemannscher Krümmungstensor	170
IX.2.15	Schnittkrümmung	174
IX.3.2	Länge eines Weges	177
IX.3.3	Variation	177
IX.3.5	Geodätische	179
IX.3.7	Geodätischer Spray	179
IX.3.10	Exponentialabbildung	181
X.1.3	Volumenform	197
X.1.4	Hodge \star -Operator auf Mannigfaltigkeiten	198
X.1.5	Skalarprodukt auf den Schnitten	198
X.2.1	Laplace Operator	200
X.2.5	Harmonische Formen	201
X.2.9	Linearer Differentialoperator auf Mannigfaltigkeit	202
X.2.11	elliptischer Differentialoperator	203
X.3.2	Bettizahlen	206
A.1.1	Topologischer Raum, Offen	215
A.1.2	Abgeschlossenheit	215
A.1.3	Umgebung	215
A.1.5	Umgebungsbasis	215
A.1.6	(Sub-)Basis der Topologie	216
A.1.7	Abzählbarkeitsaxiome	216
A.1.9	Stetigkeit	216
A.1.10	Weg	216
A.1.12	(Weg-)Zusammenhängend	217
A.1.14	Kompaktheit	217
A.1.16	Hausdorff-Raum	217

A.1.17	Erzeugte Topologie	218
A.1.18	Induzierte Topologie	218
A.1.20	Produkttopologie	218
A.1.25	Einfach zusammenhängend	220
A.2.2	Multilineare Abbildungen	220
A.2.3	Symmetrische und Alternierende Abbildungen	220
A.2.5	Spur eines Endomorphismuses	221
A.2.8	Spur einer Bilineareabbildung auf einem Hilbertraum	222
A.3.1	Träger einer Abbildung	222
A.3.4	Gewöhnliches, glattes Anfangswertproblem	223
B.1.1	Homotopie	225
B.1.2	Erste Fundamentalgruppe	225
B.1.4	(k -fache) Überlagerung	226
B.2.2	Tensorprodukt	226
B.2.4	Tensoralgebra	228
B.2.8	Wedge Produkt über Paarungen	229
B.2.12	Skalarprodukt auf den Formen	231
B.3.1	Linearer Differentialoperator	233
B.3.2	Symbol eines linearen Differentialoperators	233
B.3.3	Elliptischer Differentialoperator	233

Symbolverzeichnis

$(\cdot)^\sharp$	musikalischer Isomorphismus, der im Riemannschen Vektorbündel ein Dualelement ein Element zuordnet 164
$(\cdot)^b$	musikalischer Isomorphismus, der im Riemannschen Vektorbündel ein Element ein Dualelement zuordnet 164
\star	Hodge \star Operator 196
$\text{Alt}^k(V; W)$	alternierenden k -Multilinearen Abbildungen von V^r nach W
$\text{Alt}^k(E; F)$	Bündel der alternierenden k -Multimorphismen mit Werten in F 68
$\text{Aut}(X, \mathcal{T})$	Homöomorphismen auf dem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) 12
$B_\varepsilon(p)$	Ball $B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\}$ mit Radius ε um einen Punkt $p \in (X, d)$ eines metrischen Raumes 215
β_p	Orbitabbildung bezüglich einer Gruppe \mathcal{G} eines Punktes $p \in M$, die links auf M operiert: $\beta_p : \mathcal{G} \rightarrow M : g \mapsto g \cdot p$ 36
$\text{Bil}(V_1, V_2; W)$	Bilinearen Abbildungen von $V_1 \times V_2$ nach W
$b_k(M)$	k -te Bettizahl einer kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit M ohne Rand: $b_k(M) := \dim H_{dR}^k(M, \mathbb{K})$ 206
$\mathcal{C}^k(M; N)$	k -fach differenzierbaren Abbildungen von M mit Werten in N
$\mathcal{C}_c^k(M; N)$	k -fach differenzierbaren Abbildungen von M mit kompakten Träger mit Werten in N
$\mathcal{C}^k(M)$	$\mathcal{C}^k(M) := \mathcal{C}^k(M; \mathbb{R})$
$\mathcal{C}_c^k(M)$	$\mathcal{C}_c^k(M) := \mathcal{C}_c^k(M; \mathbb{R})$
$\mathcal{C}^\omega(M)$	reel analytischen Funktionen auf M
d	äußere Ableitung auf der äußeren Algebra $\Omega^\bullet(M)$ einer Mannigfaltigkeit M 119
d_k	Einschränkung der äußeren Ableitung d auf die k -Formen: $d_k := d _{\Omega^k}$ 121

