Skript zur Vorlesung „Theorie des optimalen Transports“

Martin Kell

Tübingen, den 28. März 2017

martin.kell@math.uni-tuebingen.de

Inhaltsverzeichnis

Wichtiger Hinweis: Das folgende Skript wird/wurde zur Begleitung der Vorlesung „Theorie des optimalen Transports" im WS16/17 an der Universität Tübingen geschrieben. Als solches wird es fortwährend erweitert und korrigiert, und kann im aktuellen Zustand Fehler enthalten, neben Tippfehlern auch Ungenauigkeiten in den Aussagen sowie der Beweisführung. Für Fehlermeldungen wäre ich sehr dankbar. Die Beweise sind größtenteils aus Standard-Textbüchern (Halmos „Measure Theorie", Villani „Optimal Transport - old and new" ...) bzw. bereits veröffentlichten Arbeiten (z.B. Cavalletti-Huesmann „Existence and uniqueness of optimale transport maps") entnommen und an meinen Stil angepasst.

Im ersten Abschnitt dieses Skripts geht es um technische Details, die wichtig für die Theorie des optimalen Transports sind. Vieles davon ist bereits aus den Standard-Vorlesungen der Analysis bekannt und wird gegebenenfalls wiederholt und das Verständnis vertieft.

In nächsten Abschnitt werden wir dann die Existenz von Minimierern behandeln, z.B. folgt aus Prokhorovs Theorem sofort, dass die Menge der Kopplungen zweier Wahrscheinlichkeitsmaße kompakt ist und somit stets ein Minimierer für unterhalbstetige, nicht-negative Kostenfunktionale existiert. Dieser Abschnitt wird recht kurz sein, da die meisten Resultate als direkte Anwendungen der technischen Details angesehen werden können.

Im dritten Abschnitt beschäftigen wird uns mit der Dual-Problem zu gegebene Kostenfunktionen. Wie sich herausstellt, lassen mittels Lösungen der Dual-Probleme, die Minimierer, insbesondere deren Träger, besser beschreiben. Eine zentraler Satz ist Kantorovich Dualitätstheorem, welches die Träger von Minimierer als c-zyklische Mengen definiert auf denen man eine Duallösung konstruieren kann.

(TBD) - In den weiteren Abschnitten werden wir weitere Anwendungen behandeln, u.a. werden die Existenz von Transportabbildungen gezeigt und Wasserstein-Räume behandelt, mit deren Hilfe wir zeigen können das Entropie-Funktionale konvex entlang von Geodäten in Wasserstein-Räumen sind.

1 Technische Details aus der Topologie und Maßtheorie

Konvention: $A \subset B$ und $A \subseteq B$ sind äquivalente Schreibweise. Auf letzteres wird in diesem Skript möglichst verzichtet.

1.1 Topologie metrischer Räume

Sei im folgenden M eine beliebige Menge. Eine Menge von Teilmengen $\tau \subset 2^M$ wird *Topologie* genannt, wenn $\varnothing, M \in 2^M$ und τ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten sowie beliebigen Vereinigungen, d.h. falls $U, V \in \tau$ dann auch $U \cap V \in \tau$ sowie $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$ wann immer $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$, wobei I eine beliebige, möglicherweise unendliche Indexmenge ist. Die Elemente von τ heißen *offen* und deren Komplemente *abgeschlossen*. Die Menge A heißt Umgebung von x, falls es eine offene Menge $U \in \tau$ gibt, so dass $x \in U \subset A$.

Für beliebige Mengen $A \subset M$ definieren wir den Abschluss $\operatorname{cl} A$ von A und das Innere $\int A$ von A wie folgt

$$\operatorname{cl} A := \bigcap_{A \subset C \text{ abgeschlossen}} C$$
$$\operatorname{int} A := \bigcup_{A \supset U \text{ offen}} U,$$

d.h. $\operatorname{cl} A$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, und $\operatorname{int} A$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{cl} A$ abgeschlossen und $\int A$ offen ist.

Das Tupel (M, τ) wird *topologischer Raum* genannt. Mittels der Topologie lässt sich der Begriff der Konvergenz einer Folge einführen: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M. Dann konvergiert x_n gegen x, kurz $x_n \to x$, falls es für alle offenen Umgebungen U von x ein $N > 0$ gibt, so dass $x_n \in U$ für all $n \geq N$.

Eine Funktion $f : (M, \tau) \to (M', \tau')$ zwischen zwei topologischen Räumen wird stetig genannt, wenn für alle offenen Mengen U' in M' die Menge $f^{-1}(U')$ ebenfalls offen ist. Kurz aufgeschrieben bedeutet dies

$$f^{-1}(\tau') \subset \tau.$$

Seien $A \subset B$ zwei Teilmengen von M. Wir sagen *A ist dicht in B*, wenn für all Umgebungen U von $x \in B$ gilt $U \cap A \neq \varnothing$. Schließlich wird M *separabel* genannt, falls es eine abzählbare Teilmenge $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt die dicht in M ist.

Eine Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ wird *offene Überdeckung* einer Menge $A \subset M$ genannt, wenn

$$K \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Eine Menge $C \subset M$ wird *kompakt* genannt, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, sprich es gibt endliche Teilmenge $I' \subset I$, so dass

$$C \subset \bigcup_{i\in I'} U_i.$$

Aus der Definition folgt, dass C abgeschlossen ist. Wir nennen eine beliebige Menge A *präkompakt,* wenn ihr Abschluss *kompakt* ist. Der topologische Raum (M, τ) wird *lokal kompakt* genannt, wenn jedes $x \in M$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Ist A eine Teilmenge, so erhält man eine induzierte Topologie τ_A auf A wie folgt

$$\tau_A = \{U \cap A \in 2^A \,|\, U \in \tau\}.$$

Eine topologische Begriff gilt relativ bzgl. A, wenn er für bzgl. des topologischen Raums (A, τ) gilt.

Eine Funktion $d : M \times M \to [0, \infty)$ wird *Metrik* genannt, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt

- (Definiertheit) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$
- (Dreiecksungleichung) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Tupel (M, d) wird *metrische Raum* genannt.

Bemerkung. Normalerweise wird auch Nicht-Negativität gefordert, wählt man jedoch $x = z$, dann folgt aus den drei Bedingungen automatisch die Nicht-Negativität

$$0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

Jeder metrischer Raum induziert eine natürlich Topologie τ_d, die wie folgt definiert ist

$$\tau_d = \{A \in 2^M \,|\, \forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subset A\}$$

wobei $B_r(x)$, *die offene Kugel um x vom Radius* r ist, die folgende Menge ist

$$B_r(x) = \{y \in M \,|\, d(x, y) < r\}.$$

Analog definieren wir die abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(x)$ um x mit Radius r als

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in M \,|\, d(x, y) \leq r\}.$$

Man kann leicht zeigen, dass τ_d eine Topologie ist, sowie dass jede offene Kugel auch offen bzgl. τ_d ist.

Es lässt sich nun zeigen, dass eine *Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in der Topologie* τ_d *gegen ein* $x \in M$ *konvergiert* genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \to 0.$$

Weiterhin lässt sich mittels der Metrik die Konvergenz in der üblichen ϵ-δ-Notation formulieren.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon > 0$ gibt, so dass für all $n, m \geq N_\epsilon$

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Der metrische Raum (M, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Für metrische Räume kann man die Kompaktheit einer abgeschlossenen Menge wie folgt charakterisieren.

Lemma 1.1. *Angenommen* (M, d) *ist vollständig. Sei* $K \subset M$ *eine abgeschlossene Menge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *(überdeckungskompakt)* K *ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von* K *hat eine endlich Teilüberdeckung.*
- *(folgenkompakt) Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* K.
- *(total beschränkt - extern) Für jedes* $\epsilon > 0$ *existieren endlich viele* $x_1, \ldots, x_n \in M$, *so dass*
$$K \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i).$$
- *(total beschränkt - intern) Für jedes* $\epsilon > 0$ *existieren endlich viele* $x_1, \ldots, x_n \in K$, *so dass*
$$K \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i).$$

Weiterhin ist (M, d) *lokal kompakt genau dann, wenn es für jedes* $x \in M$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass* $\bar{B}_r(x)$ *kompakt ist.*

Aus den Definitionen totalen Beschränktheit folgt sofort, dass jede total beschränkten Menge separabel ist und deren Abschluss ebenfalls separabel ist. Analog kann man folgendes zeigen.

Korollar 1.2. *Ist Insbesondere, gilt für jedes* $A \subset M$ *mit* (M, d) *vollständig die folgende Äquivalenzen:*

- *(überdeckungspräkompakt) der Abschluss* $\mathrm{cl}\, A$ *von* A *ist überdeckungskompakt.*
- *(folgenpräkompakt) Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* A *hat eine konvergente Teilfolge (mit Grenzwert in* M*).*
- *(total beschränkt - extern) Für jedes* $\epsilon > 0$ *existieren endlich viele* $x_1, \ldots, x_n \in M$, *so dass*
$$A \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i).$$

- *(total beschränkt - intern) Für jedes $\epsilon > 0$ existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A$, so dass*
$$A \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i).$$

Korollar 1.3. *Für jede total beschränkte Menge $A \subset M$ existiert eine abzählbare Menge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$, die dicht in A ist, so dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B_\epsilon(x_i).$$

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass jede Cauchy-Folge total beschränkt ist.

Ein metrischer Raum wird *eigentlich* oder *beschränkt-kompakt*[1] genannt, wenn jede beschränkte, abgeschlossene Menge kompakt ist.

1.2 Maßtheorie

Die folgenden Dinge gelten auch für sogenannte *polnischer Räume*, das sind topologischer Räume (M, τ), so dass es eine abgeschlossene Metrik d gibt mit $\tau = \tau_d$. Aus diesem Grund werden wir im folgenden stets annehmen, dass (M, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Ein Teilmengensystem $\mathcal{A} \subset 2^M$ mit $\varnothing, M \in \mathcal{A}$, welches abgeschlossen ist bzgl. Komplementierung, sowie abzählbarer Vereinigungen und Schnitten ist, wird *σ-Algebra* genannt. Es lässt sich zeigen, dass zu jedem Teilmengensystem $\varpi \subset 2^M$ gibt es eine minimale σ-Algebra $\mathcal{B}(\varpi)$, so dass für alle σ-Algebren $\mathcal{C}$ mit $\varpi \subset \mathcal{C}$ gilt $\mathcal{B}(\varpi) \subset \mathcal{C}$.

Die *Borel σ-Algebra $\mathcal{B}_d$* ist definiert als minimale σ-Algebra $\mathcal{B}(\tau_d)$, d.h. die Borel σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen (oder äquivalent alle abgeschlossenen Mengen) enthält. Im weiteren nennen wir die Elemente von $\mathcal{B}_d$ (Borel) messbar oder Borel-Mengen.

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{B}_d \to [0, \infty]$ wird (Borel-)*Maß* auf (M, d) genannt, wenn die folgende Eigenschaft gilt.

- (σ-Additivität) Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele disjunkte Mengen in $\mathcal{B}_d$. Dann gilt
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Da wir annehmen, dass μ nicht-negativ ist, folgt aus der σ-Additivität, dass $\mu(\varnothing) = 0$. Man kann zeigen, dass man die σ-Additivität auch durch die folgenden zwei Bedingungen ersetzen kann

- (Endliche Additivität) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{B}_d$ mit $A \cap B = \varnothing$.

[1] Im englischen „proper metric space“. Das deutschen Varianten klingen sehr unbeholfen. Für bessere Vorschläge wäre ich dankbar!

- (σ-Monotonie) Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele Mengen in $\mathcal{B}_d$. Dann gilt

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n).$$

Gilt $A_n \subset A_{n+1}$ dann kann die rechte Seite durch $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ ersetzt werden.

Sollte $\mu(M) < \infty$ sein, so heißt μ *endlich*. Gilt $\mu(M) = 1$ so nennen wir es Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei nun $\mathcal{P}(M)$ die Menge alle Wahrscheinlichkeitsmaße auf M.

Lemma 1.4. *Für jedes endlich Maß und alle absteigenden Borel-Folgen, d.h. $A_n \in \mathcal{B}_d$ mit $A_n \supset A_{n+1}$, gilt*

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Beweis. Da $M\backslash A_n \subset M\backslash A_{n+1}$ gilt nach De Morgan

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mu(M) - \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M\backslash A_n)) \\
&= \mu(M) - \sup_{n\in\mathbb{N}} (M\backslash A_n) \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} (\mu(M) - \mu(M\backslash A_n)) \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

□

Ein Maß μ wird *lokal beschränkt* genannt, wenn $\mu(B_r(x)) < \infty$ für all $x \in M$ und $r > 0$. Gilt hingegen nur, dass für jedes $x \in M$ ein $r > 0$ gibt, so dass $\mu(B_r(x)) < \infty$, dann nennen wir μ *lokal endlich*. Es ist nicht schwer zu sehen, dass in diesem Fall $\mu(K) < \infty$ für all kompakten Mengen K.

Sei A eine Borel-Menge und μ ein Maß. Wir definieren ein neues Maß μ_A wie folgt

$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}_d.$$

Es ist leicht zu sehen, dass μ_A ein endliches Maß ist genau dann, wenn $\mu(A) < \infty$.

Theorem 1.5. *Jedes endlich Maß μ ist ein reguläres Maß, d.h. für alle Borel-Mengen A gilt*

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \inf\{\mu(U) \,|\, A \subset U \ \ \textit{offen}\} \\
&= \sup\{\mu(C) \,|\, C \subset A \ \ \textit{abgeschlossen}\} \\
&= \sup\{\mu(C) \,|\, C \subset A \ \ \textit{abgeschlossen und beschränkt}\}.
\end{aligned}$$

Bevor wir das Theorem beweisen, zeigen wir ein einfaches Korollar.

Korollar 1.6. *Alle lokal endlichen Maße sind regulär.*

Beweis des Korollars. Sei $x \in A$. Da μ lokal endlich ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $\mu(A \cap B_r(x)) < \infty$. Insbesondere gilt $\mu(A \cap B_r(x)) < \infty$ sowie aufgrund der σ-Monotonie

$$\mu(A) = \sup_{r>0} \mu(A \cap B_r(x)).$$

Daraus schlussfolgern wir, dass es ein $r_0 \in (0, \infty]$ gibt, so dass $\mu(A \cap B_r(x)) < \infty$ für alle $r \in (0, r_0)$ und $\mu(A \cap B_{r_0}(x)) = \mu(A)$, wobei $B_\infty(x) = M$.

Sei nun $r_n \in (0, r_0)$ mit $r_n \to r_0$. Wir wenden das obige Theorem auf $\mu_{A \cap B_{r_n}(x)}$ und $A \cap B_{r_n}(x)$ an und finden eine abgeschlossene Menge $C_n \subset A \cap B_r(x) \subset A$ mit

$$|\mu(A \cap B_{r_n}(x)) - \mu(C_n)| \leq \frac{1}{n}.$$

Somit gilt

$$\mu(A) \geq \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A \cap B_{r_n}(x)) - \frac{1}{n}\right] = \mu(A).$$

□

Dies zeigt, die innere Regularität. Ist $\mu(A) < \infty$, dann zeigt das obige Theorem, dass auch die äußere Regularität gilt. Da stets $\mu(U) \geq \mu(A)$ für offene Mengen $U \supset A$, gilt dies auch im Fall $\mu(A) = \infty$.

Beweis des Theorems. Die dritte Approximation folgt, da

$$\mu(C) = \sup_{r>0} \mu(C \cap B_r(x))$$

für alle $x \in M$ und $r > 0$.

Wir definieren ein Mengensystem $\mathcal{A}$ wie folgt

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}_d \,|\, \forall \epsilon > 0 \exists F_\epsilon \text{ abgeschlossen und } U_\epsilon \text{ offen} : \\ F_\epsilon \subset B \subset U_\epsilon,\ \mu(U_\epsilon \backslash F_\epsilon) < \epsilon\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass für jedes $B \in \mathcal{A}$ die Aussage des Theorems gilt. Somit genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A} = \mathcal{B}_d$. Da $\mathcal{B}_d$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle abgeschlossenen Mengen enthält, muss nur gezeigt werden, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und $C \in \mathcal{A}$ für alle abgeschlossenen Mengen C.

Sei zunächst C abgeschlossen und definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die offene Menge U_n als

$$U_n = \{x \in M \,|\, d(x, y) < \frac{1}{n} \text{ für ein } y \in C\}.$$

Aufgrund der σ-Monotonie gilt

$$\mu(C) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \inf_{N\in\mathbb{N}} \mu(\bigcap_{n=1}^{N} U_n).$$

Somit ist $C \in \mathcal{A}$.

Im letzten Schritt zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Da $\varnothing$ und M abgeschlossen sind, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist bzgl. Komplementierung und abzählbarer Vereinigung.

Angenommen $B \in \mathcal{A}$ und für gegebenes $\epsilon > 0$, sei F_ϵ und U_ϵ wie in der Definition von $\mathcal{A}$. Dann ist $\tilde{F}_\epsilon = M \backslash U_\epsilon$ abgeschlossen und $\tilde{U}_\epsilon = M \backslash F_\epsilon$ offen und es gilt $\tilde{F}_\epsilon \subset M \backslash B \subset \tilde{U}_\epsilon$ sowie

$$\mu(\tilde{U}_\epsilon \backslash \tilde{F}_\epsilon) = \mu(U_\epsilon \backslash F_\epsilon) < \epsilon.$$

Da dies für beliebige $\epsilon > 0$ gilt, ist $M \backslash B \in \mathcal{A}$.

Sei $B_n \in \mathcal{A}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und für gegebenes $\epsilon > 0$ sei $F_n \subset B_n \subset U_n$, so dass

$$\mu(U_n \backslash F_n) < \epsilon 2^{-n}.$$

Weiterhin gilt

$$\mu(\cup_{n=1}^\infty U_n \backslash F_{n,}) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_{n,} \backslash F_{n,}) < \epsilon.$$

Da

$$\mu(\cup_{n=1}^N F_n) \to \mu(\cup_{n=1}^\infty F_{n,}),$$

gibt es ein hinreichend großes $N_0 > 0$, so dass

$$\mu(\cup_{n=1}^\infty U_n \backslash \cup_{n=1}^{N_0} F_n) < \epsilon.$$

Weil $U = \cup_{n=1}^\infty U_n$ offen und $F = \cup_{n=1}^{N_0} F_n$ abgeschlossen ist, erfüllt $B = \cup_{n=1}^\infty B_n$ die Definition von $\mathcal{A}$ für $\epsilon > 0$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $B \in \mathcal{A}$. Dies zeigt insbesondere, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. $\square$

Die Approximationseigenschaft über abgeschlossene Mengen nennt sich innere Regularität. Maße, die innen-regulär und endlich für kompakte Mengen sind, werden auch *Radon-Maße* genannt. Das Korollar zeigt, dass jedes lokal endliche Maß auf einem separablen vollständigen, metrischen Raum ein *Radon-Maß* ist.