$\mathcal{G}d$	äußere Ableitung auf der äußeren Algebra $\Omega^\bullet(M; E)$ einer Mannigfaltigkeit M und einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit Zusammenhang $\nabla \dots$	123
$\partial/\partial x^i _p$	von den i -ten Einheitsvektoren einer Karte (U, x) um einen Punkt $p \in U$ induzierte Tangentialvektoren: $\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet f = (f \circ x_i^{-1})'$	22
$\partial f/\partial x^i _p$	$:= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big _p f$	26
δ	für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) die Ko(äußere) Ableitung für eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ definiert durch: $\delta\omega = (-1)^{k(m+1)+1} \star d\star$	199
$\mathcal{G}\delta$	Ko(äußere) Ableitung für eine E -wertige k -Form $\omega \in \Omega^k(E)$ für ein Riemannsches Vektorbündel (E, h) mit einem metrischen Zusammenhang ∇ über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) definiert durch: $\mathcal{G}\delta\omega = (-1)^{k(m+1)+1} \star \mathcal{G}d\star$	199
$\text{Der}_\varrho(A, B)$	Menge aller Derivationen von A nach B längs ϱ	23
$\text{Der}(A)$	$\text{Der}(A) := \text{Der}_{\text{id}_A}(A, A)$	23
df	totales Differential einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1(M)$ definiert durch $df(p, \xi) = D_p f(\xi)$	67
Df	Differential $Df : TM \rightarrow TN$ einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten	39
$\text{Diff}(M)$	$\text{Diff}(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ ist Diffeomorphismus}\}$	48
$D_p f$	Differenzial $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten	25
dx^i	Duale Basis zu $\frac{\partial}{\partial x^i}$	67
E^\star	Dualbündel eines Bündels $E \rightarrow M$: $E^\star := \bigcup_p E_p M^\star$	66
\exp	Exponentialabbildung, die einem Tangentialvektor v den Ort $\gamma(1)$ einer Geodätischen γ mit $\gamma'(0) = v$ zuordnet	181
$D(\exp)$	Definitionsbereich der Exponentialabbildung \exp	181
$\exp _p$	Einschränkung der Exponentialabbildung \exp auf den Tangentialraum $T_p M$: $\exp _p := \exp _{D(\exp) \cap T_p M}$	181
$f^\star \omega$	Pullback $\omega \in \Omega^k(N)$ für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$: $(f^\star \eta)_p(v_1, \dots, v_k) = \eta_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_k))$	69
f_\star	push-forward $f_\star : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : X \mapsto D_{f^{-1}(\cdot)} f(X_{f^{-1}(\cdot)})$ für einen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$	51

f'	$f' := Df$	39
f'_p	$f'_p := D_p f$	25
f^*E	Pullback-Bündel $f^*E := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times E_{f(p)}$, falls $f : M \rightarrow N$ und $E \rightarrow N$ 70	
g	Riemannsche Metrik eines Riemannschen Vektorbündels (E, g) bzw. einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g)	163
g_{ij}	lokale Darstellung $g _U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ der Metrik eines Riemannschen Vektorbündels (E, g) bzw. einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) : $g_{ij} = g(\psi^i, \psi^j)$, falls $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \Gamma(E _U)$ ein lokaler Rahmen ist, bzw. $g_{ij} := g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$, falls (U, x) eine Karte von M ist.	164
g^{ij}	Inverse-Darstellung einer lokalen Darstellung $g _U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ der Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) : $(g^{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij}^{-1}$ 168	
\mathfrak{g}	links-invarianten Vektorfelder einer Lie-Gruppe \mathcal{G}	128
$-\gamma$	umgekehrt laufende Weg eines Weges $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$: $(-\gamma)(t) := \gamma(1-t)$ 216	
$\Gamma(M; E)$	Menge aller glatten Schnitte auf $\pi : E \rightarrow M$: $\Gamma(E) = \{\psi \in C^\infty(M; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}_M\}$	61
$\Gamma_c(M; E)$	Menge aller glatten Schnitte auf $\pi : E \rightarrow M$ mit kompakten Träger: $\Gamma(E) = \{\psi \in C_c^\infty(M; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}_M\}$	61
$\Gamma(E)$	$\Gamma(E) := \Gamma(M; E)$, wobei M die zugehörige Mannigfaltigkeit ist	61
$\Gamma_c(E)$	$\Gamma_c(E) := \Gamma_c(M; E)$, wobei M die zugehörige Mannigfaltigkeit ist	61
$\Gamma(U; E)$	Menge aller glatten Schnitte über U auf $\pi : E \rightarrow M$: $\Gamma(E) = \{\psi \in C^\infty(U; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}_U\}$	61
$\Gamma_c(U; E)$	Menge aller glatten Schnitte über U auf $\pi : E \rightarrow M$ mit kompakten Träger: $\Gamma(E) = \{\psi \in C_c^\infty(U; E) \mid \pi \circ \psi = \text{id}_U\}$	61
$\mathcal{A}\Gamma_{ij}^k$	Christoffelsymbole einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bezüglich einer Karte (U, x) : $\mathcal{A}\Gamma_{ij}^k := dx^k(\mathcal{A}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})$	170
$\gamma_2 \star \gamma_1$	„hintereinander Laufen“ zweier Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0; 1] \rightarrow M$: $\gamma_2 \star \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$	217

$\text{GL}(n, \mathbb{K})$	invertierbare \mathbb{K} -wertige $n \times n$ Matrizen $\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$	
$\text{Gl}(n, \mathbb{K})$	\mathbb{K} -wertige $n \times n$ Matrizen $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$	
\mathcal{G}_p	Isotropiegruppe eines Punktes $p \in M$ bezüglich einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , die links auf M operiert: $\mathcal{G}_p := \{g \in \mathcal{G} \mid g \cdot p\}$	37
$\text{Harm}(E)$	$:= \text{Harm}(M; E)$	201
$\text{Harm}(M, E)$	harmonische E -wertigen k -Formen, also der Kern des Laplace-Operators $\Delta_{\nabla}^{\mathcal{G}} : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^k(M, E)$	201
H^m	oberer Halbraum des \mathbb{R}^m : $H^m := \{t \in \mathbb{R}^m \mid t_m \geq 0\}$	141
$\text{Hom}(V; W)$	Homomorphismen von V nach W	
$\text{Hom}(V)$	$:= \text{Hom}(V; V)$	
$\int_{(M, \omega)}$	Integral einer m -Form $\omega \in \Omega_c^m(M; V)$ mit kompakten Träger	138
$\text{Iso}(V; W)$	Isomorphismen von V nach W	
$\text{Iso}(V)$	$:= \text{Iso}(V; V)$	
\mathcal{K}	Schnittkrümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) : $\mathcal{K}((, \eta), \zeta) := g(\nabla_{\mathcal{R}(\eta, \zeta)} \eta) / (g(\eta, \eta)g(\zeta, \zeta) - g(\eta, \zeta)^2)$	174
λ_g	links-Wirkung eines Elements $g \in \mathcal{G}$ einer Gruppe die links auf einer Mannigfaltigkeit M operiert: $\lambda_g : M \rightarrow M : p \mapsto g \cdot p$	36
$\Delta_{\nabla}^{\mathcal{G}}$	Laplace-Operator der k -Formen $\Omega^k(E)$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Werten in einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit einem metrischen Zusammenhang ∇ : $\Delta_{\nabla}^{\mathcal{G}} = \mathcal{G}\delta \mathcal{G}d + \mathcal{G}d \mathcal{G}\delta$	200
Δ	Kurzschreibweise für $\Delta_{\nabla}^{\mathcal{G}}$ bzw. Δ	200
M^m	M ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension m	11
$\text{Mult}(V_i; W)$	Multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \dots \times V_r$ nach W	
$\text{Mult}(E^i; F)$	Multimorphismenbündel $\text{Mult}(E^1, \dots, E^r; F) := \bigcup_p \text{Mult}(E_p^1, \dots, E_p^r; F)$	68
$\nabla_v \psi$	kovariante Richtungsableitung des Schnittes $\psi \in \Gamma(E)$ in Richtung $v \in T_p M$ bezüglich eines Zusammenhangs $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E)$: $\nabla_v \psi := (\nabla \psi)_p v$	81
$\nabla_X \psi$	kovariante Ableitung des Schnittes $\psi \in \Gamma(E)$ in Richtung des Vektorfeldes $x \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich eines Zusammenhangs $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E)$: $\nabla_X \psi := p \mapsto \nabla_{X_p} \psi$	81