Korollar 1.7. *Seien μ und ν zwei (lokal) endliche Maße, so dass*

$$\mu(C) = \nu(C) \quad \text{für alle abgeschlossenen Menge } C \subset M$$

oder

$$\mu(U) = \nu(U) \quad \text{für alle offenen Menge } U \subset M.$$

Dann gilt $\mu = \nu$.

1.3 Exkurs - Caratheodorys Konstruktion über äußere Maße.

Ein *äußeres Maß* α ist eine Abbildung $\alpha : 2^M \to [0, \infty]$, welches *monoton* und *abzählbar subadditiv* ist, d.h. für $A \subset B$ gilt $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ und für jede abzählbare Menge von Untermengen $A_n \subset M$ gilt

$$\alpha(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(A_n).$$

Das äußere Maß ist endlich, wenn $\alpha(M) < \infty$.

Lemma 1.8. *Sei α ein äußeres Maß, dann ist*

$$\mathcal{A}_\alpha = \{A \in 2^M \,|\, \forall B \in 2^M : \alpha(B) = \alpha(A \cap B) + \alpha(B \backslash A)\}$$

eine σ-Algebra und α ist ein Maß definiert auf $\mathcal{A}_\alpha$.

Korollar 1.9. *Angenommen jede offene Menge $U \subset M$ ist in $\mathcal{A}_\alpha$. Dann gilt $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{A}_\alpha$ und es gibt ein Maß μ, mit*

$$\mu(A) = \alpha(A) \quad \textit{für all } A \in \mathcal{B}_d.$$

Lemma 1.10. *Sei $\gamma : \tau_d \to [0, M]$ eine Funktion, die abzählbar subadditiv auf offenen Mengen ist, d.h.*

$$\gamma(\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma(U_n)$$

für alle Folgen von offenen Mengen U_n.

Dann ist $\alpha : 2^N \to [0, M]$ definiert als

$$\alpha(A) = \inf\{\gamma(U) \,|\, A \subset U \;\; \textit{offen}\}.$$

ein endliches, äußeres Maß

Beweis. Monotonie folgt direkt aus der Definition. Sei nun $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von M. Für jedes $\epsilon > 0$ und $n \in U_n$, gibt es ein offenes U_n, so dass $A_n \subset U_n$ und

$$\gamma(U_n) \leq \alpha(A_n) + \epsilon 2^{-n}.$$

Somit gilt aufgrund der abzählbaren Subadditivität von γ

$$\alpha(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \gamma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma(U_n) \leq \epsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(A_n).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt sofort die Subadditivität von α. □

Sei γ wie oben. Angenommen γ erfüllt außerdem, dass für alle offenen Mengen U, V mit

$$U_\epsilon \cap V = \varnothing \quad \text{für ein } \epsilon > 0$$

gilt

$$\gamma(U \cup V) = \gamma(U) + \gamma(V).$$

Dann gilt für alle Mengen $A, B \subset M$

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$$

mit $A_\epsilon \cap B = \varnothing$, wobei $A_\epsilon = \cup_{x\in A} B_\epsilon(x)$. Jedes äußere Maß mit dieser Eigenschaft wird *metrisches äußeres Maß* genannt.

Wir wollen nun zeigen, dass jedes äußere metrische Maß bereits eine Maß auf den Borel-Mengen ist. Der Beweis dazu ist Halmos Buch (Abschnitt 11) entnommen.

Lemma 1.11. *Sei α ein endliches, metrisches äußeres Maß und $E \subset U$. Dann gilt*

$$\alpha(E) = \lim_{n\to\infty} \alpha(E_n)$$

wobei für

$$E_n = E \cap \{x \in U \,|\, d(x, M\backslash U) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Beweis. Aufgrund der Monotonie muss nur folgendes gezeigt werden

$$\alpha(E) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha(E_n).$$

Definiere $D_n = E_{n+1}\backslash E_n$, dann gilt für $\epsilon = \frac{1}{2\min\{m,n\}}$ und $|m-n| > 1$

$$(D_n)_\epsilon \cap D_m = \varnothing.$$

Da

$$E_{2n+1} \supset D_{2n} \cup E_{2n-1} \supset \bigcup_{i=1}^{n} D_{2i}$$

$$E_{2n} \supset D_{2n-1} \cup E_{2n-2} \supset \bigcup_{i=1}^{n} D_{2i-1}$$

erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(D_{2i}) \leq \alpha(E_{2n+1}) \leq \mu(E)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(D_{2i-1}) \leq \alpha(E_{2n}) \leq \mu(E).$$

Somit konvergieren die Folgen $(\sum_{i=1}^{n} \alpha(D_{2i}))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum_{i=1}^{n} \alpha(D_{2i-1}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Schließlich gilt aufgrund

$$E = E_{2n} \cup (\bigcup_{i=n}^{\infty} D_{2i}) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_{2i-1})$$

und der Subadditivität von α die folgende Ungleichung

$$\alpha(E) \leq \alpha(E_{2n}) + \sum_{i=n}^{\infty} \alpha(D_{2i}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha(D_{2i-1})$$

Dies zeigt, dass $\alpha(E) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha(E_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \alpha(E_n)$. □

Theorem 1.12 (Caratheodory)**.** *Für jedes endliche, metrische äußere Maß α gibt es ein eindeutiges, endliches Maß μ mit $\mu(B) = \alpha(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}_d$. Insbesondere gilt $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{A}_\alpha$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für alle offenen Mengen U und alle Teilmengen $A \subset M$ gilt

$$\alpha(A) \geq \alpha(A \cap U) + \alpha(A \backslash U).$$

Für $E = A \cap U$ sei E_n wie im obigen Lemma. Dann gilt $d(E_n, A\backslash U) > 0$ und somit

$$\alpha(A) \geq \alpha(E_n \cup A\backslash U) = \alpha(E_n) + \alpha(A\backslash U).$$

Da $\alpha(E_n) \to \alpha(E)$ gilt die Behauptung. □

Korollar 1.13. *Sei $\gamma : \tau \to [0, M]$ ein monotone, abzählbar subadditive Funktion definiert auf den offenen Mengen, so dass für alle $U, V \in \tau$, so dass $U_\epsilon \cap V = \varnothing$ für ein $\epsilon > 0$, gilt*

$$\gamma(U \cup V) = \gamma(U) + \gamma(V).$$

Dann gibt es ein eindeutiges Borel-Maß μ, so dass $\mu(U) = \gamma(U)$ für alle $U \in \tau \subset \mathcal{B}_d$.

1.4 Integration über messbare Funktionen

Analog[2] zur Stetigkeit von Funktion zwischen metrischen/topologischen Räumen definieren wir die Messbarkeit wie folgt: Eine Funktion $f : M \to M'$ zwischen metrischen Räumen (M, d) und (M', d') wird *(Borel) messbar* genannt, wenn für alle Borel messbaren Mengen B in M', die Menge $f^{-1}(B')$ Borel messbar ist, kurz $f^{-1}(\mathcal{B}_{d'}) \subset \mathcal{B}_d$.

Eine Funktion f heißt *einfach*, wenn es endlich viele disjunkte Borel-Mengen A_i gibt und $a_i \in \mathbb{R}$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}.$$

Sei m ein beliebigen Maß auf (M, d). Wir sagen eine Folge (f_n) von Borel-Funktionen konvergiert m-fast überall gegen eine Borel-Funktion f, wenn es eine Borel-Menge A gibt, so dass $\mathsf{m}(M\backslash A) = 0$ und für alle $x \in A$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Theorem 1.14. *Jede Borel-Funktion $f : M \to [0, \infty]$ lässt sich durch einfache Borel-Funktionen von unten approximieren, d.d. es gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Borel-Funktionen, so dass*

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f$$

und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert m-fast überall gegen f.

[2] Als mathematisches Grundprinzip gilt, dass Funktionen zwischen Räumen der Kategorie $\mathfrak{X}$ die Kategorie erhalten sollten. In der Kategorientheorie wird diese Kompatibilität als „Funktionen sind kontra-invarianter Funktoren“ ausgedrückt.

Für zwei Borel-Funktionen f und g benutzen wir die Schreibweise $f \leq g$, falls dies m-fast überall gilt, d.h. es gibt eine Borel-Menge A, so dass $\mathsf{m}(M \backslash A) = 0$ und für alle $x \in A$ gilt $f(x) \leq g(x)$.

Ist $g = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \geq 0$ eine einfache Borel-Funktion so definieren wir das Integral von g über m wie folgt

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathsf{m}(A_i).$$

Das allgemeine Integral von Borel-Funktionen $f \geq 0$ über m ist nun wie folgt definiert

$$\int f d\mathsf{m} = \sup\{\int g d\mathsf{m} \,|\, f \geq g \text{ ist eine einfach Borel-Funktion}\}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass für $f \geq g$ stets $\int f d\mathsf{m} \geq \int g d\mathsf{m}$ gilt.

Der folgende Satz zeigt, dass man Integration auch anders berechnen kann.

Satz 1.15 (Cavalleris Prinzip der Integration)**.** *Für alle Borel-Funktionen $f : M \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int f d\mathsf{m} = \int_0^\infty \mathsf{m}(\{f > r\}) dr.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass der Satz für einfache Borel-Funktionen gilt. Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$eine monotone Folge von einfachen Funktionen mit $f_n \leq f$ und $f_n \to f$ m-fast überall, so dass

$$\int f_n d\mathsf{m} \to \int f d\mathsf{m}.$$

Da $\{f_n > r\} \subset \{f_{n+1} > r\}$ und $\{f > r\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > r\}$, gilt aufgrund der σ-Additivität

$$\mathsf{m}(\{f_n > r\}) \to \mathsf{m}(\{f > r\}),$$

so dass der Satz der monotonen Konvergenz zeigt

$$\int_0^\infty \mathsf{m}(\{f_n > r\} dr \to \int_0^\infty \mathsf{m}(\{f > r\}) dr.$$

Da

$$\int f_n d\mathsf{m} = \int_0^\infty \mathsf{m}(\{f_n > r\} dr,$$

folgt sofort

$$\int f d\mathsf{m} = \int_0^\infty \mathsf{m}(\{f > r\}) dr.$$

□

Bemerkung. Für allgemeine Borel-Funktionen $f : M \to [-\infty, \infty]$ gilt ein analoges Statement, wenn die Funktion integrierbar ist, d.h. wenn f^+ und f^- mit $f = f^+ - f^-$ integrierbar sind. In dem Fall gilt

$$\int f d\mathsf{m} = \int_{-\infty}^\infty \mathsf{m}(\{f > r\}) dr.$$

1.5 Auswahltheoreme messbare mengenwertiger Abbildungen

Sei $\mu \in \mathcal{P}(M)$ eine Maß und $\mathcal{A}_\mu$ wie im Abschnitt über die Caratheodory-Konstruktion. Man kann zeigen, dass $\mathcal{A}_\mu$ die kleinste μ-generierte, vollständige σ-Algebra ist, so dass für alle $B \in \mathcal{B}_d$ mit $\mu(B) = 0$ auch $A \in \mathcal{A}_\mu$ für alle $A \subset B$. Wir sagen, dass jedes $A \in \mathcal{A}_\mu$ μ-messbar ist.

Der folgende Satz ist einer der Fundamentalsätze der Theorie von messbaren Räumen. Statt diesen zu beweisen, werden wir lediglich einen Sonderfall behandeln, welcher ohne Probleme mit Hilfe des bisherigen Stoffes bewiesen werden kann.

Satz 1.16 (Universalle Messbarkeit von Bildern stetiger Funktionen)**.** *Seien (M, d) und (N, d) vollständige, separable, metrische Räume und $f : B \to N$ eine stetige Abbildung. Dann ist für jedes Maß $\nu \in \mathcal{P}(N)$ und jede Borel-Menge B, die Menge $f(B)$ ν-messbar.*

Bemerkung. Die Bilder stetiger Funktionen werden analytische Mengen oder Suslin-Mengen genannt.

Definition 1.17 (mengenwertige Funktion)**.** Sei $\mu \in \mathcal{P}(M)$. Eine mengenwertige Funktion

$$F : M \to 2^M$$

heißt μ-messbar, wenn für alle offenen Mengen U

$$F^{-1}(U) \in \mathcal{A}_\mu.$$

Korollar 1.18. *Angenommen der Graph von F ist abgeschlossen, d.h. für $(x_n, y_n) \to (x, y)$ mit $y_n \in F(x_n)$ gilt $y \in F(x)$. Dann ist F μ-messbar für alle $\mu \in \mathcal{P}(M)$.*

Beweis. Da $\Gamma = \{(x, F(x)\}_{x \in M}$ abgeschlossen ist, ist es messbar und somit auch $\Gamma \cap M \times U$ für alle offenen Mengen U . Schließlich gilt

$$\begin{aligned} F^{-1}(U) &= \{x \in M \mid F(x) \cap U \neq \varnothing\} \\ &= p_1(\Gamma \cap M \times U), , \end{aligned}$$

woraus sofort folgt, dass $F^{-1}(U)$ μ-messbar ist. □

Theorem 1.19 (Kuratowski–Ryll-Nardzewski)**.** *Sei (M, d) und (N, d') vollständige, separable, metrische Räume und $\mu \in \mathcal{P}(M)$. Angenommen $F : M \to 2^N$ ist μ-messbar und $F(x)$ ist abgeschlossen für alle $x \in M$. Dann gibt es eine μ-messbare Funktion $f : M \to M$, so dass $f(x) \in F(x)$.*

Zunächst ein einfaches Lemma.

Lemma 1.20. *Seien $A_n \in \mathcal{A}_\mu$. Dann gibt es eine Folge disjunter Mengen $B_n \in \mathcal{A}_\mu$ mit $B_n \subset A_n$, so dass*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Beweis des Theorems. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Metrik d' durch $\min\{d', \frac{1}{2}\}$ ersetzen. Insbesondere gilt dann $B_1(y) = N$ für alle $y \in N$. Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in N. Wir konstruieren eine Folge von messbaren Funktion $f_n : M \to N$ wie folgt: Für $n = 0$ definiere

$$f_0 \equiv y_0.$$

Angenommen f_{n-1} wurde bereits konstuiert. Sei

$$\begin{aligned} A_k^n &= \{x \in M \mid d(f_{n-1}(x), y_k) < 2^{n-1}, d(y_n, F(x)) < 2^{-n}\} \\ &= f_{n-1}^{-1}(B_{2^{n-1}}(y_k)) \cap F^{-1}(B_{2^{-n}}(y_k)). \end{aligned}$$

Da f_{n-1} und F μ-messbar sind, sind auch die Mengen A_k^n μ-messbar. Weiterhin gilt

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^n,$$

so dass es nach dem vorigen lemma μ-messbare disjunkte Mengen $B_k^n \subset A_k^n$ gibt mit

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^n.$$

Setzten wir nun $f_n(x) = y_k$ für $x \in B_k^n$, so ist es leicht zu sehen, dass f_n μ-messbar ist. Weiterhin gilt

$$d(f_n(x), F(x)) < 2^{-n}$$

und

$$d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < 2^{-n},$$

d.h. für alle $x \in M$ ist die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit Limes in $F(x)$. Somit ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

die gesuchte μ-messbare Funktion mit $f(x) \in F(x)$. □

Korollar 1.21. *Seien (M, d) und (N, d') separable, vollständige, metrische Räume, π ein Maß auf $M \times N$ und $\mu = (p_1)_*\pi$. Dann gibt es eine μ-messbare Auswahl $f : M \to N$ mit*

$$(x, f(x)) \in \operatorname{supp} \pi$$

für alle $x \in \operatorname{supp} \mu$.

1.6 Satz von Lusin

Satz 1.22 (Satz von Lusin). *Seien (M, d) und (N, d') separable, vollständige metrische Räume, μ eine endliches Maß auf M und $f : M \to N$ eine μ-messbare Funktion. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine kompakte Mengen $K \subset M$ mit $\mu(M \backslash K) < \epsilon$, so dass die Einschränkung von f auf K,*

$$f\big|_K : K \to \mathbb{R},$$

stetig ist.

Beweis. Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in N und $\mathcal{B} = \{B_q(y_n) \,|\, q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{B}$ abzählbar und jede offene Menge V in N ist die Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$, d.h. $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topology $\tau_{d'}$.

Da f messbar ist, sind auch $f^{-1}(V_n)$ und $M\backslash f^{-1}(V_n)$ messbar für alle $V_n \in \mathcal{B}$. Weiterhin gibt es aufgrund der Endlichkeit von μ kompakte Mengen $K_n \subset f^{-1}(V_n)$ und $\tilde{K}_n \subset M\backslash f^{-1}(V_n)$, so dass

$$\mu(M\backslash(K_n \cup \tilde{K}_n)) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Somit gilt für die kompakte Menge

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (K_n \cup \tilde{K}_n)$$

die Abschätzung

$$\mu(M\backslash K) < \epsilon.$$

Wir behaupten f ist stetig auf K.