$\ x\ $	euklidische Norm eines euklidischen Vektors $x \in \mathbb{R}^n$: $\ x\ := \ x\ _2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k ^2}$	
$ \cdot $	induzierte Norm eines Riemannschen Vektorbündels $(E \rightarrow M, g)$: $ \cdot := \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$	177
$\Omega^\bullet(M, \mathbb{K})$	äußere Algebra der Mannigfaltigkeit: $\Omega^\bullet(M, \mathbb{K}) := \bigcup_{k=1}^\infty \Omega^k(M)$	71
$\Omega^\bullet(F)$	$:= \bigcup_{k=1}^\infty \Omega^k(M; F)$	68
$\Omega^1(M)$	differenzierbaren Eins-Formen auf M : $\Omega^1(M) := \Gamma(M; TM^*)$	66
$\Omega^k(M; F)$	differenzierbare k -Formen auf M mit Werten in F : $\Omega^1(M) := \Gamma(\text{Alt}^k(M; F))$	68
$\Omega^k(F)$	differenzierbare k -Formen auf M mit Werten in F : $\Omega^1(M) := \Omega^k(M; F)$	68
$\Omega^k(M)$	differenzierbare k -Formen auf M : $\Omega^1(M) := \Gamma(\text{Alt}^k(M))$	68
$\Omega^{(k,l)}(M)$	k -fach kovariant und l -fach kontravarianten Tensoren: $\Omega^{(k,l)}(M) := \text{Mult}(TM^{\otimes k}, TM^{*\otimes l}; \mathbb{K})$	85
$\pi : E^r \rightarrow M^m$	E ist ein Vektorbündel vom Rang r über der Mannigfaltigkeit M^m .	60
\mathbb{R}^*	$:= \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
\mathcal{R}	Riemannsche Krümmung zur Metrik g : $\mathcal{R} = {}^g\nabla\mathcal{R}$	170
\mathcal{R}_{ijkl}	Riemannsche Krümmung in Koordinaten: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$	171
${}^g\nabla\text{Ric}$	Ricci-Tensor eines Vektorbündels mit Zusammenhang ∇ : ${}^g\nabla\text{Ric}(u, v) := \text{tr}(\mathcal{R}(u, \cdot)v)$	173
${}^g\nabla\text{Ric}_{ik}$	Ricci-Tensor in Koordinaten: ${}^g\nabla\text{Ric}_{ik} := \mathcal{R}_{ijk}{}^j$	173
$\mathbb{R}\mathcal{P}^n$	n -dimensionale projektive Raum: $\mathbb{R}\mathcal{P}^n := \{\mathbb{R}x \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$	219
\mathcal{S}^n	n -dimensionale Sphäre: $\mathcal{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ _2 = 1\}$	11
$\mathcal{S}^n(r)$	n -dimensionale Sphäre vom Radius r im $n+1$ -dimensionalen euklidischen Raum: $\mathcal{S}^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ _2 = r\}$	37
$\nabla^g\mathcal{S}$	Skalarkrümmung eines Vektorbündels mit der Bündelmetrik g und einem metrischen Zusammenhang ∇ zur Metrik g in Koordinaten: $\nabla^g\mathcal{S}(p) := \text{tr} \nabla^g\text{Ric}$	167
σ_p	Orbit eines Punktes $p \in M$ einer Mannigfaltigkeit unter einer Gruppe \mathcal{G} , die auf M operiert: $\sigma_p := \text{Bild } \beta_p$	36

$\langle x y \rangle_{L^2}$	euklidisches Skalarprodukt zweier euklidischer Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle x y \rangle_{L^2} := \sum_{k=1}^n x_i \cdot y_i$	
$O(\mathbb{R}^n)$	Orthogonalegruppe: $O(\mathbb{R}^n) := \{A \in GL(\mathbb{R}^n) \text{ orthogonal}\}$	37
$SO(\mathbb{R}^n)$	spezielle Orthogonalegruppe: $SO(\mathbb{R}^n) := \{A \in GL(\mathbb{R}^n) \text{ orthogonal und } \det A = 1\}$	37
$\text{tr } T$	Spur eines Endomorphismus T auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V – unabhängig von der Basiswahl oder einem Skalarprodukt	221
$\text{supp } f$	Träger von f : $\text{supp } f := \overline{\{a \in A \mid f(a) \neq 0\}}$	222
$\text{Sym}(V; W)$	symmetrischen Multilinearen Abbildungen von V^r nach W	
$\text{Sym}^k(E; F)$	Bündel der symmetrischen k -Multimorphismen mit Werten in F	68
TM^*	Cotangentialbündel: Dualbündel zu TM	66
$TM _U$	Teil des Tangentialbündels über U : $TM _U := \pi^{-1}(U)$	39
$U(\mathbb{R}^n)$	unitären Matrizen: $U(\mathbb{C}^n) = \{A \in \text{gl}(\mathbb{C}^n) : AA^* = I_n\}$	30
\underline{V}	triviales Vektorbündel $M \times V$	79
$V \otimes W$	Tensorprodukt zweier \mathbb{K} -Vektorräume V und W	226
$\mathfrak{X}(M)$	Menge aller Vektorfelder der Mannigfaltigkeit M : $\mathfrak{X}(M) := \{X \in C^\infty(M; TM) \mid \pi \circ X = \text{id} _M\}$	41
$\mathfrak{X}_c(M)$	Menge aller Vektorfelder der Mannigfaltigkeit M mit kompaktem Träger: $\mathfrak{X}_c(M) := \mathfrak{X}(M) \cap C_c^\infty(M, TM)$	41
X_p	die Auswertung $X(p)$ eines Vektorfelds $X \in \mathfrak{X}(M)$ in einem Punkt $p \in M$	41
$X \stackrel{f}{\sim} Y$	X und Y sind f -verwandt	50

Stichwortverzeichnis

*!?

\int 138
 Δ (Laplace Operator) 200
 \star 196, 198
 1-Form 66
 1-Korand 75
 1-Kozykel 74
 1-Parameter-Gruppe 48
 1. Bianchi-Identität 103, 172
 1. Čech-Kohomologie 76
 1. Fundamentalform 188
 1. Fundamentalgruppe 225
 2. Bianchi-Identität 172
 2. Fundamentalform 83, 188

A

Abbildung
 Coketten- 153
 Grad, -s 158
 Pullback - *siehe* Pullback-Abbildung,
 70
 abgeschlossen 215
 Ableitung 39
 Äußere Ableitung *siehe* Äußere
 Ableitung, 119
 Cartan . *siehe* Äußere Ableitung, 119
 im Halbraum 141
 kovariante *siehe* kovariante
 Ableitung, 81
 Richtungs- 81
 Abzählbarkeitsaxiom 216
 erstes 216
 zweites 216
 Äußere Ableitung 119
 Cartan Formel 121
 Vektorbündelwertig 124

Äußere Algebra 230
 einer Mannigfaltigkeit 71
 Algebra
 Lie 127
 alternierendes Tensorprodukt 228
 Atlas 9
 Äquivalenz 10
 maximal 10

B

Bahn 36, 219
 Abbildung, - 36
 Basis
 duale 67
 Topologie, einer 216
 Bettizahl 206
 Bianchi-Identität
 der äußeren Ableitung 124
 erste 103, 172
 zweite 172
 Bimersion 28
 Bündel 59
 Duales- 66
 durch Kozykel, Satz 76
 Faser, - 59
 Homomorphismen- 67
 Homomorphismus, - 63
 Isomorphie 64
 Karte, - 39, 59
 Kotangential- 66
 Linien- 78
 Metrik, - 163
 Multimorphismen - 68
 Alternierend 68
 Symmetrische 68
 Projektion, - 59

Quotienten-.....	65	Derivation.....	23
Riemannsches.....	163	Differential.....	25, 39
Summen-.....	65	Totales.....	67
Tangential-.....	38	Differential Operator	
Projektion.....	38	linearer -.....	202, 233
Tensorprodukt-.....	65	elliptisch.....	203, 233
triviales.....	38, 60, 79	Symbol.....	203, 233
Trivialisierung		differenzierbar.....	15
Umgebung, -ende.....	59	Eins-Form.....	66
trivialisierbar.....	64	Funktion, -keit einer.....	15
Trivialisierung, -.....	59	Struktur, -e.....	10
Übergangsfunktion.....	60	Dimension	
Unter-.....	49, 63	Co-.....	30
integrabiles.....	50	Mannigfaltigkeit, einer.....	10
Rang.....	63	Dual	
Vektor-.....	59	Basis, -e.....	67
		Vektorbündel, -es.....	<i>siehe</i> Bündel,
C		Duales-, 66	
Cartan-Formel.....	124	Zusammenhang, -er.....	<i>siehe</i>
Cartan Ableitung.....	<i>siehe</i> Äußere	Zusammenhang, dualer, 84	
Ableitung, 119			
Cartan Formel.....	121	E	
Čech-Kohomologie		eigentlich	
erste.....	76	Abbildung, e.....	38
Christoffelsymbole.....	170	Gruppenoperation, -e.....	38
Codazzigleichung.....	189, 191	Einbettung.....	33
Codimension.....	30	einfach zusammenhängend.....	220
Cohomologie		Eins-Form.....	66
-sequenz, lange.....	155	Einsetzungoperator.....	148
Cohomologiegruppe.....	152	Einstein-Konvention.....	15
<i>k</i> -te.....	152	elliptisch.....	203, 233
Coketten		Erste Čech-Kohomologie.....	76
Abbildung, -.....	153	erste Fundamentalform.....	188
Komplex, -.....	152	erste Fundamentalgruppe.....	225
Coränder.....	152	erzeugte Topologie.....	<i>siehe</i> Topologie,
Corand-Operatoren.....	152	erzeugte, 218	
Cozykeln.....	152	exakt	
		<i>k</i> -Form, -e.....	121, 153
D		kurze -e Sequenz.....	153
Dach-Produkt.....	228	Sequenz, -e.....	152
de-Rham-Cohomologie.....	147, 153	Coketten.....	153
<i>k</i> -te.....	147	Exponential-Abbildung	
de-Rham-Komplex.....	153	Lie-Gruppe, einer.....	131