Da K_n und $\tilde{K}_n$ disjunkte, kompakte Mengen sind, sind auch $K \cap K_n$ und $K \cap \tilde{K}_n$ disjunkt und kompakt in K und es gilt $K \cap K_n = K\backslash(K \cap \tilde{K}_n)$, d.h. $K \cap K_n$ ist auch offen in K. Die Konsturktion zeigt nun, dass

$$K \cap K_n = (f\big|_K)^{-1}(V_n),$$

d.h. das Urbild von V_n bzgl. der Einschränkung $f\big|_K$ ist offen. Ist nun $V \subset N$ offen, so gilt

$$V = \bigcup_{V\supset V_n\in\mathcal{B}} V_n,$$

so dass

$$(f\big|_K)^{-1}(V) = (f\big|_K)^{-1}(\bigcup_{V\supset V_n\in\mathcal{B}} V_n) = \bigcup_{V\supset V_n\in\mathcal{B}} (f\big|_K)^{-1}(V_n)$$

offen in K ist und damit $f\big|_K$ stetig. □

Korollar 1.23. *Ist $f : M \to N$ μ-messbar für eine endliches Maß μ, dann gibt es eine Borel-Abbildung $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$, so dass $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$ und der Graph von $\tilde{f}$ ist eine Borel-Menge in $M \times N$.*

Beweis. Sei $0 < \epsilon_m < \frac{1}{m}$ und K^m wie in der obigen Konstruktion. Es ist leicht zu sehen, dass man die Mengen $K_n^{(m)}$ und $\tilde{K}_n^{(m)}$ aufsteigend wählen kann, d.h. $K_n^{(m)} \subset K_n^{(m+1)}$ und $\tilde{K}_n^{(m)} \subset \tilde{K}_n^{(m+1)}$. Damit gilt auch $K^{(m)} \subset K^{(m+1)}$ und

$$\mu(M\backslash\Omega) = \lim_{m\to\infty} \mu(M\backslash K^{(m)}) = 0$$

für $\Omega = \cup_{m\in\mathbb{N}} K^{(m)}$. Da $f\big|_{K^m}$ stetig ist, ist somit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ y_0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

eine Borel-Funktion mit $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$ wobei $y_0 \in N$ beliebig ist.

Da f auf $K^{(m)}$ stetig ist und $K^{(m)}$ kompakt, ist $\operatorname{graph}(f\big|_{K^{(m)}})$ abgeschlossen und somit eine Borel-Menge in $M \times N$. Schließlich ist hat der Graph von $\tilde{f}$ die folgende Form

$$\operatorname{graph}(\tilde{f}) = M\backslash\Omega \times \{y_0\} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{graph}(f\big|_{K^{(m)}}),$$

d.h. $\operatorname{graph}(\tilde{f})$ ist eine Borel-Menge. □

Korollar 1.24. *Ist* $\pi \in \mathcal{P}(M\times N)$, $\mu = (p_1)_*\pi$ *und* $f : M \to N$ *eine* μ*-messbare Auswahl von* $\operatorname{supp}\pi$*, dann gibt es eine Borel-Abbildung* $\tilde{f}$*, so dass*

$$\pi(\operatorname{graph} f\backslash \operatorname{graph} \tilde{f}).$$

Beweis. Sei $\tilde{f}$ wie im vorigen Korollar. Da

$$\operatorname{graph} f\backslash \operatorname{graph} \tilde{f} \subset (p_1)^{-1}(\{f \neq \tilde{f}\})$$

und $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$, folgt sofort die Aussage. □

1.7 Auswahl zweier disjunkter Borel-Abbildungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie dass ein Maß π auf dem Produktraum $M \times M$ entweder durch eine Abbildung gegeben ist, oder das es zwei Borel-Abbildungen gibt deren Bilder strikt separierbar ist auf eine Menge positiven Maßes bzgl. des ersten Marginals von π.

Satz 1.25 (Auswahl-Dichotomie)**.** *Seien* (M, d) *und* (N, d') *separable, vollständige, metrischer Räume und* π *eine Maß auf* $\mathcal{P}(M \times N)$ *und* $\mu = (p_1)_*\pi$*. Dann gilt folgende Dichotomie:*

1. *Für jede* μ*-messbare Auswahl* $f : M \to N$ *von* $\operatorname{supp}\pi$ *gilt*

$$\pi(M \times N\backslash \operatorname{graph} f) = 0,$$

d.h. $\pi = (\operatorname{id} \times f)_*\mu$.

2. *Es gibt eine kompakte Menge* $K \subset M$ *mit* $\mu(K) > 0$ *und zwei stetige Abbildungen* $f_1, f_2 : K \to N$ *mit*

$$\operatorname{graph} f_i \subset \operatorname{supp}\pi > 0, i = 1; 2,$$

und $f_1(K) \cap f_2(K) = \varnothing$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass höchstens eine der beiden Aussagen wahr ist.

Da $\operatorname{supp}\pi$ abgeschlossen ist, gibt es eine μ-messbare Auswahl f von $\operatorname{supp}\pi$. Angenommen die erste Aussage ist nicht wahr. Wir ersetzen zunächst f durch eine Borel-Abbildung $\tilde{f}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Aus den Annahmen folgt, dass für

$$A = M \times N \backslash \operatorname{graph} \tilde{f}$$

das Maß $\pi_A = \pi(A \cap \cdot)$ eine nicht-triviales, endliches Maß ist. Somit gibt es eine kompakte Menge $C \subset A$ mit $\pi_C(A) > 0$. Dann ist $\pi_C = \pi(C \cap \cdot)$ ebenfalls ein nicht-triviales, endliches Maß mit

$$\pi_{\mathrm{C}} \subset C.$$

Insbesondere gibt es eine μ'-messbare Auswahl g von π_{C} wobei $\hat{\mu} = (p_1)_* \pi_C$. Es sei angemerkt, dass $\tilde{f}$ ebenfalls eine Auswahl von

$$\tilde{C} = \operatorname{supp} \pi \cap p_1(C)$$

ist. Im folgenden betrachten wir g und $\tilde{f}$ als eine Auswahl von $\tilde{C}$ welche $\hat{\mu}$-messbar sind.

Aus dem Satz von Lusin folgt, dass es für beliebiges $\epsilon > 0$ kompakte Mengen $K, K' \subset M$ mit $\hat{\mu}(M \backslash K), \hat{\mu}(M \backslash K') \leq \frac{\epsilon}{2}$ gibt, so dass $\tilde{f}$ und g stetig auf K bzw. K' sind. Weiterhin gilt

$$\hat{\mu}(M \backslash (K \cap K')) \leq \hat{\mu}(M \backslash K) + \hat{\mu}(M \backslash K') \leq \epsilon,$$

d.h. $\tilde{f}$ und g sind stetig auf der kompakten Menge $\tilde{K}$ positiven $\hat{\mu}$-Maßes.

Aufgrund der Konstruktion gilt $\tilde{f}(x) \neq g(x)$ für alle $x \in \tilde{K}$. Die Stetigkeit implziert nun, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$\tilde{f}(\bar{B}_\epsilon(x) \cap \tilde{K}) \cap g(\bar{B}_\epsilon(x) \cap \tilde{K}) = \varnothing.$$

Wählen wir schließlich $x_0 \in \operatorname{supp} \hat{\mu} \cap \tilde{K}$, so gilt

$$\mu(\bar{B}_\epsilon(x_0) \cap \tilde{K}) \geq \hat{\mu}(\bar{B}_\epsilon(x_0) \cap \tilde{K}) > 0$$

und $f_1(x) = \tilde{f}(x)$ und $f_2(x) = g(x)$ für $x \in \bar{B}_\epsilon(x_0) \cap \tilde{K}$ sind die gesuchten Abbildungen.

□

2 Der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße

2.1 Eine Konvergenz auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße

Der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf (M, d) wird bezeichnen wir $\mathcal{P}(M)$. Auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße definieren wir den folgenden Begriff der *schwachen Konvergenz*: Wir sagen eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(M)$ *konvergiert schwach* gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, kurz $\mu_n \rightharpoonup \mu$, wenn für alle beschränkten, stetigen Funktionen $f \in C_b(M)$ gilt

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass wenn immer $\mu_n \rightharpoonup \mu$, dann $\mu_{n_m} \rightharpoonup \mu$ für alle Teilfolgen von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung. (1) Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass der Raum der endlichen Maße das Dual des Banach-Raums $C_b(M)$ ist und die „schwache Konvergenz“ der schwachen $*$-Konvergenz entspricht. Dies kann mit Hilfe des Riesz-Repräsentationssatzes gezeigt werden. Kombiniert man dieser Charakterisierung mit dem Satz von Banach-Alaoglu, so folgt Prokhorovs Theorem (siehe Abschnitt 2.3) für kompakte metrische Räume (M, d). Wir präsentieren eine direkte Variante, die mit einfacheren Mitteln gezeigt werden kann.

(2) Ein Begriff der Konvergenz impliziert in der Regel keine Topologie. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die schwache Topologie metrisierbar ist, d.h. es gibt eine Metrik auf $\mathcal{P}(M)$ deren Konvergenzbegriff mit der schwachen Konvergenz übereinstimmt.

Zunächst die folgenden technischen Lemmas.

Lemma 2.1. *Für alle monotonen Funktionen $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, gibt es eine abzählbare Menge $A \subset [0,1]$, so dass für alle $r \in [0,1]\backslash A$*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \varphi(r+\epsilon) - \varphi(r) = 0.$$

Theorem 2.2 (Portmanteau)**.** *Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

2. $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \le \mu(C)$ *für alle abgeschlossenen Mengen $C \subset M$.*

3. $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ *für alle offenen Mengen* $U \subset M$.

4. $\liminf \mu_n(A) = \mu(A)$ *für alle Borel-Mengen* A *mit* $\mu(\partial A) = 0$.

Beweis. Angenommen $\mu_n \rightharpoonup \mu$, dann gilt für die Funktionen

$$g_m(x) = \min\left\{(1 - \frac{1}{m} d(x, C)), 0\right\}$$

das folgende

$$\chi_C(x) \leq g_m(x) \leq \chi_{C_m}(x)$$

wobei

$$C_m = \{x \in M \,|\, d(x, C) < \frac{1}{m}\}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) &\leq \liminf_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int g_m d\mu_n \\
&= \liminf_{m\to\infty} \int g_m d\mu \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \mu(C_m) = \mu(C).
\end{aligned}$$

Da $\mu_n(U) = 1 - \mu_n(M \backslash U)$ sowie $\mu(U) = 1 - \mu(M \backslash U)$, gilt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) &= 1 - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(M \backslash U) \\
&\geq 1 - \mu(M \backslash U) = \mu(U).
\end{aligned}$$

Dies zeigt auch, dass die zweite und dritte Aussage äquivalent ist.

Im allgemeinen gilt nun

$$\begin{aligned}
\mu(\operatorname{int} A) &\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\operatorname{int} A) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\operatorname{cl} A) \\
&\leq \mu(\operatorname{cl} A).
\end{aligned}$$

Angenommen $\mu(\partial A) = 0$ dann gilt $\mu(A) = \mu(\operatorname{int} A) = \mu(\operatorname{cl} A)$ und der Limes-superior und der Limes-inferior stimmen überein und sind somit gleich $\mu(A)$.

Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir noch, dass die letzte Aussage die erste impliziert. Sei $f \in C_b(M)$. Aufgrund der Linearität und der Endlichkeit der Maße können wir annehmen, dass $0 \leq f \leq 1$.

Definiere eine monotone Funktion $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ wie folgt

$$\varphi(r) = \mu(\{f > r\}).$$

Dann gilt

$$\mu(\{f = r\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \varphi(r + \epsilon) - \varphi(r) = 0$$

für alle $r \in [0, 1] \backslash A$ für eine abzählbare Menge A. Somit erhalten wir durch Cavalleris Prinzip der Integration und den Annahmen das folgende

$$\int f d\mu_n = \int_0^1 \mu_n(A_r) dr \to \int_0^1 \mu(A_r) dr = \int f d\mu$$

wobei wir im mittleren Schritt den Satz der beschränkten Konvergenz auf die Folge $\psi_n(r) = \mu_n(A_r)$ und dem Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$ angewendet haben. □

Korollar 2.3. *Die schwache Konvergenz $\mu_n \rightharpoonup \mu$ ist äquivalent zu folgender Aussage: Für alle unterhalbstetigen Funktionen $f : M \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f d\mu_n.$$

Beweis. Zunächst sei angemerkt, dass für jedes offene U die Funktion $f = \chi_U$ unterhalbstetig ist und somit die Aussage des Lemmas die schwache Konvergenz impliziert.

Angenommen $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Da die Mengen $\{f > r\}$ offen sind für $r \in [0, \infty]$, gilt

$$\mu(\{f > r\}) \leq \liminf \mu_n(\{f > r\}),$$

so dass wir mit Fatous Lemma schließen

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} \int_0^\infty \mu_n(\{f > r\}) dr \\ &= \liminf_{n \to \infty} \int f d\mu_n. \end{aligned}$$

□

2.2 Metrik auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die schwache Konvergenz durch eine Metrik induziert wird.

Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße in $\mathcal{P}(M)$. Dann definieren wir die Levy-Prokhorov-Metrik d_{LP} zwischen μ und ν wie folgt

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 \,|\, \forall A \in \mathcal{B}_d : \mu(A) \leq \nu(A_\epsilon) + \epsilon\}.$$

Lemma 2.4. *Der Raum $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ ist ein metrischer Raum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass d_{LP} symmetrisch ist: Sei $A \in \mathcal{B}_d$ und $d(\mu, \nu) < \epsilon$ dann gilt

$$(M \backslash A_\epsilon)_\epsilon \subset M \backslash A,$$

so dass

$$\begin{aligned}\mu(A_\epsilon) + \epsilon &= 1 + \epsilon - \mu(M \backslash A_\epsilon) \\ &\geq 1 - \nu((M \backslash A_\epsilon)_\epsilon) \\ &\geq 1 - \nu(M \backslash A) = \nu(A).\end{aligned}$$

Somit gilt $d_{LP}(\nu, \mu) < \epsilon$. Insbesondere ist d_{LP} symmetrisch.

Angenommen, $d(\mu, \nu) = 0$. Dann gilt für alle abgeschlossenen C

$$\mu(C) \leq \lim_{n \to \infty} \left(\nu(C_{\frac{1}{n}}) + \frac{1}{n} \right) = \nu(C).$$

Aufgrund der Symmetrie auch $\nu(C) \leq \mu(C)$ womit $\mu = \nu$.

Schließlich zeigen wir noch die Dreiecksungleichung: Sei $d(\mu, \nu) < \epsilon$, $d(\nu, \sigma) < \delta$ und $A \in \mathcal{B}_d$, dann gilt

$$\mu(A) \leq \nu(A_\epsilon) + \epsilon \leq \sigma(A_{\epsilon+\delta}) + \epsilon + \delta,$$

so dass $d(\mu, \sigma) < \epsilon + \delta$. □

Da $\mu(A) \leq \mu(\operatorname{cl} A)$ für alle Borel-Mengen A gilt, erhalten wir die folgenden vereinfachte Charakterisierung.

Korollar 2.5. *Es gilt*

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 \,|\, \forall \textit{abgeschlossenen } C : \mu(C) \leq \nu(C_\epsilon) + \epsilon\}.$$

Lemma 2.6. *Sei (M, d) ein separabler metrischer Raum. Dann gibt es für alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ und $\epsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \epsilon)$, endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in M$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß*

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}$$

mit $a_i \in [0, 1]$, so dass

$$d_{LP}(\mu, \nu) < \epsilon$$

und

$$\mu(M \backslash \cup_{i=1}^n B_\delta(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}$$

mit $\mu(\partial B_\delta(x_i)) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Übung. □

Korollar 2.7. *Der metrische Raum $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ ist separabel genau dann, wenn (M, d) separabel ist.*

Satz 2.8. *Sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $\mu_n \rightharpoonup \mu$.
2. $d(\mu_n, \mu) \to 0$,

d.h. die schwache Konvergenz entspricht der natürlichen Konvergenz des metrischen Raums $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$.

Beweis. Sei zunächst $d(\mu_n, \mu) \to 0$. Dann gilt für alle abgeschlossenen Mengen C und $d(\mu_n, \mu) < \epsilon_n \to 0$ das folgende

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \lim_{n\to\infty} (\mu(C_{\epsilon_n}) + \epsilon_n) = \mu(C).$$

Dies impliziert $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Da (M, d) separabel ist, erhalten wir für $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ wie im obigen Lemma. Für jedes $I \subset \{1, \ldots, m\}$ definiere

$$B_I = \bigcup_{i\in I} B_\delta(x_i).$$

Da $\mu(\partial B_\delta(x_i)) = 0$, gilt ebenfalls $\mu(\partial B_I)$. Da $\mu_n \rightharpoonup \mu$, gibt es somit ein $N_\epsilon > 0$, so dass für $n \geq N_0$ und alle $I \subset \{1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} |\mu_n(B_I) - \mu(B_I)| &\leq \frac{\epsilon}{2} \\ |\mu_n(M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i)) - \mu(M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i))| &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\mu_n(M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i)) \leq \mu(M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i)) + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

Für beliebige Borel-Mengen A sei I_A definiert als

$$I_A = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid B_\delta(x_i) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Dann gilt

$$(B_{I_A})_\epsilon \subset (A \cap B_{I_A})_{3\epsilon} \subset A_{3\epsilon}$$

und

$$M \setminus A \subset M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i).$$

so dass

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &\leq \mu_n(B_{I_A}) + \mu_n(M \setminus \cup_{i=1}^m B_\delta(x_i)) \\ &\leq \mu(B_{I_A}) + \epsilon \\ &\leq \nu((B_{I_A})_\epsilon) + 2\epsilon \leq \nu(A_{3\epsilon}) + 3\epsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt für $n \geq N_\epsilon$

$$d(\mu, \mu_n) \leq d(\mu, \nu) + d(\nu, \mu_n) \leq 3\epsilon.$$

□

Zum Schluss wollen wir noch die Menge der δ-Maße betrachten. Dazu definieren wir folgende Menge

$$\mathcal{P}^{(1)}(M) = \{\delta_x \in \mid x \in M\}$$

wobei $\delta_x(A) = \chi_A(x)$.

Sei $\tilde{d} = \{1, d\}$, dann ist $\tilde{d}$ eine Metrik auf M und die Räume (M, d) und $(M, \tilde{d})$ sind lokal bi-Lipschitz äquivalent, d.h.

$$B_r^d(x) = B_r^{\tilde{d}}(x)$$

für alle $x \in M$ und $r \in (0, 1)$. Insbesondere, ist $\mathsf{id} : (M, d) \to (M, \tilde{d})$ eine Homeomorphismus.

Lemma 2.9. *Die Räume $(M, \tilde{d})$ und $(\mathcal{P}^{(1)}(M), d_{LP})$ sind abgeschlossen.*

2.3 Prokhorovs Theorem

In diesem Abschnitt beweisen wir das zentrale Theorem zur Charakterisierung von kompakten Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Definition 2.10 (Straffe Maße)**.** Eine Familie von Maßen $\{\mu_i\}_{i \in I}$ wird *(gleichmäßig) straff* genannt, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\epsilon \subset M$ gibt, so dass für alle $i \in I$ gilt

$$\mu_i(M \backslash K_\epsilon) < \epsilon.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass der Begriff einer straffen Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen äquivalent zur Präkompaktheit dieser Menge ist. Zunächst zeigen wir, dass Präkompaktheit die gleichmäßige Straffheit impliziert.

Satz 2.11. *Sei (M, d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum. Dann ist jede total beschränkte Menge $\Gamma \subset \mathcal{P}(M)$ ist gleichmäßig straff.*

Bemerkung. Die Aussage ist falsch für nicht-separable metrische Räume.

Beweis. Sei $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dicht in M. Da Γ total beschränkt ist, finden wir laut Korollar 1.3 eine abzählbare, dichte Menge $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ, so dass es für jedes $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k > 0$ gibt mit

$$\inf_{n=1}^{N_k} d_{LP}(\mu_n, \mu) \leq \epsilon 2^{-(k+1)} \quad \text{für alle } \mu \in \Gamma.$$

Für $n \in \{1, \ldots, N_k\}$ definiere

$$A_n^k = \{\mu \in \Gamma \mid d_{LP}(\mu_n, \mu) \leq \epsilon 2^{-(k+1)}\}.$$

Dann gilt

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N_k} A_n^k.$$

Da $\{\mu_n\}_{n=1}^{N_k}$ endlich ist und

$$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{2^{-(k+1)}}(x_i)$$

gibt es ein $M_k > 0$, so dass für $n \in \{1, \ldots, N_k\}$ gilt

$$\mu_n(M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} B_{2^{-(k+1)}}(x_i)) \leq \epsilon 2^{-(k+1)}.$$

Insbesondere gilt dann auch

$$\mu_n(M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} \bar{B}_{2^{-k}}(x_i)) \leq \epsilon 2^{-k}.$$

Da $\epsilon > 0$, sehen wir, dass

$$\begin{aligned}(M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} \bar{B}_{2^{-k}}(x_i))_{\epsilon 2^{-(k+1)}} &\subset (M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} \bar{B}_{2^{-k}}(x_i))_{2^{-(k+1)}} \\ &\subset M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} B_{2^{-(k+1)}}(x_i).\end{aligned}$$

Somit gilt für $\mu \in A_n^k$

$$\mu(M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} \bar{B}_{2^{-k}}(x_i)) \leq \mu_n(M\setminus \cup_{i=1}^{M_k} B_{2^{-(k+1)}}(x_i)) + \epsilon 2^{-(k+1)} \leq \epsilon 2^{-k}.$$

Da die Vereinigung alle A_n^k gleich Γ ist, muss dies für alle $\mu \in \Gamma$ gelten, d.h.

$$\mu(M\setminus W_k) \leq \epsilon 2^{-k} \quad \text{für alle } \mu \in \Gamma$$

wobei

$$W_k = \bigcup_{i=1}^{M_k} \bar{B}_{2^{-k}}(x_i).$$

Aus der Definition von W_k folgt nun, dass $W = \cap_{k=1}^{\infty} W_k$ abgeschlossen und total beschränkt ist. Insbesondere gilt für alle $\mu \in \Gamma$

$$\mu(M\setminus W) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M\setminus W_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass Γ gleichmäßig straff ist. □

Korollar 2.12. *Jedes endliche Maß μ auf einem vollständigen, separablen, metrischen Raum ist straff und es gilt*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subset A \ \textit{kompakt}\}.$$

Korollar 2.13. *Ist (M, d) vollständig und separabel, dann ist jede Cauchy-Folge in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ gleichmäßig straff.*

Im folgenden wollen wir die Äquivalenz der totalen Beschränkheit und der gleichmäßigen Straffheit zeigen. Dazu betrachten wir folgenden Hilfssatz.

Lemma 2.14. *Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in M und $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen. Dann ist das folgende Mengensystem*

$$\mathcal{H} = \{ \bigcup_{n\in I, i\in J} \bar{B}_{q_{n,i}}(x_n) \cap K_i \,|\, q_{n,i} \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N}, I, J \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$$

abzählbar und abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen.

Außerdem gilt das folgendes: Angenommen für ein abgeschlossenes F gilt $F \subset U \cap H$ wobei $H \in \mathcal{H}$ und U ist offen. Dann gibt es ein $H_0 \in \mathcal{H}$, so dass $F \subset H_0 \subset U$.

Bemerkung. Ist $r < 0$ so setzen wir $\bar{B}_r(x) = \varnothing$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{H}$ abzählbar und abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen ist.

Sei nun F, H und U wie in der Behauptung des Lemmas. Da $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $F \subset K_i$. Insbesondere ist F kompakt. Deshalb gibt es für jedes $r > 0$ endlich viele x_n, $n \in I$, so dass

$$F \subset \cup_{n\in I} B_r(x_i) \subset \cup_{n\in I} B_{2r}(x_i) \subset U.$$

Wählen wir $q \in [r, 2r) \cap \mathbb{Q}$, so erfüllt $H_0 = \cup_{n\in I} \bar{B}_q(x_i) \cap K_i \in \mathcal{H}$ die Aussage des Lemmas. □

Theorem 2.15 (Prokhorov)**.** *Sei (M, d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum. Eine Menge $\Gamma \subset \mathcal{P}(M)$ ist präkompakt genau dann, wenn sie gleichmäßig straff ist*[1].

Beweis. Ist die Menge Γ präkompakt, dann Γ nach Satz 2.11 gleichmäßig straff ist. Es bleibt zu zeigen, dass jede gleichmäßig straffe, Menge präkompakt ist. Dazu reicht es aus für jede Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Γ eine konvergente Teilfolge zu finden.

Da Γ gleichmäßig straff ist, gibt es kompakte Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset M$ mit $\mu_n(K_i) > 1 - \frac{1}{i}$. Sei $\{x_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in M und $\mathcal{H}$ das Mengensystem des vorige Lemmas.

Sei $H_1, H_2, \ldots$ ein Aufzählung von $\mathcal{H}$. Mittels eines Diagonalverfahrens finden wir eine Teilfolge $(\mu_{n'})_{n'}$, so dass für all H_i die Folge $(\mu_{n'}(H_i))_{n'}$ konvergiert. Auf $\mathcal{H}$ können wir somit eine Funktion $\alpha : \mathcal{H} \to [0, 1]$ wie folgt definieren

$$\alpha(H_i) = \lim_{n'\to\infty} \mu_{n'}(H_i).$$

[1] Beweis angelehnt an Sagitov „Weak convergence of probability measures“ April 23, 2015 `http://www.math.chalmers.se/~serik/C-space.pdf`

Sei nun $H, H' \in \mathcal{H}$, da $H \cup H' \in \mathcal{H}$ gilt stets

$$\begin{aligned}\alpha(H \cup H') &= \lim_{n' \to \infty} \mu_{n'}(H \cup H') \\ &\leq \lim_{n' \to \infty} \left[\mu_{n'}(H) + \mu_{n'}(H')\right] \\ &= \alpha(H) + \alpha(H'),\end{aligned}$$

Sind H und H' disjunkt, so gilt sogar Gleichheit. Insbesondere, ist α endlich subadditiv für beliebige Mengen und endlich additiv für disjunkte Mengen. Aus der Monotonie der Maße μ_n folgt auch die Monotonie von α bzgl. $\mathcal{H}$.

Wir definieren nun eine Funktion $\gamma : \tau \to [0, 1]$ wie folgt

$$\gamma(U) = \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset U} \alpha(H).$$

Wir wollen zeigen, dass γ die Bedingungen von Korollar 1.13 erfüllt sind und es somit ein Maß μ gibt mit $\mu(U) = \gamma(U)$. In diesem Fall gilt für jedes $H \subset U$

$$\alpha(H) \leq \lim_{n' \to \infty} \mu_{n'}(H) \leq \liminf_{n' \to \infty} \mu_{n'}(U).$$

Daraus folgt

$$\mu(U) \leq \liminf_{n' \to \infty} \mu_{n'}(U).$$

Daraus folgt $\mu(M) \leq 1$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mu(M) \geq 1$, so dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und somit $(\mu_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ gegen μ konvergiert. Da $K_i \in \mathcal{H}$ und $\mu_{n'}(K_i) \geq 1 - \frac{1}{i}$, gilt

$$\begin{aligned}\mu(M) &\geq \sup_{i \in \mathbb{N}} \alpha(K_i) \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \lim_{n' \to \infty} \mu_{n'}(K_i) \\ &\geq \sup_{i \in \mathbb{N}} 1 - \frac{1}{i} = 1.\end{aligned}$$

Seien U_1 und U_2 offene Mengen und $H \in \mathcal{H}$, so dass $H \subset U_1 \cup U_2$ und

$$\gamma(U_1 \cup U_2) \leq \alpha(H) + \epsilon.$$

Definiere

$$\begin{aligned}F_1 &= \{x \in H \mid d(x, M \backslash U_1) \geq d(x, M \backslash U_2)\} \\ F_2 &= \{x \in H \mid d(x, M \backslash U_2) \geq d(x, M \backslash U_1)\}.\end{aligned}$$

Dann sind F_1 und F_2 abgeschlossen und es gilt $H = F_1 \cup F_2$ und $F_k \subset U_k \cap H$ für $k = 1; 2$. Das vorige Lemma zeigt, dass es $H_k \in \mathcal{H}$ mit $F_k \subset H_k \subset U_k$ gibt. Daraus schließen wir

$$\begin{aligned}\gamma(U_1 \cup U_2) &\leq \alpha(H) + \epsilon \\ &= \lim_{n' \to \infty} \mu_{n'}(F_1 \cup F_2) \\ &\leq \lim_{n' \to \infty} [\mu_{n'}(H_1) + \mu_{n'}(H_2)] \\ &= \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \\ &\leq \gamma(U_1) + \gamma(U_2).\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, sehen wir, dass γ endlich additiv ist.

Sei nun $H \in \mathcal{H}$, so dass $H \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und

$$\gamma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \leq \alpha(H) + \epsilon.$$

Da H kompakt ist, gibt es ein N, so dass $H \subset \cup_{n=1}^{N} U_n$. Somit folgt aus der endlichen Additivität

$$\begin{aligned}\gamma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) &\leq \alpha(H) + \epsilon \\ &\leq \gamma(\bigcup_{n=1}^{N} U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \gamma(U_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma(U_n)\end{aligned}$$

woraus direkt die abzählbare Additivität von γ folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass γ additiv für offene Menge U und V mit $U_\delta \cap V = \varnothing$ für ein $\delta > 0$ ist. Wir zeigen, dass γ sogar additiv auf disjunkten Mengen ist: Seien $H, H' \in \mathcal{H}$ mit $H \subset U$ und $H' \subset U$ mit

$$\begin{aligned}\gamma(U) &\leq \alpha(H) + \epsilon \\ \gamma(V) &\leq \alpha(H') + \epsilon\end{aligned}$$

für ein beliebiges $\epsilon > 0$. Falls U und V disjunkt sind, sind auch H und H' disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned}\gamma(U \cup V) &\geq \alpha(H' \cup H'') \\ &= \alpha(H') \cup \alpha(H'') \\ &\geq \gamma(U) + \gamma(V) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt in Kombination mit der endlichen Subadditivität

$$\gamma(U) + \gamma(V) \leq \gamma(U \cup V) \leq \gamma(U) + \gamma(V),$$

d.h. die Ungleichungen sind Gleichheiten. □

Zusammen mit Korollar 2.7 erhalten wir die beiden folgenden Aussagen.

Korollar 2.16. *Der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße* $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ *ist vollständig und separabel genau dann, wenn* (M, d) *vollständig und separabel ist.*

Beweis. Lemma 2.9 zeigt, dass (M, d) homeomorph zum abgeschlossenen Teilraum

$$\mathcal{P}^{(1)}(M) = \{\delta_x \,|\, x \in M\}$$

ist. Somitgenügt es zu zeigen, dass $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ vollständig und separabel ist, wenn (M, d) vollständig und separabel ist.

Sei nun (M, d) vollständig und separabel und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$. Es genügt zu zeigen, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Nach Korollar 2.13 ist $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig straff und der obige Beweis zeigt, dass es eine Teilfolge gibt, welche gegen ein $\mu \in \mathcal{P}(M)$ konvergiert. Da die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits eine Cauchy-Folge ist, muss diese ebenfalls gegen μ konvergieren. □

Korollar 2.17. *Der metrische Raum (M, d) kompakt genau dann, wenn $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ kompakt ist.*

Alternativer Beweis von Prokhorov via Riesz und Banach-Alaoglu.
Der Riesz-Repräsentationssatz besagt, dass für jede kompakte Menge $K \subset M$ der Dualraum zu $C_b(K)$ homeomorph zum Raum der endlichen, reellwertigen[2] Maße auf K ist und jedes nicht-negative lineare Funktion mit Norm c durch ein endliches, reellwertiges Maß μ mit $\mu(M) = c$ gegeben ist. Bemerke weiterhin, dass $C_b(K)$ separabel ist und die schwache Konvergenz von Maßen der schwach-$*$ Konvergenz der Funktionale entspricht.

Der Satz von Banach-Alaoglu besagt, dass die Einheitskugel eines Dualraums X^* schwach-$*$ kompakt ist genau dann, wenn der zugehörige Banachraum X separabel ist. D.h. Riesz und Banach-Alaoglu zeigen, dass der Raum der endlichen Maße kompakt ist. Insbesondere, sehen wir, dass Prokhorovs Theorem für kompakte, metrische Räume gilt.

Für allgemeine Räume separable, metrische Räume wählen wir folgende Strategie: Sei $\Gamma \subset \mathcal{P}(M)$ eine gleichmäßig straffe Menge. Dann gibt es eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen $K_n \subset K_{n+1}$, so dass für alle $\mu \in \Gamma$

$$\mu(M \backslash K_n) < \frac{1}{n}.$$

Sei $(\mu_m)_{m\in\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Γ. Wir konstruieren eine konvergente Teilfolgen von μ_m wie folgt: "$n = 1$": Da K_1 kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(\mu^1_{m^1_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $((\mu_m)|_{K_1})_{m\in\mathbb{N}}$. Es sei angemerkt, dass $\mu^1_{m^1_k}(M\backslash K_1) = 0$. Angenommen für $n \in \mathbb{N}$ haben wir eine konvergente Folge $(\mu^n_{m^n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert, so dass $\mu^n_{m^n_k}(M\backslash K_n) = 0$. Definiere

$$\tilde{\mu}^n_{m^n_k} = \mu^n_{m_k} + (\mu_{m_k})|_{K_{n+1}\backslash K_n}$$

dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(\mu^{n+1}_{m^{n+1}_k})$ von $(\tilde{\mu}^{n+1}_{m^{n+1}_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\mu_{m^{n+1}_k}(M\backslash K_{n+1}) = 0$. In jedem Abschnitt sei μ^n der Limes der Folge $(\mu^n_{m^n_k})_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei angemerkt, dass $\mu^l_{m^{n+1}_k} = \mu^n_{m^{n+1}_k}|_{K_l}$ und somit $\mu^l = \mu^n\big|_{K_l}$ für alle $l \leq n$.

Schließlich wählen wir $(\mu_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren ein Maß

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^n|_{K_n\backslash K_{n-1}}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mu(M\backslash K_n) \leq \frac{1}{n}$.

[2] d.h. $\mu : \mathcal{B}_d \to \mathbb{R}$ ist σ-additiv und $\mu(\varnothing) = 0$.

Sei f eine beschränkte und stetige Funktion, dann gilt

$$|\int f d\mu_{m_n} - \int f d\mu| \leq |\int_{K_l} f d\mu_{m_n} - \int_{K_l} f\mu| + |\int_{M\setminus K_l} f d\mu_{m_n}| + |\int_{M\setminus K_l} f\mu|.$$

Auf K_l wissen wir bereits, dass $\mu_{m_n}\big|_{K_l} = \mu^l_{m_n}$, $n \geq l$, gegen $\mu\big|_{K_l}$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} |\int_{K_l} f d\mu_{m_n} - \int_{K_l} f\mu| = \lim_{n\to\infty} |\int_{K_l} f d\mu^l_{m_n} - \int_{K_l} f\mu| = 0.$$

Weiterhin gilt

$$|\int_{M\setminus K_l} f d\mu_{m_n}| + |\int_{M\setminus K_l} f\mu| \leq \frac{2}{l}\|f\|_\infty,$$

so dass

$$\lim_{n\to\infty} |\int f d\mu_{m_n} - \int f d\mu| \leq \frac{2}{l}\|f\|_\infty.$$

Da $l \in \mathbb{N}$ und f beliebig sind, gilt somit für alle $f \in C_b(M)$

$$\int f d\mu_{m_n} \to \int f d\mu.$$

□

Zum Schluss das folgende Korollar, welches aus dem Beweis des Satzes von Prokhorov folgt, wenn man $\mu_n = \mu$ als Folge wählt.

Korollar 2.18. *Für jede $\mu \in \mathcal{P}(M)$ gilt*

$$\mu(U) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \mu(H)$$

wobei $\mathcal{H}$ wie in Lemma 2.14 definiert ist.

Beweis. Wählen wir $\mu_n = \mu$, dann gilt wie im Beweis vom Satz von Prokhorov

$$\alpha(H) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(H) = \mu(H)$$

und

$$\gamma(U) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \alpha(H) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \mu(H).$$

Weil $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen μ konvergiert, gilt $\gamma(U) = \mu(U)$ woraus die Aussage folgt. □

2.4 Das Desintegrationstheorem

Seien $(\mathcal{P}_n)_{n\in I}$ eine Folge von endlichen Partitionen mit $I \subset \mathbb{N}$. Dann definieren wir eine neue Borel-Partition $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ wie folgt

$$\bigvee_{n\in I} \mathcal{P}_n = \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \,|\, E_n \in \mathcal{P}_n \text{ und } \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \varnothing\}.$$

Aus der Definition folgt, dass dies in der Tat eine Partition ist.

Definition 2.19 (Borel-Partition)**.** Ein Partition $\mathcal{P}$ wird Borel-Partition von M genannt, falls es abzählbar viele endliche Partitionen $\mathcal{P}_n$ gibt deren Elemente Borel-Mengen ist und $\mathcal{P} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Es ist leicht zu sehen, dass jede endliche Partition aus Borel-Mengen stets eine Borel-Partition ist. Allgemeine Borel-Partition sind somit mittel endlicher Borel-Partitionen „approximierbar".