Exponentialabbildung	181	Geodätische	
Definitionsbereich	181	notwendiges Kriterium	178
Tangentialraumeinschränkung...	181	geodätischer Spray	179
extrinsischen	22	geschlossene k Form	121, 153
F		glatt	
Fasermetrik		Schnitt, -er	61
Riemannsche	167	glatte Kurve	18
Finaltopologie	219	glatter Weg	18
Fixpunktsatz von Brower	222	Gleichung	
flacher Zusammenhang	<i>siehe</i>	Codazzi -	189, 191
Zusammenhang, flacher, 104		Gauß -	189, 190, 191
Fluss		Ricci -	189, 191
Bereich, -	46	globaler Schnitt. <i>siehe</i> Schnitt, globaler,	
kommutierende, Satz über -	52	61	
simultane -abbildung	53	Grad	
Vektorfelds, - eines	46	Form-Abbildung, einer	147
Form		Grad einer Funktion	158
Eins -	66	Gradsatz	159
exakte k -	121, 153	Gruppe	
geschlossene k -	121, 153	1-Parameter	48
Harmonische	201	Aktion, -n	219
Integral einer	138	Cohomologie-	152
k -	68	Holonomie-	109
Pullback	70	Lie	35
Formel		Wirkung, -n	219
Koszul-	169	Gruppenaktion <i>siehe</i> Gruppenoperation,	
Fortsetzungssatz	223	36	
freie Gruppenoperation	37	Gruppenoperation	36
Frobenius		eigentlich	38
Satz von -	54	frei	37
Fundamentalform		transitiv	37
erste	188	Gruppenwirkung	<i>siehe</i>
zweite	83, 188	Gruppenoperation, 36	
Fundamentalgruppe		H	
erste	225	Halbraum	
Fundamentalsatz		oberer	141
Untermannigfaltigkeitstheorie ...	192	Harmonisch	
G		Form, -e	201
Gaußgleichung	189, 190, 191	Hausdorff-Raum	217
Gaußkrümmung	174	Hausdorffsch	217
Geodätische	179	Heine-Borel	217
		hermitesch	165

Hintergrundzusammenhang	87	J	
Hodge \star -Operator	196, 198	Jacobi-Identität	127
Holonomie	97	K	
Abbildung, -	98	k -fach kovarianten und l -fach kontravarianten Tensoren	85
Gruppe, -	98, 109	k -Form	68
Repräsentation	109	Pullback	70
homogener Raum	219	k -te Cohomologiegruppe	152
Homomorphismenbündel . <i>siehe</i> Bündel, Homomorphismen-, 67		k -te de-Rham-Cohomologie	147
Homomorphismus		Karte	9, 10
paralleler -	86	Abbildung, -n	9
verbindender -	153	mit Rand	143
homotop	225	an Untermannigfaltigkeit angepasste	
Homotopie	148, 225	31	
-invarianz	148	Bereich, -n	9
Geschlossener Kurven	225	Bündel . . . <i>siehe</i> Bündel, Karte, -, 59	
glatte	18	orientierte	137
stückweise	18	Rand, mit	143
mit festen Endpunkten	225	Rand-	144
Homotopieoperator	149	verträglich	9
I		Wechsel, -n	9
Immersion	28	mit Rand	143
Implizite Funktionen	13	zentrierte	10
induzierte Topologie	218	Koableitung	199
integrables Bündel <i>siehe</i> Bündel, Unter-, integrables, 50		Koauere Ableitung	199
einer m -Form	138	kohomolog	75
Integralkurve	45	Kohomologie	
Integraluntermannigfaltigkeit	49,	Erste ech-	76
<i>siehe</i> Mannigfaltigkeit, Unter-, Integral-, 50		Kompaktheit	217
intrinsische	22	Komplex	121
invariant		Coketten-	152
links	127	kontrahierbar	150
involutiv		kontravarianter Tensor	85
Bündel, -es . . . <i>siehe</i> Bündel, Unter-, involutives, 50		Koordinatenabbildung	9
Isometrie	168	Koordinatenbasisvektoren	22
Isomorphie		Koordinatenvektorfelder	41
Vektorbündel, von	64	Korand, 1-	75
Isomorphismen, musikalische	164	Koszul-Formel	169
Isotropiegruppe	37, 219	Kotangentialbündel <i>siehe</i> Bündel, Kotangential, 66	
		kovariante Ableitung	81
		triviale	81

kovariante Richtungsableitung	81
kovarianter Tensor	85
kovariant konstant <i>siehe</i> Schnitt, kovariant konstant, 92	
Kozykel	
1-	74
Bedingung, -	74
Kruemmung	
Krümmung	
Gauß	174
Krümmung	
Schnitt-	174
Krümmung <i>siehe</i> Zusammenhang, Krümmung eines, 101	
lokale Darstellung	102
Riemannsche	170
Skalar	167
Kurve	216
glatte	18
stückweise	18
Integral-	45
L	
L ² -Produkt	198
Länge	177
lange Cohomologiesequenz	155
Laplace Operator	200
Leibnizregel	22
äußeren Ableitung, der	119
Lemma	
Maurer-Cartan	105, 131
von Poincaré	150
Levi-Civita-Zusammenhang	169
Lie-Algebra	127
von	129
Lie-Gruppe	35
Lie-Algebra einer	129
Linienbündel . . <i>siehe</i> Bündel, Linien-, 78	
links-invariant	127
lokale Eigenschaft	22
lokale Parametrisierung	31
lokaler Rahmen	61
lokaler Schnitt	61