Wir verwenden die Definition $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2$, wenn $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2$, d.h. wenn es für jedes $A \in \mathcal{P}_2$ ein $B \in \mathcal{P}_1$ gibt, so dass $A \subset B$. Es lässt sich nun zeigen, dass für $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_\infty \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\bigvee_{n\in I_k} \mathcal{P}_n \preceq \bigvee_{n\in I_{k+1}} \mathcal{P}_n \preceq \bigvee_{n\in I_\infty} \mathcal{P}_n.$$

Ist nun $\mathcal{P} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ mit $\mathcal{P}_n$ endlich, dann sind $\mathcal{P}'_n = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ endlich und es gilt $\mathcal{P}'_i \preceq \mathcal{P}'_j$ falls $i \leq j$ sowie $\mathcal{P} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}'_n$. Aus diesem Grund nehmen wir im folgenden an, dass für jede Borel-Partition $\mathcal{P}$ durch eine aufsteigende Folge von endlichen Borel-Partitionen $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.

Lemma 2.20. *Für jeden separablen metrischen Raum (M, d) ist die Partition $\{\{x\} \,|\, x \in M\}$ eine Borel-Partition.*

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in M, dann gibt eine Folge von $q_m \to 0$, so dass $\mu(\partial B_{q_m}(x_n)) = 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\mathcal{P}'$ wie folgt

$$\mathcal{P}' = \bigvee_{n,m\in\mathbb{N}} \{B_{q_m}(x_n), M\backslash B_{q_m}(x_n)\}.$$

Nach der Definition ist jedes Element $P' \in \mathcal{P}$ messbar. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in M und $q_m \to 0$ gilt außerdem

$$\operatorname{diam} P' = 0,$$

d.h. $P' = \{x'\}$ für eine $x' \in M$.

Sei $x \in M$, dann gilt stets $x \in B_{q_m}(x_n)$ oder $x \in M\backslash B_{q_m}(x_n)$, d.h. es gibt ein $I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass $x \in B_{q_m}(x_n)$ genau dann, wenn $(n, m) \in I_x$.

Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in M ist, gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $(n, m) \in I_x$, woraus wir schließen, dass

$$\{x\} = \bigcap_{(n,m)\in I_x} B_{q_m}(x_n) \cap \bigcap_{(n,m)\notin I_x} M\backslash B_{q_m}(x_n).$$

Dies zeigt insbesondere, dass $\mathcal{P} = \{\{x\} \,|\, x \in M\}$. $\square$

Korollar 2.21. *Sei $\pi : M \to N$ eine Borel-Funktion zwischen zwei separablen, metrischen Räumen. Dann ist*

$$\mathcal{P} = \{\pi^{-1}(y) \,|\, y \in N\}$$

eine Borel-Partition.

Beweis. Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in N und $\nu = \pi_*\mu$. Dann gibt es eine $q_m \to 0$, so dass $\nu(\partial B_{q_m}(y_n)) = 0$ und

$$\mathcal{P}' = \{\{y\} \,|\, y \in N\} = \bigvee_{n,m\in\mathbb{N}} \{B_{q_m}(y_n), M\backslash B_{q_m}(y_n)\}$$

und somit

$$\pi^{-1}\mathcal{P}' = \bigvee_{n,m} \{\pi^{-1}(B_{q_m}(y_n)), \pi^{-1}(M\backslash B_{q_m}(y_n))\}$$

eine μ-messbare Partition.

Für $y \in N$ sei $I_y \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wie im vorigen Beweis. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\{y\}) &= \pi^{-1}\left(\bigcap_{(n,m)\in I_x} B_{q_m}(x_n) \cap \bigcap_{(n,m)\notin I_x} M\backslash B_{q_m}(x_n)\right)\\ &= \bigcap_{(n,m)\in I_x} \pi^{-1}(B_{q_m}(x_n)) \cap \bigcap_{(n,m)\notin I_x} \pi^{-1}(M\backslash B_{q_m}(x_n)).\end{aligned}$$

D.h.

$$\pi^{-1}\mathcal{P}' = \{\pi^{-1}(y) \,|\, y \in N\}.$$

□

Im folgenden nehmen wir stets an, dass $\mathcal{P} = \pi^{-1}\mathcal{P}'$ für eine Borel-Abbildung $\pi : M \to N$.

Sei nun μ ein endliches Maß, $\nu = \pi_*\mu$ und K eine kompakte Menge. Setzte $\mathcal{P}_0' = \{\varnothing, N\}$ und definiere

$$\varphi_n^K(y) = \begin{cases} \frac{\mu(K\cap\pi^{-1}(P))}{\nu(P)} & y \in P \in \mathcal{P}_n' \text{ mit } \nu(P) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Bemerkung. Die Funktionen φ_n^K können auch als Martingale bzgl. der σ-Algebren $\mathscr{P}_n = \sigma(\mathcal{P}_n')$ interpretiert werden, d.h. $\varphi_n^K = \mathbb{E}_\mu(\varphi_0|\mathscr{P}_n)$. Da φ_n^K beschränkt und in $L^1(\nu)$ ist, gibt es nach dem Martingalkonvergenzsatz somit eine L^1-Funktion φ_∞^K, so dass $\varphi_n^K \to \varphi_\infty$ fast überall. Im folgenden wollen wir dies direkter zeigen.

Lemma 2.22 (Martingale-Stopsatz)**.** *Es gibt eine Menge $\Omega \subset N$ vollen ν-Maßes, so dass es eine Borel Funktion $\varphi^K : M \to [0,1]$ gibt mit $\varphi_n^K(y) \to \varphi^K(y)$ für all $z \in \Omega$.*

Beweis. [3] Für $\alpha < \beta$ definiere

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in N \mid \liminf_{n\to\infty} \varphi_n^K(z) < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty} \varphi_n^K(z)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\{\varphi_n^K(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert genau dann, wenn es rationale $\alpha < \beta$, so dass $z \in S(\alpha, \beta)$. D.h. es genügt zu zeigen, dass $S(\alpha, \beta)$ eine messbare μ-Nullmenge ist.

Zunächst gilt

$$N_\alpha = \{z \in N \mid \liminf_{n\to\infty} \varphi_n^K(z) < \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{z \in M \mid \varphi_m^K(z) < \alpha\}$$
$$N_\beta = \{z \in N \mid \limsup_{n\in\infty} \varphi_n^K(z) > \beta\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{z \in M \mid \varphi_m^K(z) > \beta\}.$$

D.h. $S(\alpha, \beta)$ ist der Durchschnitt zweier messbaren Mengen und deshalb selbst messbar.

Wir konstruieren induktiv zwei Folgen $(a_i : N \to \mathbb{N})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i : N \to \mathbb{N})_{i\in\mathbb{N}}$ wie folgt: Für $z \notin N_\alpha \cap N_\beta$ setze $a_i(z) = b_i(z) = 1$. Falls $z \in N_\alpha \cap N_\beta$, setze Sei $b_0(z) \equiv 0$ und definiere $a_i(z)$ und $b_i(z)$ als

$$a_i(z) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > b_{i-1}, \varphi_n^K(z) < \alpha\}$$
$$b_i(z) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > a_i, \varphi_n^K(z) > \beta\}.$$

Somit sind a_i und b_i messbare Funktionen mit $a_i < b_i < a_{i+1}$, so dass

$$\varphi_{a_i}^K(z) < \alpha \quad \text{und} \quad \varphi_{b_i}^K(z) > \beta.$$

Sei $P_i^a(z)$ das Partitionselement von $\mathcal{P}_{a_i(z)}$, welches z enthält. Analog sei $P_i^b(z)$ definiert. Aus der Definition folgt, dass $a_i(z') = a_i(z)$ für alle $z' \in P_i^a(z)$. Insbesondere sind die Mengen

$$A_i = \bigcup_{z\in S(\alpha,\beta)} P_i^a(z)$$
$$B_i = \bigcup_{z\in S(\alpha,\beta)} P_i^b(z).$$

messbar sind und es gilt stets $S(\alpha, \beta) \subset A_{i+1} \subset B_i \subset A_i$ und

$$S(\alpha, \beta) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

Weiterhin gilt $P_i^a(z) \cap P_i^a(z') = \varnothing$ oder $P_i^a(z) = P_i^a(z')$, so dass wir eine Partition $\mathcal{P}_{A_i}$ von A_i finden so dass

$$\mu(K \cap A_i) = \sum_{P_i^a(z)\in\mathcal{P}_{A_i}} \mu(K \cap \pi^{-1} P_i^a(z))$$
$$< \alpha \sum_{P_i^a(z)\in\mathcal{P}_{A_i}} \nu(P_{a_i}(z)) = \alpha\nu(A_i).$$

[3] Der folgende Beweis ist Viannas „Disintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem" `http://w3.impa.br/~viana/out/rokhlin.pdf` entnommen.

Und analog

$$\mu(K \cap B_i) > \beta\nu(B_i).$$

Somit gilt

$$\beta\nu(B_i) < \mu(K \cap B_i) \leq \mu(K \cap A_i) < \alpha\nu(A_i)$$

und deshalb

$$\beta\nu(S(\alpha, \beta)) \leq \alpha\nu(S(\alpha, \beta)),$$

was nur wahr sein kann, wenn $\nu(S(\alpha, \beta)) = 0$. □

Im folgenden wollen wir $(K, y) \mapsto \varphi_n^K(y)$ nicht als Folge von Funktionen von y betrachten, sondern als Folge Maßen

$$B \mapsto \mu_{y,n}(K) = \varphi_n^B(y).$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mu_{y,n}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Außerdem gilt

$$\mu(B) = \int \mu_{y,n}(B) d\nu(y).$$

Wählen wir nun $\mathcal{H}$ wie in Lemma 2.14, so können wir aufgrund der Abzählbarkeit von $\mathcal{H}$ eine Mengen $\Omega \subset N$ vollen Maßes finden, so dass $y \mapsto \mu_{y,n}(H)$ für alle $H \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nennen wir diesen Grenzwert $y \mapsto \alpha_y(H)$, so reicht es wie im Beweis vom Satz von Prokhorov aus den α_y Maße μ_y zu generieren für die gilt $\mu(B) = \int \mu_y(B) d\nu(y)$.

Theorem 2.23 (Rokhlins Desintegrationstheorem). *Sei (M, d) und (N, d') vollständige, separable, metrische Räume, μ eine endliches Maß auf M und $\pi : M \to N$ eine Borel-Funktion. Dann gibt es eine Funktion $\mu_{(\cdot)} : N \to \mathcal{P}(M)$, so dass für alle Borel-Mengen B*

$$y \mapsto \mu_y(B)$$

messbar ist, $\mu_y(\pi^{-1}(y)) = 1$ und für $\nu = \pi_*\mu$ gilt

$$\mu(B) = \int \mu_y(B) d\nu(y).$$

Weiterhin ist die Darstellung eindeutig bis auf ein ν-Nullmenge.

Bemerkung. (1) Für $\mathrm{id} : M \to M$ besagt das Theorem

$$\mu = \int \delta_y d\mu(y).$$

(2) Ist π ein endliches Maß auf $M \times M$ und p_1 die Projektion auf die erste Koordinate, dann gilt

$$\pi = \int \pi_y d\mu(y)$$

wobei $\mu = (p_1)_*\pi$. Außerdem gilt $\pi_y(\{y\} \times M) = 1$, d.h. $\pi_y = \delta_y \times \mu_y$ für ein $\mu_y \in \mathcal{P}(M)$.

(3) Der Satz gilt auch für allgemeine Borel-Partitionen. In dem Fall zeigt man zunächst, dass $N = M/\mathcal{P}$ ein messbarer Borel-Raum und die natürliche Projektion $\pi : M \to M/\mathcal{P}$ messbar ist. Die Desintegration wird dann über das Maß $\nu = \pi_*\mu$ vorgenommen.

Beweis. Sei $\mathcal{P} = \pi^{-1}\{\{y\} \,|\, y \in N\}$ die Borel-Partition bzgl. der Abbildung $\pi : M \to N$ und nehme an, dass $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von endlichen Borel-Partitionen mit $\mathcal{P} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ ist.

Sei $\mathcal{H}$ wie im Beweis des Prokhorov Theorems wobei K_i die Mengen bzgl. μ sind. Sei $H_1, H_2 \ldots$ eine Aufzählung $\mathcal{H}$. Das vorige Lemma zeigen, dass es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Menge Ω_i volle ν-Maßes gibt, so dass für all $y \in \Omega_i$ die Folge $(\varphi_{y,n}(H_i))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Da $\mathcal{H}$ abzählbar ist, hat die Menge $\Omega = \cap_{i\in\mathbb{N}}\Omega$ volles ν-Maß und für all $y \in \Omega$ und all $H \in \mathcal{H}$ gilt ist die Folge $(\varphi_{y,n}(H_i))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wir ändern nun die Notation wie folgt: für $B \in \mathcal{B}_d(M)$ und $y \in N$, sei $P_n(y)$ das Element in $\mathcal{P}_n$, welches y enthält. Definiere dann $\mu_{y,n}(B)$ wie folgt

$$\mu_{y,n}(B) = \varphi_n^B(y) = \begin{cases} \frac{\mu(B\cap\pi^{-1}(P_n(y)))}{\nu(P_n(y))} & \nu(P_n(y)) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir verfahren für $H \in \mathcal{H}$ und $y \in \Omega$ wie im Beweis vom Satz von Prokhorov, d.h. definiere zunächst

$$\alpha_y(H) = \lim_{n\in\infty} \mu_{y,n}(H).$$

Dann ist $H \mapsto \alpha_y(H)$ subadditiv und additiv auf disjunkten Mengen von $\mathcal{H}$ sind. Setze dann

$$\gamma_y(U) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \alpha_y(H).$$

Daraus folgt, dass μ_y definiert auf $\mathcal{B}_d(M)$ als

$$\mu_y(B) = \inf_{B\subset U} \gamma_y(U)$$

ein Borel-Maß ist. Da $\mu_{y,n}(M) = 1$ gilt auch $\mu_y(M) = 1$. Weiterhin gilt für $y \in \Omega$, $P_n(y) \in \mathcal{P}_n$ und $m \geq n$ stets

$$\mu_{y,m}(\pi^{-1}(P_n(y))) = 1$$

so dass

$$\mu_y(\pi^{-1}(\{y\})) = \mu_y(\pi^{-1}(\cap_{n\in\mathbb{N}} P_n(y))) = 1.$$

Zusammengefasst heißt das, dass für fixes $y \in \Omega$ die Folge $(\mu_{y,n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen μ_y konvergiert. Setzen wir $\mu_y = \mu$ für $y \notin \Omega$,dann ist für jede Borel-Menge

$$y \mapsto \mu_y(B)$$

messbar als Abbildung $N \to [0, 1\}$. und man erählt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mu}$, geschrieben als $\int \mu_y d\nu(y)$, so dass

$$\tilde{\mu}(B) = \int \mu_y(B) d\nu(y).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\mu}$ gleich μ ist. Dazu sei U eine offene Menge, dann gilt wegen $\mu(U) = \int \mu_{y,n}(U)d\nu(y)$ und Fatous Lemma

$$\begin{aligned}\int \mu_y(U)d\nu(y) &\leq \int \liminf_{n\to\infty} \mu_{y,n}(U)d\nu(y)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \int \mu_{y,n}(U)d\nu(y) = \mu(U).\end{aligned}$$

Für die umgekehrte Richtung bemerke zunächst, dass

$$\alpha_y(H) = \lim_{n\to\infty} \mu_{y,n}(H) \leq 1$$

für all $H \in \mathcal{H}$ und ν-fast all $y \in N$, so dass aufgrund der Satz der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\mu(H) &= \lim_{n\to\infty} \int \mu_{y,n}(H)d\nu(y)\\ &= \int \alpha_y(H)d\nu(y).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt stets

$$\mu_y(U) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \alpha_y(H)$$

und

$$\mu(U) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \mu(H),$$

so dass

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \mu(H)\\ &= \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \int \alpha_y(H)d\nu(y)\\ &\leq \int \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset U} \alpha_y(H)d\nu(y) = \int \mu_y(U)d\nu(y).\end{aligned}$$

Somit stimmen μ und $\tilde{\mu} = \int \mu_y d\nu(y)$ auf den offenen Mengen überein. Aufgrund der äußeren Regularität folgt somit $\mu = \int \mu_y d\nu(y)$. □

Eine Funktion $\varphi : N \to \mathbb{R}$ wird ν-messbar genannt, wenn es eine Borel-Funktion $\psi : N \to \mathbb{N}$ und eine Borel-Menge B mit $\nu(M\backslash B) = 0$ gibt, so dass $\varphi(y) = \psi(y)$ für alle $y \in B$. Ist ν endlich und φ von oben und unten beschränkt, so definieren wir das Integral von φ bzgl. ν als

$$\int \varphi d\nu := \int \psi d\nu.$$

Es ist leicht zu sehen, dass der Wert von $\int \varphi d\nu$ nicht von der Wahl von ψ abbhängt.

Lemma 2.24. *Seien (M, d) und (N, d') separable, vollständige, metrische Räume, ν ein endliches Maß auf N und $\mu_{(\cdot)} : N \to \mathcal{P}(M)$ eine messbare Abbildung. Dann ist für jede Borel-Menge $A \in M$ die Funktion*

$$y \mapsto \mu_y(A)$$

ν-messbar.

Beweis. Für abgeschlossene C ist die Abbildung

$$\pi_C : \mu \mapsto \mu(C)$$

oberhalbstetig. Insbesondere ist sie messbar. Daraus folgt, dass

$$y \mapsto \mu_y(C) = \pi_C \circ \mu_y$$

messbar ist. Analog ist $y \mapsto \mu_y(U)$ messbar für jede offene Menge U.

Wir behaupten, dass $y \mapsto \mu_y(A)$ ν-messbar ist für alle Borel-Mengen A. Dazu seien $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ absteigende Folgen von offenen Mengen, die A bzw. $M\backslash A$ enthalten, so dass

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) \\
\mu(M\backslash A) &= \lim_{n\to\infty} \mu(V_n).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \mu(A) + \mu(M\backslash A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int \mu_{y,m}(U_n) + \mu_{y,m}(V_n) d\nu(y) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \int \mu_y(U_n) + \mu_y(V_n) d\nu(y) \\
&= \int \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) + \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n) d\nu(y) \\
&\geq \int \mu_y(M) d\nu(y) = 1.
\end{aligned}$$

Da

$$1 \leq \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) + \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n)$$

gibt es somit ein B mit $\nu(M\backslash B) = 0$, so dass für alle $y \in B$

$$\mu_y((\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n)) = 0.$$

Insbesondere gilt dann

$$0 \leq \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \backslash A) \leq \mu_y((\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n)) = 0,$$

woraus folgt, dass für alle $y \in B$

$$\mu_y(A) = \mu_y(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_y(U_n).$$

Damit ist die folgende Funktion

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} \mu_y(A) & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases}$$

eine Borel-Funktion, die auf B mit $y \mapsto \mu_y(A)$ übereinstimmt. $\square$

3 Das Monge-Kantorovich-Problem

Im folgenden sei $c : M \times M \to [0, \infty)$ eine unterhalbstetige Funktion. Die Theorie gilt auch für unterhalbstetige Kostenfunktionen $c : M \times M' \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wenn es für die gegebenen Maße μ und ν (oberhalb-)stetige Funktionen $a \in L^1(\mu)$ und $b \in L^1(\nu)$ gibt, so dass $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$ für alle $x \in M$ und $y \in M'$. In dem Fall zeigt man, dass das Original-Problem für μ und ν äquivalent zum Problem der nicht-negativen Kostenfunktion $\tilde{c} - a - b$ ist.

3.1 Transportabbildungen

Sei $T : M \to M$ eine Borel-Funktionen. Dann ist das Push-Forward-Maß $T_*\mu$ definiert als

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A).$$

Allgemeiner sieht man, dass T_* die Menge $\mathcal{P}(M)$ in sich abbildet.

Lemma 3.1. *Es gilt $\nu = T_*\mu$ genau dann, wenn für alle Borel-Funktionen*

$$\int f \circ T d\mu = \int f d\nu.$$

Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. Ist weder μ eine Push-Forward-Maß von ν noch ist ν ein Push-Forward-Maß vn ν. Interpretiert man μ als Haufen von „Sandkörnern“ und T also Transportabbildung, so stellt $T_*\mu$ „den Sandhaufen“ dar, welchen man durch den Transport von μ mittels T erhält. A priori ist es nicht klar, ob (μ-fast) jedes Sandkorn genau einem Sandkorn zugeordnet werden kann. D.h. allgemein muss man ein gegebenes Sandkorn „verteilen“, d.h. jedem x wird eine Verteilung (Wahrscheinlichkeitsmaß) zugeordnet.

Die obige vage Interpretation kann wie folgt konkretisiert werden.

Lemma 3.2. *Angenommen für jedes $x \in M$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_x, so dass die Funktion*

$$x \mapsto \mu_x(U)$$

messbar ist für alle offenen Mengen U. Dann erhält man für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß wie folgt

$$\nu(A) = \int \mu_x(A) d\mu(x).$$

Korollar 3.3. *Für jede Transportabbildung ist $x \mapsto \delta_{T(x)}$ messbar im obigen Sinne und es gilt*

$$T_*\mu(A) = \int \delta_{T(x)}(A) d\mu(x).$$

Aus diesem Grund sagen wir, dass $x \mapsto \mu_x$ eine *verallgemeinerte Transportabbildung*[1] ist.

Es sei angemerkt, dass wenn $x \mapsto \mu_x^0$ und $x \mapsto \mu_x^1$ verallgemeinerte Transportabbildungen sind, dann ist für jedes $\lambda \in [0,1]$ die folgende Abbildung $\mu_{(\cdot)}^\lambda$

$$\mu_{(\cdot)}^\lambda : x \mapsto (1-\lambda)\mu_x^0 + \lambda\mu_x^1$$

ebenfalls eine verallgemeinerte Transportabbildung.

Lemma 3.4. *Für $\lambda \in (0,1)$ ist $\mu_{(\cdot)}^\lambda$ eine Transportabbildung genau dann, wenn $\mu_{(\cdot)}^0 = \mu_{(\cdot)}^1$ eine Transportabbildung ist.*

3.2 Kopplungen

Sei nun $\pi \in \mathcal{P}(M \times M)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $p_1, p_2 : M \times M \to M$ die natürlichen Projektionen auf die Faktoren, d.h. $p_1 : (x,y) \mapsto x$ und $p_2 : (x,y) \mapsto y$. Wir sagen π ist eine *Kopplung zwischen μ und ν*, wenn $\mu = (p_1)_*\pi$ und $(p_2)_*\pi$. Die Menge der Kopplungen zwischen μ und ν wird mit $\Pi(\mu,\nu)$ bezeichnet. Die Menge $\Pi(\mu,\nu)$ ist stets nicht leer und enthält das Produktmaß $\mu \otimes \nu$, wobei

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

für alle Borel-Mengen $A, B \in \mathcal{B}_d$.

Zunächst lässt sich zeigen, dass die Bedingung der Koppelung äquivalent zum folgenden ist: Für alle Borel-Mengen $A, B \in \mathcal{B}_d$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \pi(A \times M) \\ \nu(B) &= \pi(M \times B). \end{aligned}$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(\mu,\nu)$ und $\lambda \in [0,1]$, dann gilt

$$(1-\lambda)\pi_1 + \lambda\pi_2 \in \Pi(\mu,\nu),$$

d.h. $\Pi(\mu,\nu)$ ist konvex bzgl. linearer Interpolation.

Satz 3.5. *Seien Γ_1 und Γ_2 zwei kompakte Mengen in $\mathcal{P}(M)$. Dann ist die Menge der Kopplung zwischen Γ_1 und Γ_2*

$$\Pi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \bigcup_{\mu_i \in \Gamma_i} \Pi(\mu_1, \mu_2)$$

kompakt.

[1] *Dieser Begriff ist nicht standard und kann mit eventuell anderen Begriffen kollidieren.*

Beweis. Gilt $\pi_n \rightharpoonup \pi$, dann auch $(p_i)_*\pi_n \rightharpoonup (p_i)_*\pi$. Da Γ_i, $i \in \{1;2\}$, ist $\Pi(\Gamma_1, \Gamma_2)$ abgeschlossen. Nach Prokhorovs Theorem genügt es zu zeigen, dass $\Pi(\Gamma_1, \Gamma_2)$ straff ist. Für $\epsilon > 0$ seien K und K' kompakte Mengen, so dass für alle $\mu \in \Gamma_1$ und $\nu \in \Gamma_2$

$$\mu(K), \nu(K') \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann ist $K \times K'$ kompakt in $M \times M$ und es gilt für $\pi \in \Pi(\Gamma_1, \Gamma_2)$

$$\begin{aligned} \pi(M \times M \backslash K \times K') &\leq \pi((M \backslash K) \times M) + \pi(M \times (M \backslash K')) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Eine Kopplung π zwischen μ und ν ist *deterministisch*, wenn es eine Borel-Abbildung T gibt, so dass

$$\pi = (\mathrm{id} \times T)_* \mu.$$

In dem Fall ist π auf dem Graphen $\{(x, T(x)) \,|\, x \in M\}$ konzentriert und es gilt $\nu = T_*\mu$. In diesem Fall gilt auch

$$\pi = \int \delta_x \otimes \delta_{T(x)} d\mu(x),$$

d.h. jeder deterministische Kopplung ist eine Integral über $\delta_x \otimes \delta_{T(x)}$.

Das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ hat die folgende Form

$$\mu \otimes \nu = \int \delta_x \otimes \nu d\mu(x) = \int \mu \otimes \delta_y d\nu(y),$$

d.h. jedes Produktmaß ist ein Integral über das Produktmaß $\delta_x \otimes \nu$. Rokhlins Desintegrationstheorem zeigt nun, dass eine solche Darstellung für alle Kopplungen gilt, d.h. jede Kopplung ist durch verallgemeinerte Transportabbildungen darstellbar.

Korollar 3.6. *Für jede Kopplung $\Pi(\mu, \nu)$ gibt es eine verallgemeinerte Transportabbildungen $x \mapsto \mu_x$, so dass*

$$\pi = \int \delta_x \otimes \mu_x d\mu(x).$$

Die verallgemeinerte Transportabbildung ist eindeutig bis auf eine μ-Nullmenge.

Beweis. Da $p_1 : M \times M \to M$ stetig und somit messbar ist und $(p_1)_*\pi = \mu$ gibt es $\pi_x \in \mathcal{P}(M \times M)$, so dass

$$\pi = \int \pi_x d\mu(x)$$

und

$$\pi_x(\{x\} \times M) = 1$$

d.h. $\pi_x = \delta_x \otimes \mu_x$ für ein $\mu_x \in \mathcal{P}(M)$. Daraus folgt

$$\pi = \int \pi_x d\mu(x) = \int \delta_x \otimes \mu_x d\mu(x).$$

□

3.3 Existenz und Eigenschaften optimaler Kopplungen

Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße und $c : M \times M \to [0, \infty)$ eine unterhalbstetige Kostenfunktion.

Das *Monge-Problem* versucht nun die Kosten mittels Transportabbildungen zwischen μ und ν zu minimierten, d.h. zeige, dass

$$\inf_{T_*\mu=\nu} \int c(x, T(x)) d\mu(x)$$

tatsächlich ein Minimum ist. Im allgemeinen gibt es keine Transportabbildung $T : M \to M$ mit $T_*\mu = \nu$, so dass das Problem nur auf solche angewandt werden kann. Weiterhin ist es nicht klar, ob jede minimierende Folge von Transportabbildungen eine konvergierende Teilfolge hat.

Statt über Transportabbildungen zu minimieren, können wir über verallgemeinerte Transportabbildungen minimieren, oder äquivalent über Kopplungen zwischen μ und ν, d.h. finde eine *optimale Kopplung* $\pi_{opt} \in \Pi(\mu, \nu)$, so dass

$$\int c(x, y) d\pi_{opt}(x, y) = C(\mu, \nu)$$

wobei

$$C(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int c(x, y) d\pi(x, y).$$

Dieses Problem wird *Kantorovich-Problem* genannt. Im zweiten Schritt kann man nun fragen, ob es eine optimale Kopplung gibt, die deterministisch ist, d.h. durch eine Transportabbildung induziert. In diesem Fall wäre auch das Monge-Problem lösbar.

Theorem 3.7. *Das Kantorovich-Problem mit unterhalbstetiger nicht-negativer Kostenfunktion ist für alle Maße μ und ν lösbar.*

Beweis. Da $\Pi(\mu, \nu)$ nicht-leer, gibt es eine minimierende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int c(x, y) d\pi_n(x, y) = C(\mu, \nu).$$

Nach Prokhorovs Theorem ist $\Pi(\mu, \nu)$ auch kompakt, so dass es eine Teilfolge von $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir diese Teilfolge und nehmen an, dass $\pi_n \to \tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$.

Da c unterhalbstetig und nicht-negativ ist, erhalten wir

$$C(\mu, \nu) \leq \int c(x, y) d\tilde{\pi}(x, y) \leq \liminf \int c(x, y) d\pi_n(x, y) = C(\mu, \nu).$$

Insbesondere gilt

$$\int c(x, y) d\tilde{\pi}(x, y) = C(\mu, \nu),$$

so dass $\tilde{\pi}$ eine optimale Kopplung ist. $\square$

Angenommen π^0 und π^1 sind optimale Kopplungen zwischen μ und ν. Dann ist auch jede Kopplung

$$\pi^\lambda = (1-\lambda)\pi^0 + \lambda\pi^1$$

eine optimale Kopplung.

Im allgemeinen ist es weder klar, dass es eine eindeutige Lösung des Kantorovich-Problems gibt. Es gilt jedoch das folgende.

Lemma 3.8. *Angenommen für fixes Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, ist jede optimale Kopplung π_{opt} deterministisch. Dann ist das Kantorovich- und Monge-Problem eindeutig lösbar, d.h. es gibt eine eindeutige optimale Kopplung, die auch deterministisch ist.*

Beweis. Seien $\pi^0, \pi^1 \in \Pi(\mu, \nu)$ zwei optimale Kopplungen, so dass

$$\pi^i = \int \delta_x \otimes \delta_{T^i(x)} d\mu(x) \quad \text{für } i \in \{0; 1\}.$$

Dann ist auch

$$\pi^{\frac{1}{2}} = \int \delta_x \otimes \frac{1}{2}(\delta_{T^0(x)} + \delta_{T^1(x)}) d\mu(x)$$

eine optimale Kopplung zwischen μ und ν. Aufgrund der Annahme ist auch $\pi^{\frac{1}{2}}$ deterministische, d.h.

$$\int \delta_x \otimes \frac{1}{2}(\delta_{T^0(x)} + \delta_{T^1(x)}) d\mu(x) = \int \delta_x \otimes \delta_{T^{\frac{1}{2}}(x)} d\mu(x).$$

Die ist jedoch nur möglich, wenn

$$\mu(\{T^0 \neq T^1\}) = 0,$$

d.h. $\pi^0 = \pi^1$. □

Ist eine Kopplung kein Delta-Maß, so ist sie zerlegbar. Normalisiert man die Teile einer solche Zerlegung, so kann man zeigen, dass jedes Teil ebenfalls optimal bzgl. seiner Marginale sein.

Theorem 3.9 (Einschränkungseigenschaft)**.** *Sei π_{opt} eine optimale Kopplung zwischen μ und ν und $A \subset M \times M$ eine Menge mit $\pi_{opt}(A) \neq 0$, dann ist*

$$\pi' = \frac{1}{\pi(A)} \pi_A$$

eine optimale Kopplung zwischen $\mu' = (p_1)_* \pi'$ und $\nu' = (p_2)_* \pi'$.

Bemerkung. Allgemeiner gilt: Sei $f : M \times M \to [0, \infty]$ eine nicht-negative Borel-Funktion mit $0 < \int f d\pi_{opt} < \infty$, dann ist π' definiert als

$$\pi'(B) = \frac{1}{\int f d\pi_{opt}} \int_B f d\pi_{opt} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}_d$$

eine optimale Kopplung bzgl. seiner Marginale.

Beweis. Falls $\pi_{opt}(A) = 1$, dann $\pi' = \pi_{opt}$ und die Aussage ist trivial.

Sei nun $\pi_{opt}(A) \in (0,1)$. Aufgrund der Normalisierung sind μ' und ν' Wahrscheinlichkeitsmaße. Sei π'_{opt} eine optimale Kopplung seiner Marginale μ' und ν'. Setze $\lambda = \pi_{opt}(A)$ und

$$\pi'' = \frac{1}{1-\lambda}\pi_{M^2\setminus A}.$$

Dann lässt sich leicht zeigen, dass

$$\pi = \lambda\pi' + (1-\lambda)\pi''$$

eine Kopplung zwischen μ und ν ist, weshalb folgende Ungleichungskette gilt

$$\begin{aligned}
C(\mu,\nu) &\leq \lambda \int c(x,y)d\pi'_{opt}(x,y) + (1-\lambda)\int c(x,y)d\pi''(x,y) \\
&\leq \lambda \int c(x,y)d\pi'(x,y) + (1-\lambda)\int c(x,y)d\pi''(x,y) \\
&= C(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann

$$\int c(x,y)d\pi'(x,y) = \int c(x,y)d\pi'_{opt}(x,y),$$

d.h. π' ist eine optimale Kopplung. □

4 Kantorovich-Dualität

In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, dass (M, d) eine separabler, vollständiger, metrischer Raum ist und

$$c : M \times M \to [0, \infty]$$

eine unterhalbstetige Kostenfunktion ist.

4.1 c-konkave Funktionen und die verallgemeinerte Legrendre-Transformation

Definition 4.1 (c-Transformation und c-Konkavität)**.** Sei $\zeta : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $\zeta \not\equiv -\infty$. Dann ist die c-Transformation ζ^c von ζ definiert als

$$\zeta^c(y) = \inf_{x \in M} c(x, y) - \zeta(x).$$

Für $\xi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist die $\bar{c}$-Transformation $\xi^{\bar{c}}$ von ξ definiert als

$$\xi^{\bar{c}}(x) = \inf_{y \in M} c(x, y) - \xi(y).$$

Eine Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist c-konkav, wenn sie die $\bar{c}$-Transformation einer Funktion $\xi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist, d.h. $\varphi = \xi^{\bar{c}}$. Analog wird ψ $\bar{c}$-konkav genannt, wenn $\psi = \zeta^c$ für eine Funktion $\zeta : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Bemerkung. Ist $\zeta \not\equiv -\infty$, so ist ζ^c eine Funktion von M nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und es gilt

$$\zeta^c(y) = \inf_{x \in M, \zeta(x) > -\infty} c(x, y) - \zeta(x).$$

Lemma 4.2. *Es gilt* $\varphi(x) + \varphi^c(y) \leq c(x, y)$.

Beweis. Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi^c(y) &= \inf_{\tilde{x} \in M} (c(\tilde{x}, y) - \varphi(\tilde{x}) + \varphi(x)) \\ &\leq c(x, y) - \varphi(x) + \varphi(x) = c(x, y). \end{aligned}$$

□

Da das Infimum stetiger Funktionen oberhalbstetig ist, erhalten wir auch die folgende Aussage.

Lemma 4.3. *Ist c stetig, dann ist die c-Transformation jeder Funktion ist oberhalbstetig.*

Lemma 4.4. *Seien $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi} : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zwei Funktionen auf M. Dann sind die folgenden Aussagen wahr:*

- *Wenn $\varphi \leq \tilde{\varphi}$ und $\psi \leq \tilde{\psi}$, dann $\varphi^c \geq (\tilde{\varphi})^c$ und $\psi^{\bar{c}} \geq (\tilde{\psi})^{\bar{c}}$.*
- *$\psi^{\bar{c}c\bar{c}} = \psi^{\bar{c}}$ und $\varphi^{c\bar{c}c} = \varphi^c$*
- *φ ist c-konkav genau dann, dann wenn $\varphi = \varphi^{c\bar{c}}$. Analog ist ψ $\bar{c}$-konkave genau dann, wenn $\psi = \psi^{\bar{c}c}$.*

Beweis. Sei $\varphi \leq \psi$, dann gilt

$$\varphi^c(y) = \inf_{x \in M} c(x,y) - \varphi(x) \geq \inf_{x \in M} c(x,y) - \psi(x) = \psi^c(y).$$

Analog gilt $\varphi^{\bar{c}} \geq \psi^{\bar{c}}$.