M	
Mannigfaltigkeit	9, 10
C^k	10
differenzierbare	10
Differenzierbarkeit auf	15
Dimension	10
glatte	10
Integral-	56
maximale	56
mit Rand	143
ohne Rand	143
reellanalytische	10
Riemannsche	167
Standardstruktur	11
induzierte	11
topologische	10
Topologie, -s	13, 14
Unter-	13, 30
Integral-	49, 50
Matrix	
unitäre	30
Maurer-Cartan Lemma	105, 131
maximal	
Untermannigfaltigkeit, -e <i>siehe</i> Mannigfaltigkeit, Integral-, ma- ximale, 56	
Metrik	
Bündel-	163
Riemannsche	167
metrisch	
Zusammenhang, -er <i>siehe</i> Zusammenhang, metrischer, 165	
multilineare Abbildungen	
antilineare	221
symmetrische	221
Multimorphismenbündel . . <i>siehe</i> Bündel, Multimorphismen-, 68	
musikalische Isomorphismen	164
N	
natürliche Paarung	229
Normalenraum	187
Normalformensatz	28

O	
oberer Halbraum	141
offen	215
Operator	
Corand	152
Differential -	
elliptischer linearer -	203
elliptisch linearer -	233
linearer -	202, 233
Symbol eines linearen -	203, 233
Einsetzungs-	148
Hodge \star -	196, 198
Homotopie-	149
Laplace	200
Weingarten	188
Orbit	36, 219
Abbildung, -	36
Orientierung	134
Atlas, -ter	137
Bar, -	135
Erhaltend, -s	137
erhaltend, -s	134
gleich -t	133
Karte, -te	137
Rand-	144
Überlagerung, -s	134
Umkehrend, -s	137
umkehrend, -s	134
Vektorraum, -ter	134
Vektorraums, eines	133
Orthogonalegruppe	
Spezielle	37
P	
Paarung	69, 229
natürliche	
E mit E^*	69
E mit $\text{Hom}(E; F)$	69
parallele	96
Parallel	86
Homomorphismus	86
Paarung, -e	96
Schnitt, -er . <i>siehe</i> Schnitt, paralleler, 92	
Transport, -	79
Verschiebung, -	95
parallel	96
paralleler Schnitt	
längs einer Kurve	94
stückweise	94
Parametrisierung	
lokale	31
Partition der Eins	18
Poincaré Dualität	195, 206
Poincaré Lemma	150
Polarkoordinaten	11
Produktregel	124
Ultimative	125
Produkttopologie	218
Projektionszusammenhang	83
Projektive Geraden	11, 219
projektive Raum	11
Pullback	70, 147
Abbildung, -	70
Bündel, -	70
Zusammenhang	90
push forward	51
Q	
Quotientenbündel	65
Quotiententopologie	219
R	
Rahmen	61
lokaler	61
Wechselmatrix, -	62
Rand	143
einer Mannigfaltigkeit	143
Orientierung des	144
Randkarte	143, 144
Rang	59
Abbildung, einer	28
Bündel . <i>siehe</i> Bündel, Unter-, Rang, 63	
Raum der geschlossenen Kurven	225

regulärer		stückweise paralleler	94
Punkt	159	Schnittkrümmung	174
Wert	159	Sequenz	152
Repräsentation		Coketten -	153
Holonomie	109	exakte -	152
Ricci-Tensor	103	Coketten	153
Ricci-Gleichung	189, 191	kurze exakte -	153
Richtungsableitung	22	simultane Flussabbildung . . . <i>siehe</i> Fluss,	
Riemannsch		simultane -abbildung, 53	
Krümmung, -e	170	singulärer/singulärer	
Mannigfaltigkeit, -e <i>siehe</i> Mannigfaltigkeit, Riemannsche, 167		Punkt	159
Metrik, -e	167	Skalar­krümmung	167
Vektorbündel, -es	163	Sphäre	11, 219
Zusammenhang, -er	165	Spur	221, 222
S		Stabilisator	37
Satz		Stand-	37
über implizite Funktionen	13	Standardstruktur <i>siehe</i> Mannigfaltigkeit, Standardstruktur, 11	
der Affinerer Raum der Zusammenhänge	87	Standgruppe	37
Fixpunkt- von Brouwer	222	stereographische Projektion	11
Fortsetzungs-	223	Stetigkeit	216
Grad-	159	Unterhalb	29
kommutierende Flüsse, über	52	Stokes-Theorem	144
konstanten Rang, von	29	Struktur	
lokal konstanter Rang von Sub- und Immersionen	29	C^k	10
Normalformen-	28	Subbasis einer Topologie	216
Untermannigfaltigkeitstheorie	192	Submersion	13, 28
Vektorbündel durch Kozykel	76	Summenbündel	65
von Frobenius	54	Summen Zusammenhang	82
von Sard	159	Symbol eines Differential Operators 203, 233	
Wunder der Riemannschen Geometrie	169	symmetrisch	165
Schleifenraum	97	T	
Schnitt	61	Tangentialebne <i>siehe</i> Ebene,	
glatt	61	Tangentialebne, 38	
globaler	61	Tangentialebene	21
kovariant konstant	92	Untermfkt. des \mathbb{R}^n , von	20
lokal	61	Tangentialektor	21
paralleler	92	Tangentialebene	174
längs einer Kurve	94	Tensor	
		-Algebra	228
		-Produkt	226