Die Funktion $\psi^{\bar{c}c\bar{c}}$ hat die folgende Form

$$\psi^{\bar{c}c\bar{c}}(x) = \inf_{y \in M} \sup_{\tilde{x} \in M} \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,y) - c(\tilde{x},y) + c(\tilde{x},\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}).$$

Wählt man zunächst $y = \tilde{y}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{c}c\bar{c}}(x) &\leq \sup_{\tilde{x} \in M} \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,\tilde{y}) - c(\tilde{x},\tilde{y}) + c(\tilde{x},\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) \\ &= \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) = \psi^{\bar{c}}(x). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{x} \in M} \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,y) - c(\tilde{x},y) + c(\tilde{x},\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) &\geq \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,y) - c(x,y) + c(x,\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) \\ &= \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) = \psi^{\bar{c}}(x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{c}c\bar{c}}(x) &= \inf_{y \in M} \sup_{\tilde{x} \in M} \inf_{\tilde{y} \in M} c(x,y) - c(\tilde{x},y) + c(\tilde{x},\tilde{y}) - \psi(\tilde{y}) \\ &\geq \inf_{y \in M} \psi^{\bar{c}}(x) = \psi^{\bar{c}}(x). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies $\psi^{\bar{c}c\bar{c}} = \psi^{\bar{c}}$.

Ist φ eine c-konkave Funktion, so gibt es eine Funktion $\zeta : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, so dass $\varphi = \zeta^{\bar{c}}$. Zusammen mit der vorigen Aussage ergibt dies

$$\varphi^{c\bar{c}} = \zeta^{\bar{c}c\bar{c}} = \zeta^{\bar{c}} = \varphi.$$

Die Rückrichtigung folgt bereits aus der Definition.

Analog gilt für alle Funktion φ und ψ,

$$\varphi^{c\bar{c}c} = \varphi^c$$

und $\psi^{\bar{c}c} = \psi$ genau dann, wenn ψ $\bar{c}$-konkav ist. $\square$

Ist φ eine c-konkave Funktion, dann nennen wir φ^c die c-Dualfunktion von φ. Es ist leicht zu sehen, dass die c-Dualfunktion φ^c eine c-konkaven Funktion $\bar{c}$-konkave ist. Weiterhin gilt für alle $x, y \in M$

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) \leq c(x, y).$$

Definition 4.5 (c-Superdifferential)**.** Das c-Superdifferential $\partial^c\varphi$ eine Funktion ist gegeben durch

$$\partial^c\varphi(x) = \{y \in M \,|\, \exists\lambda_0 \in \mathbb{R}\forall x' \in M : \varphi(x) = c(x, y) - \lambda_0, \varphi(x') \leq c(x', y) - \lambda_0\}.$$

Wir definieren außerdem $\partial^c\varphi \subset M \times M$ als

$$\partial^c\varphi = \{(x, y) \in M \times M \,|\, y \in \partial^c\varphi(x)\}.$$

Analog kann das $\bar{c}$-Superdifferential $\partial^{\bar{c}}\psi$ definiert werden.

Lemma 4.6. *Ist φ c-konkave so gilt*

$$\begin{aligned} y \in \partial^c\varphi(x) &\iff x \in \partial^{\bar{c}}\varphi^c(y) \\ &\iff \varphi(x) + \varphi^c(y) = c(x, y). \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt stets

$$\varphi(x') + \varphi^c(y') \leq c(x', y') \quad \forall x', y' \in M$$

Gilt

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) = c(x, y)$$

dann folgt sofort $y \in \partial^c\varphi(x)$ und $x \in \partial^{\bar{c}}\varphi^c(y)$.

Sei nun $y \in \partial^c\varphi(x)$. Dann gibt es ein λ_0, so dass

$$\varphi(x') \leq c(x', y) - \lambda_0$$

und

$$\varphi(x) = c(x, y) - \lambda_0.$$

Aus der Definition von φ^c folgt nun

$$\varphi^c(y) = \inf_{x' \in M} c(x', y) - \varphi(x') = \lambda_0 = c(x, y) - \varphi(x).$$

□

Korollar 4.7. *Angenommen c ist stetig und φ eine c-konkave Funktion. Sind $x_n \to x$ und $y_n \to y$ zwei konvergente Folgen in M mit $y_n \in \partial^c\varphi(x_n)$ dann gilt $y \in \partial^c\varphi(x)$.*

Beweis. Aus den Annahmen folgt

$$c(x_n, y_n) = \varphi(x_n) + \varphi^c(y_n)$$

und φ und φ^c sind oberhalbstetige Funktionen. Daraus schließen wir

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \lim_{n\to\infty} c(x_n, y_n) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} c(x_n, y_n) \\ &= \limsup_{n\to\infty} (\varphi(x_n) + \varphi^c(y_n)) \le \varphi(x) + \varphi^c(y). \end{aligned}$$

Da stets $\varphi(x) + \varphi^c(y) \le c(x, y)$, muss dies eine Gleichheit sein und somit $y \in \partial^c\varphi(x)$. □

Lemma 4.8. *Seien $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zwei Funktionen, so dass für alle $x, y \in M$*

$$\varphi(x) + \psi(y) \le c(x, y).$$

Angenommen $\Gamma \subset M \times M$ ist eine Menge, so dass für alle $(x, y) \in \Gamma$

$$\varphi(x) + \psi(y) = c(x, y)$$

und $\varphi(x) > -\infty$, $\psi(y) > -\infty$ genau dann, wenn $x \in p_1(\Gamma)$ und $y \in p_2(\Gamma)$. Dann gibt es eine c-konkave Funktion $\tilde{\varphi}$, so dass $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ und $\tilde{\varphi}^c(y) = \psi(y)$ für alle $x \in p_1(\Gamma)$ und $y \in p_2(\Gamma)$.

Beweis. Für $(x, y) \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c(x, y) - \psi(y) \\ &= \inf_{\tilde{y}\in p_2(\Gamma)} c(x, \tilde{y}) - \psi(\tilde{y}). \end{aligned}$$

D.h. $\varphi(x) = \psi^{\bar{c}}(x)$ für alle $x \in p_1(\Gamma)$. Weiterhin gilt

$$\psi^{\bar{c}}(x') \le c(x', y) - \psi(\tilde{y})$$

und deshalb $y \in \partial^c\varphi(x)$. Sei nun $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$ dann gilt

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{c}c}(\bar{y}) &= \inf_{\tilde{x}\in M} c(\tilde{x}, \bar{y}) - \psi^c(\tilde{x}) \\ &= \inf_{\tilde{x}\in M} \sup_{\tilde{y}\in p_2(\Gamma)} c(\tilde{x}, \bar{y}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) + \psi(\tilde{y}) \\ &\le \inf_{\tilde{x}\in M} c(\tilde{x}, \bar{y}) - \varphi(\tilde{x}) = \psi(\bar{x}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{c}c}(\bar{y}) &\ge \inf_{\tilde{x}\in M} \sup_{(\tilde{x},\tilde{y})\in\Gamma} c(\tilde{x}, \bar{y}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) + \psi(\tilde{y}) \\ &= \inf_{\tilde{x}\in M} \sup_{(\tilde{x},\tilde{y})\in\Gamma} c(\tilde{x}, \bar{y}) - \varphi(\tilde{x}) \ge \psi(\bar{y}), \end{aligned}$$

d.h. $\psi(y) = \psi^{\bar{c}c}(y)$ für alle $y \in p_2(\Gamma)$. □

4.2 c-zyklisch monotone Mengen

Definition 4.9 (c-zyklische Monotonie)**.** Eine Menge $\Gamma \subset M \times M$ heißt c-zyklisch monoton, wenn für alle $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle Permuationen $\sigma \in S_n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_i) \leq \sum c(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Lemma 4.10. *Ist φ c-konkave, dann ist $\partial^c\varphi$ eine c-zyklisch monotone Menge.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{\sigma(i)}) &\geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) - \varphi^c(y_{\sigma(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) - \varphi^c(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_i).\end{aligned}$$

□

Satz 4.11. *Angenommen Γ eine c-zyklisch monotone Menge. Dann gibt es eine c-konkave Funktion φ, so dass $\Gamma \subset \partial^c\varphi$.*

Beweis. Wähle ein beliebiges Paar $(x_0, y_0) \in \Gamma$ und definiere

$$\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{(x_i,y_i) \in \Gamma} \left\{ (c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0)) + (c(x_2, y_1) - c(x_1, y_1)) + \dots + (c(x, y_m) - c(x_m, y_m)) \right\}.$$

Für $x = x_0$ gilt mit der Wahl $m = 1$ und $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$

$$\varphi(x_0) \leq 0.$$

Aus der c-zyklischen Monotonie folgt aber $\varphi(x_0) \geq 0$ und deshalb $\varphi(x_0) = 0$.

Um zu sehen, dass φ c-konkav ist, definieren eine Funktion $\zeta : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$: Für $y \notin p_2(\Gamma)$ setze $\zeta(y) = -\infty$. Andernfalls definiere

$$\zeta(y) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{(x_i,y_i) \in \Gamma, y_m = y} \left\{ (c(x_0, y_0) - c(x_1, y_0)) + \dots + (c(x_{m-1}, y_{m-1}) - c(x_m, y_{m-1})) + c(x_m, y) \right\}.$$

Die c-cyklische Monotonie impliziert, dass $\zeta(y) \leq 0$ und $\zeta(y) > -\infty$ für $y \in p_2(\Gamma)$. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \inf_{y \in p_2(\Gamma)} \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{(x_i,y_i) \in \Gamma, y = y_m} \left\{ (c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0)) + (c(x_2, y_1) - c(x_1, y_1)) + \dots + (c(x, y) - c(x_m, y)) \right\} \\ &= \inf_{y \in M, \zeta(y) > -\infty} c(x, y) - \zeta(y) = \zeta^c(x),\end{aligned}$$

d.h. φ ist eine c-konkave Funktion von M nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Angenommen $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$, dann gilt für die Wahl $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_m, y_m)$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq \inf_{m-1 \in \mathbb{N}} \inf_{(x_i, y_i) \in \Gamma} \left\{ (c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0)) + \cdots + (c(\bar{x}, y_{m-1}) - c(x_{m-1}, y_{m-1})) + (c(x, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y})) \right\}. \\ &= \varphi(\bar{x}) + c(x, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y}).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$0 = \varphi(x_0) \leq \varphi(\bar{x}) + c(x_0, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y}),$$

d.h. $\varphi(\bar{x}) > -\infty$. Weiterhin gilt

$$c(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}) \leq c(x, \bar{y}) - \varphi(x)$$

und somit

$$\varphi^c(y) = c(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}).$$

Daraus schließen wir

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial^c \varphi.$$

□

4.3 Optimale Kopplungen und c-zyklisch monotone Mengen

Definition 4.12 (Träger)**.** Der Träger $\operatorname{supp} \mu$ eines Maßes $\mu \in \mathcal{P}(M)$ ist definiert als

$$\operatorname{supp} \mu = \{x \in M \mid \forall r > 0 : \mu(B_r(x)) > 0\}.$$

Lemma 4.13. *Der Träger von μ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x_n \to x$ und $x_n \in \operatorname{supp} \mu$. Für jedes $r > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ für $n \geq N$. Da $B_{\frac{r}{2}}(x_n) \subset B_r(x)$ gilt somit

$$0 < \mu(B_{\frac{r}{2}}(x_n)) \leq \mu(B_r(x)).$$

Da r beliebig ist, gilt somit $x \in \operatorname{supp} \mu$. □

Satz 4.14. *Ist c stetig und π eine optimale Kopplung zwischen μ und ν, dann ist der Träger von π eine c-zyklisch monotone Menge.*

Beweis. Angenommen die Aussage ist falsch. Dann gibt es Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \operatorname{supp} \pi$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{i+1})$$

wobei $y_{N+1} = y_1$. Weiterhin können wir annehmen, dass $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ für $i \neq j$.

Da c stetig ist gibt es nun Umgebungen U_i von x_i und V_i von y_i, so dass $(U_i \times V_i) \cap (U_j \cap V_j)$, $\pi(U_i \times V_i) > 0$ und für alle $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in U_i \times V_i$, $i = 1; \ldots; N$, gilt

$$\sum_{i=1}^{N} c(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) > \sum_{i=1}^{N} c(\tilde{x}_i, \tilde{y}_{i+1})$$

mit $\tilde{y}_{N+1} = \tilde{y}_1$.

Sei nun $\pi_i = \frac{1}{m_i} \pi_{U_i \times V_i}$, wobei $\pi_A(B) = \pi(B \cap A)$ und $m_i = \pi(U_i \times V_i)$. Definiere ein Produktmaß $\mathbf{P}$ auf dem Produktraum $\Omega = \Pi_{i=1}^{N} U_i \times V_i$ wie folgt

$$\mathbf{P} = \bigotimes_{i=1}^{N} \pi_i.$$

Die Projektionen auf die U_i komponente seien p_{U_i}. Wir definieren ein reellwertigen Maß $\boldsymbol{\eta}$ auf $M \times M$ wie folgt

$$\boldsymbol{\eta} = m \sum_{i=1}^{N} \left\{ (p_{U_i}, p_{V_{i+1}})_* \mathbf{P} - (p_{U_i}, p_{V_i})_* \mathbf{P} \right\}$$

wobei $m = \min_{i=1}^{N} m_i$ und $V_{N+1} = V_1$. Zunächst gilt

$$(p_1)_* \big((p_{U_i}, p_{U_j})_* \mathbf{P} \big) = (p_{U_i})_* \mathbf{P}.$$

Da $(p_1)_*$ linear ist, gilt somit

$$(p_1)_* \boldsymbol{\eta} = m \sum_{i=1}^{N} \{ (p_{U_i})_* \mathbf{P} - (p_{U_i})_* \mathbf{P} \} = 0.$$

Analog gilt auch $(p_2)_* \boldsymbol{\eta} = 0$. Insbesondere gilt $\boldsymbol{\eta}(M \times M) = 0$.

Es gilt

$$\pi_{U_i \times V_i} = m_i (p_{U_i}, p_{V_i})_* \mathbf{P},$$

so dass

$$(\pi + \boldsymbol{\eta})_{U_i \times V_i} \geq (m_i - m)(p_{U_i}, p_{V_i})_* \mathbf{P} \geq 0.$$

Da $\{U_i \times V_i\}$ disjunkt und $\boldsymbol{\eta}_R$ mit $R = M \times M \backslash (\cup_{i=1}^{N} U_i \times V_i)$, gilt somit

$$\tilde{\pi} = \pi + \boldsymbol{\eta} = \pi_R + \sum_{i=1}^{N} (\pi + \boldsymbol{\eta})_{U_i \times V_i} \geq 0,$$

d.h. das reelwertige Maß $\tilde{\pi}$ ist nicht-negativ und

$$\tilde{\pi}(M \times M) = \pi(M \times M) + \boldsymbol{\eta}(M \times M) = 1$$

und

$$(p_1)_*\tilde{\pi} = \mu + 0$$
$$(p_2)_*\tilde{\pi} = \nu + 0,$$

d.h. $\tilde{\pi}$ ist eine Kopplung zwischen μ und ν.

Schließlich gilt

$$\int c(x,y)d\boldsymbol{\eta}(x,y) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N c(x_i, y_{i+1}) - c(x_i, y_i)\right] d\mathbf{P}(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) < 0,$$

so dass

$$\int c(x,y)d\tilde{\pi}(x,y) < \int c(x,y)d\pi(x,y)$$

was der Optimalität von π widerspricht. □

4.4 Kantorovich-Dualität für stetige Kostenfunktionen

Lemma 4.15. *Angenommen φ ist eine c-konkave Funktion, so dass*

$$\int c(x,y)d\pi(x,y) = \int \varphi d\mu + \int \varphi^c d\nu$$

und φ und φ^c sind μ-messbar bzw. ν-messbar. Dann gilt für π-fast alle $(x,y) \in M \times M$

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) = c(x,y),$$

d.h. ist $\partial^c\varphi$ messbar, so gilt

$$\pi(\partial^c\varphi) = 1.$$

Bemerkung. Ist c stetig, so ist φ oberhalbstetig und damit Borel-messbar. Insbesondere sind φ und φ^c μ- bzw. ν-messbar.

Beweis. Da $\varphi(x) + \varphi^c(y) \le c(x,y)$, gilt für alle $A \subset M \times M$ stets

$$\int c(x,y)d\pi\big|_A(x,y) \le \int \varphi d\mu^{(A)} + \int \varphi^c d\nu^{(A)}$$

wobei

$$\pi\big|_A(B) = \pi(A \cap B)$$

und $\mu^{(A)} = (p_1)_*\pi\big|_A$ und $\nu^{(A)} = (p_2)_*\pi\big|_A$. Es ist leicht zu sehen, dass $\mu^{(A)} + \mu^{(M\times M\setminus A)} = \mu$ und $\nu^{(A)} + \nu^{(M\times M\setminus A)} = \nu$.

Gäbe es eine Borel-Menge $A \subset M \times M$ mit $\pi(A) > 0$ und $\varphi(x) + \varphi^c(y) < c(x,y)$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int c(x,y)d\pi(x,y) &= \int c(x,y)d\pi\big|_A(x,y) + \int c(x,y)d\pi\big|_{M\times M\setminus A}(x,y)\\ &< \int \varphi d\mu^{(A)} + \int \varphi^c d\nu^{(A)} + \int \varphi d\mu^{(M\times M\setminus A)} + \int \varphi^c d\nu^{(M\times M\setminus A)}\end{aligned}$$

woraus sofort die Aussage folgt. □

Satz 4.16. *Ist φ eine c-konkave Funktion und $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, so dass*

$$\int c(x,y)d\pi(x,y) = \int \varphi d\mu + \int \varphi^c d\nu,$$

dann ist π eine optimale Kopplung. Insbesondere gilt dann für jede optimale Kopplung $\tilde{\pi}$

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) = c(x,y)$$

für $\tilde{\pi}$-fast alle $(x,y) \in M \times M$, d.h. es gibt eine c-zyklische Menge A, so dass $\tilde{\pi}(A) = 1$.