Alternierende -en	228	Übergangsfunktion	9, 60, 62
kovariante und kontravariante	85	Überlagerung	226
Ricci	103	k -fache	226
Torsions-	90	Ultimate Produktregel	125
Zusammenhang, -	85	Umeichung	126
Tensoralgebra	228	Umgebung	215
Tensorprodukt	226	trivialisierende	59
Tensorproduktbündel	65	Umgebungsbasis	215
Theorem		unitäre Matrix	30
Stokes-	144	Unterbündel . . <i>siehe</i> Bündel, Unter-, 49, <i>siehe</i> Bündel, Unter-, 63	
Theorema Egregium	192	Unterhalbstetigkeit	29
topologische Mannigfaltigkeit <i>siehe</i> Mannigfaltigkeit, topologische		Untermannigfaltigkeit . . . <i>siehe</i> Mannig- faltigkeit, Unter-, 30, <i>siehe</i> Man- nigfaltigkeit, Integral-, 56	
Topologie		universelle Eigenschaft	32
Basis einer	216		
Final-	219	V	
induzierte	218	Variation	177
Mannigfaltigkeits-	13, 14	mit festen Endpunkten	177
Produkt-	218	Variation mit festen Endpunkten	177
Quotienten-	219	Vektorbündel <i>siehe</i> Bündel, 59	
Subbasis einer	216	Vektorfeld	40
topologische Mannigfaltigkeiten	10	Fluss eines <i>siehe</i> Fluss, Vektorfeldes, eines, 46	
Topologischer Raum	215	Koordinaten-	41
Torsion		verwandte	50
Tensor, -s	90	vollständiges	47
torsionsfrei	90	Vektorraum	
Torus	219	Orientierter -	134
totales Differential	67	Orientierung	133
Träger		verbindender Homomorphismus	153
einer Abbildung	222	Verträglich . . <i>siehe</i> Karte, verträgliche, 9	
transitive Gruppenoperation	37	verwandt	50
Trivialbündel <i>siehe</i> Bündel, triviales, 38		verwandte Vektorfelder <i>siehe</i> Vektorfeld, verwandte	
trivialer Zusammenhang	82	Vollständiges Vektorfeld <i>siehe</i> Vektorfeld, vollständiges, 47	
triviales Vektorbündel <i>siehe</i> Bündel, triviales, 60		Volumenform	71, 136, 197
trivialisierbar	64	Volumenformen	71
Trivialisierung			
Bündel <i>siehe</i> Bündel, Trivialisierung, 59			
Umgebung, -ende	59		
		W	
U		Wedge-Produkt	69, 228
Überdeckung	217		

auf Bündel.....	69	Zusammenhang.....	81
Paarung, über.....	229	Charakterisierung.....	87
Weg.....	216	direkter Summen-.....	82
glatter.....	18	dualer.....	84
stückweise.....	18	flacher.....	104
Homotopie.....	225	Form, -s.....	87, 88
Länge.....	177	Hintergrund-.....	87
Parametrisiert nach der Bogenlänge		Holonomiegruppe eines.....	98
177		Hom-.....	86
Variation eines.. <i>siehe</i> Variation, 177		Krümmung eines.....	101
Wegzusammenhang.....	217	2-Form.....	101
Weingarten Operator.....	188	lokale Beschreibung der.....	102
Wunder der Riemannschen Geometrie		Levi-Civita.....	169
169		metrischer.....	165
Z		Mult-.....	86
zentrierte Karte. <i>siehe</i> Karte, zentrierte,		Projektions-.....	83
10		Pullback-.....	90
Zurückgeholt		Riemannscher.....	165
Bündel, -es.....	70	Tensor-.....	85
Zusammenhang, -er.....	90	Tensorprodukt-.....	83
zusammenhängend.....	217	torsionsfreier.....	90
einfach.....	220	trivialer.....	81, 82
lokal.....	217	Zurückgeholter.....	90
		zweite Fundamentalform.....	83, 188