Beweis. Sei $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int c(x,y)d\pi(x,y) &= \int \varphi(x)d\mu(x) + \int \varphi^c(y)d\nu(y) \\ &= \int \varphi(x) + \varphi^c(y)d\tilde{\pi}(x,y) \\ &\leq \int c(x,y)d\tilde{\pi}(x,y), \end{aligned}$$

d.h. π ist optimal. □

In den vorigen Abschnitten haben wir folgendes gezeigt für stetige Kostenfunktionen

- Der Träger jeder optimalen Kopplung ist c-zyklisch monoton.
- Für jede c-zyklisch monotone Menge gibt es eine c-konkave Funktion deren c-Superdifferential diese Menge enthält.

Zusammen mit dem vorigen Satz ergibt dies.

Theorem 4.17 (Kantorovich-Dualität für stetige Kostenfunktionen)**.** *Sei c eine stetige Funktion und $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, so dass $\int c(x,y)d\pi(x,y) < \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i. π ist eine optimale Kopplung

ii. Der Träger von π ist eine c-zyklisch monotone Menge

iii. Es gibt eine c-konkave Funktion φ, so dass

$$\int c(x,y)d\pi(x,y) = \int \varphi d\mu + \int \varphi^c d\nu.$$

Insbesondere gilt

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int c(x,y)d\pi(x,y) = \sup_{\varphi(x)+\psi(y) \leq c(x,y)} \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu.$$

4.5 Kantorovich-Dualität für allgemeine Kostenfunktionen

Laut Annahme ist $c : M \times M \to [0, \infty)$ eine unterhalbstetige Kostenfunktion. Definiere

$$c_k(x, y) = \inf_{(x',y')\in M\times M} \left\{\min(c(x', y'), k) + k \left[d(x, x') + d(y, y')\right]\right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $c_l \leq c_k$ für $l \leq k$.

Lemma 4.18. *Die Funktionen c_k sind k-Lipschitz und $0 \leq c_k \leq \min(c(x, y), k)$. Ist c unterhalbstetig so gilt*

$$c(x, y) = \lim_{k\to\infty} c_k(x, y).$$

Korollar 4.19. *Jede c_k-konkave Funktion φ ist k-Lipschitz stetig und es gilt*

$$\varphi(x) + \varphi^{c_k}(y) \leq c_k(x, y) \leq c(x, y).$$

Theorem 4.20 (Kantorovich-Dualität für unterhalbstetige Kostenfunktionen)**.** *Sei $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, so dass $\int c(x, y)d\pi(x, y) < \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *π ist eine optimale Kopplung*
- *π ist auf einer c-zyklisch monotonen Menge Γ konzentriert, d.h. es gibt eine Borel-Menge $\Gamma' \subset \Gamma$, so dass $\pi(\Gamma') = 1$*
- *Es gibt eine c-konkave Funktion φ, so dass*

$$\int c(x, y)d\pi(x, y) = \int \varphi d\mu + \int \varphi^c d\nu.$$

Insbesondere gilt

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int c(x, y)d\pi(x, y) = \sup_{\varphi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)} \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu$$

wobei man auf der rechten Seite auch annehmen kann, dass φ und ψ gleichmäßig stetige (sogar Lipschitz stetige) Funktionen sind.

Beweis. Gilt die zweite Aussage, so folgen aus den obigen Sätzen die beiden andere. Es bleibt zu zeigen, dass jede optimale Kopplung auf einer c-zyklisch monotnen Menge konzentriert ist.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle eine optimale Kopplung $\pi_k \in \Pi(\mu, \nu)$ und c_k-konkave Duallösungen $(\varphi_k, \varphi_k^{c_k})$. Da $\Pi(\mu, \nu)$ kompakt ist, können wir annehmen, dass $\pi_{k'} \to \tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$. Wir behaupten $\tilde{\pi}$ ist optimal. Sei $l \leq k$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int c_l d\tilde{\pi} &\leq \lim_{k'\to\infty} \int c_l d\pi_{k'} \\
&\leq \limsup_{k'\to\infty} \int c_{k'} d\pi_{k'} \\
&= \limsup_{k'\to\infty} \int \varphi_{k'} d\mu + \int \varphi_{k'}^{c_{k'}} d\nu \\
&\leq \inf_{\pi'\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi'.
\end{aligned}$$

Aufgrund der monotonen Konvergenz gilt auch

$$\int c d\tilde{\pi} = \lim_{l\to\infty} \int c_l d\tilde{\pi},$$

so dass

$$\inf_{\pi'\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi' \leq \int c d\tilde{\pi} \leq \inf_{\pi'\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi',$$

d.h. $\tilde{\pi}$ ist optimal. Insbesondere gilt

$$\int \varphi_{k'} d\mu + \int \varphi_{k'}^{c_{k'}} d\nu \to \inf_{\pi'\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi'.$$

Sei nun π optimal. Dann gilt

$$f_{k'}(x,y) = c(x,y) - \varphi_{k'}(x) - \varphi_{k'}^{c_{k'}}(y) \geq 0$$

$$\int f d\pi \to 0,$$

so dass $f \to 0$ in $L^1(\pi)$. Insbesondere können wir eine Teilfolge auswählen, so dass eine Borel-Menge Γ mit $\pi(\Gamma) = 1$ gibt mit

$$f_{k''}(x,y) \to 0$$

für alle $(x,y) \in \Gamma$. Sei nun $(x_i, y_i) \in \Gamma$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_{i+1}) - \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i) \geq \lim_{k''\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{k''}(x_i) + \varphi_{k''}^{c_{k''}}(y_i) = \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i).$$

D.h. Γ ist c-zyklisch monoton. □

4.6 Transportabbildungen und Breniers Lösung des Mongeproblems

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie mit Hilfe der Dualtheorie und der messbaren Auswahltheorems Transportabbildungen konstruiert werden können.

Satz 4.21. *Sei c eine stetige Kostenfunktion, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ und (φ, φ^c) eine Duallösung des Transportproblems. Gilt für μ-fast alle $x \in M$*

$$\#\partial^c \varphi(x) = 1$$

dann gibt es eine Borel-Abbildung $T : M \to M$, so dass $T_*\mu = \nu$ und

$$C(\mu,\nu) = \int c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Beweis. Nach Korollar 4.7 ist$\Gamma = \partial^c\varphi$ abgeschlossen, so dass

$$F : x \mapsto \partial^c\varphi(x)$$

messbar ist und $F(x)$ abgeschlossen. Nach Kuratowski–Ryll-Nardzewski gibt es somit eine μ-messbare Abbildung $f : M \to M$ mit $f(x) \in F(x)$. Somit gibt es auch eine Borel-Abbildung $T : M \to M$ mit $T(x) = f(x)$ für μ-fast alle $x \in M$.

Laut dem Desintegrationstheorem hat jede optimale Kopplung π die Form

$$\int \delta_x \otimes \mu_x d\mu(x)$$

mit

$$\operatorname{supp} \delta_x \otimes \mu_x \subset \{x\} \times M \cap \partial^c\varphi = \{x\} \times \partial^c\varphi(x)$$

für μ-fast alle $x \in M$. Die Annahme impliziert nun

$$\{x\} \times \partial^c\varphi(x) = \{x\} \times T(x)$$

für μ-fast alle $x \in M$ und somit $\mu_x = \delta_{T(x)}$. D.h.

$$\pi = \int \delta_x \otimes \delta_{T(x)} d\mu(x) = (\operatorname{id} \times T)_*\mu,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 4.22 (Breniers Lösung des Mongeproblems)**.** *Sei $M = \mathbb{R}^n$, $c(x,y) = -\langle x,y\rangle$ und $\mu,\nu \in \mathcal{P}(M)$, so dass ν beschränkten Träger hat. Ist μ absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Borel-Abbildung $T : M \to M$ mit $T_*\mu = \nu$ und*

$$C(\mu,\nu) = \int c(x,T(x))d\mu(x) \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Da μ und ν beschränkte Träger haben, gilt zunächst $C(\mu,\nu) \in \mathbb{R}$. Sei (φ,φ^c) eine Duallösung. Definiere

$$\psi(y) = \begin{cases} \varphi^c(y) & y \in \operatorname{supp}\nu \\ -\infty & y \notin \operatorname{supp}\nu. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi^{\bar{c}}(x) &= \inf_{y\in M} -\langle x,y\rangle - \psi(y) \\ &= \inf_{y\in \operatorname{supp}\nu} -\langle x,y\rangle - \psi(y), \end{aligned}$$

d.h. $\psi^{\bar{c}}$ ist eine konkave Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist lokal Lipschitz stetig und somit λ^n-fast überall differenzierbar. Da $\mu \ll \lambda^n$ gibt es somit eine Menge $\Omega \subset \operatorname{supp}\mu$ mit $\mu(\Omega) = 1$ und $\psi^{\bar{c}}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x \in \Omega$.

Sei nun $y \in \partial^c \psi^{\bar{c}}(x)$ für $x \in \Omega$, dann hat die Funktion

$$f(\tilde{x}) = -\langle \tilde{x}, y \rangle - \psi^{\bar{c}}(\tilde{x}) - \psi^{\bar{c}c}(y)$$

ein Maximum an der Stelle x und ist differenzierbar in dieser

$$0 = \nabla f(x) = -y - \nabla \psi^{\bar{c}}(x).$$

D.h.

$$\nabla \psi^{\bar{c}}(x) = y$$

woraus folgt, dass

$$\partial^c \psi^{\bar{c}}(x) = \{y\}.$$

Der vorige Satz ergibt nun die Existenz der Transportabbildung T. □

Im Fall

$$c_1(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

gilt analog

$$\tilde{\psi}^{\bar{c}_1}(x) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \psi^{\bar{c}}(x)$$

Und somit

$$\nabla \tilde{\psi}^{\bar{c}_1}(x) = -x + y.$$

Die Transportabbildung hat dann die Form

$$T = \mathrm{id} - \nabla \tilde{\psi}^{c_1}.$$

Schreibt man die Interpolation

$$\begin{aligned} \exp_x(tv) &= x + tv \\ &= (1 - t)x + ty \end{aligned}$$

für $v = y - t$, dann gilt

$$T(x) = \exp_x(-\nabla \tilde{\psi}(x)).$$

Eine solche Darstellung gilt auch für allegmeine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $\exp_x : T_x M \to M$ generiert hierbei die Geodäten, d.h. $\gamma_t = \exp_x(tv)$ ist eine Geodäte zwischen x und $\exp_x(v)$, siehe folgende Kapitel.

4.7 Stabilität von optimalen Kopplungen bzgl. variabler Marginale.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Kantorovich-Dualität eine Stabilitätseigenschaft von optimalen Kopplungen impliziert.

Satz 4.23 (Stabilitätssatz)**.** *Sei c nicht-negativ und stetig. Angenommen$\mu_n, \nu_n \in \mathcal{P}(M)$ und $\pi_n \in \Pi(\mu_n, \nu_n)$ optimale Kopplungen zwischen μ_n and ν_n, so dass*

$$\liminf_{n\to\infty} \int c(x,y) d\pi_n(x,y) < \infty$$

und $\mu_n \rightharpoonup \mu$ und $\nu_n \rightharpoonup \nu$. Dann gibt es eine Teilfolge $(\pi_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ mit $\pi_{n'} \rightharpoonup \pi \in \mathcal{P}(M \times M)$. Außerdem ist π eine optimale Kopplung zwischen μ und ν ist mit der folgenden Eigenschaft

$$\int c(x,y) d\pi(x,y) = \inf_{\tilde{\pi}\in\Pi(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\tilde{\pi}(x,y) \leq \liminf_{n\to\infty} \int c(x,y) d\pi_n(x,y).$$

Bemerkung. (1) Ein analoges Resultat gilt, wenn π_n optimal bzgl. stetiger Kostenfunktionen c_n ist und c_n gleichmäßig gegen c konvergiert.

(2) Ist $c(x,y) > 0$ für $x \neq y$ und $c(x,x) = 0$ dann ist die einzige optimale Kopplung zwischen μ und sich selbst die triviale Kopplung. Gilt im obigen Satz $\nu = \mu$, dann muss demnach jede konvergente Teilfolge π_n gegen die triviale Kopplung konvergieren.

Beweis. Da $A_1 = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\mu\}$ und $A_2 = \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\nu\}$ kompakt in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ sind, ist auch $\Pi(A_1, A_1)$ kompakt in $(\mathcal{P}(M\times M), d_{LP})$. Insbesondere gibt es eine Teilfolge von $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen ein $\pi \in \Pi(A_1, A_2)$ schwach konvergiert. Daraus folgt auch, dass für $N > 1$, die Maße

$$\pi_n^N = \bigotimes_{i=1}^N \pi_n \in \mathcal{P}((M\times M)^N)$$

ebenfalls schwach gegen $\pi_n^N = \otimes_{i=1}^N \pi$ konvergieren.

Für $\epsilon > 0$ sei nun

$$K_\epsilon^N = \{((x_i, y_i))_{i=1}^N \in (M \times M)^N \mid \sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{i+1}) + \epsilon\}.$$

Da c stetig ist, ist K_ϵ^N abgeschlossen und es gilt $\pi_n^N(K_\epsilon^N) = 1$. Aus $\pi_n^N \rightharpoonup \pi^N$ folgt dann

$$1 = \limsup_{n\to\infty} \pi_n^N(K_\epsilon^N) \leq \pi^N(K_\epsilon^N) \leq 1.$$

Da der Träger von π^N gleich $(\pi)^N$ gilt somit $(\pi)^N \subset \cap_{\epsilon>0} K_\epsilon^N$. Lässt man nun N gegen ∞ laufen, so folgt sofort, dass $\operatorname{supp}\pi$ c-zyklisch monoton ist. □

5 Wasserstein-Räume auf geodätischen Räumen

5.1 Wasserstein-Räume

In diesem Abschnitt sei (M, d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum. Wir definieren folgende Kostenfunktionen

$$c_p(x, y) = d(x, y)^p$$

für $p \in [0, \infty)$. Für $p = 0$ gilt $\mathcal{P}_0(M) = \mathcal{P}(M)$.

Sei $x_0 \in M$ ein beliebiger Punkt in M. Wir definieren folgende Mengen

$$\mathcal{P}_p(M) = \{\mu \in \mathcal{P}(M) \,|\, \int d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty\}.$$

Da

$$\begin{aligned} d(x, x_0)^p &\leq (d(x, \tilde{x}_0) + d(\tilde{x}_0, x_0))^p \\ &\leq C_p d(x, \tilde{x}_0) + C_p d(\tilde{x}_0, x_0) \end{aligned}$$

für $C_p = 2^{p'-1}$ und $p' = \max\{1, p\}$, hängt $\mathcal{P}_p(M)$ nicht von der Wahl von x_0 ab. Weiterhin gilt $\mathcal{P}_p(M) \leq \mathcal{P}_{\tilde{p}}(M)$ für $p \geq \tilde{p} \geq 0$.

Lemma 5.1. *Für alle $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(M)$ gilt*

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int d(x, y)^p d\pi(x, y) < \infty.$$

Beweis. Sei $\pi = \mu \otimes \nu$, dann gilt

$$\int c_p(x, y) d\pi(x, y) \leq C_p \left(\int d(x, x_0)^p d\mu(x) + \int d(x_0, y)^p d\nu(y) \right) < \infty.$$

$\square$

Definition 5.2 (Wasserstein-Metrik)**.** Für $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(M)$ definieren wir die Wasserstein-Metrik w_p auf $\mathcal{P}_p(M)$ wir folgt

$$w_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int d(x, y)^p d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Aufgrund der Hölder-Ungleichung gilt

$$w_{\tilde{p}}(\mu,\nu) \leq w_p(\mu,\nu)$$

für $p \geq \tilde{p} \geq 1$ und

$$w_\alpha(\mu,\nu) \leq w_\beta(\mu,\nu)^{\frac{\alpha}{\beta}} \leq w_p(\mu,\nu)^\alpha$$

für $\alpha \leq \beta \leq 1 \leq p$.

Der Fall $p = 1$ hat folgende Besonderheit: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine 1-Lipschitz-Funktion, d.h. es gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y).$$

Dann gilt für $\varphi = f$ und $\psi = -f$ stets

$$\int f d\mu - \int f d\nu \leq \sup_{\varphi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)} \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu = w_1(\mu,\nu).$$

Weiterhin gilt

$$f(x) \geq f(y) - d(x,y)$$

und aufgrund der Stetigkeit von f auch

$$f(x) = \lim_{y\to x} f(y) - d(x,y).$$

Daraus erhalten wir folgendes lemma.

Lemma 5.3. *Für alle 1-Lipschitz-Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gilt*

$$f(x) = -\inf_{y\in M} d(x,y) - f(y) = -f^d(x),$$

d.h. f ist gleich minus die d-Transformation von sich selbst.

Für allgemeine Lipschitz-Funktione f mit Lipschitz-Konstante $C > 0$, gilt somit

$$\frac{f}{C}(x) = -\inf_{y\in M} d(x,y) - \frac{1}{C}f(x) = -\left(\frac{f}{C}\right)^d(x).$$

Da d^α ebenfalls eine Metrik ist, ergibt sich auch das folgende Korollar.

Korollar 5.4. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ Hölder-stetig mit Exponent $\alpha \in (0,1]$ und Konstant 1, dann gilt $f = -f^{d^\alpha}$.*

Für $p > 1$ ist die Aussage im allgemeine falsch: Angenommen M ist ein geodätischer Raum (siehe Abschnitt 5.2). Gilt nun

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)^p$$

so gilt dies auch entlang jeder Geodäte γ, d.h. für $f_\gamma = f \circ \gamma$ gilt

$$|f_\gamma(t) - f_\gamma(s)| \leq |t-s|^p.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass f_γ konstant ist und somit

$$f(\gamma_0) = f(\gamma_1).$$

Da M geodätische ist, gilt somit $f \equiv \mathsf{const}$.

Satz 5.5. *Der Raum $(\mathcal{P}(M), w_p)$ ist ein metrischer Raum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass w_p eine Metrik ist: Da $d \geq 0$, folgt sofort die Nicht-Negativität von w_p. Ist

$$\int d(x,y)^p d\pi(x,y) = 0,$$

dann ist der Träger von π in der Diagonal $\Delta = \{(x,x)\}_{x \in M}$ enthaltung und die Maße $\delta_x \otimes \mu_x$ sind μ-fast gleich $\delta_x \otimes \delta_x$, d.h. $\pi = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})_* \mu$ und somit $(p_2)_* \pi = \mu$. D.h. $w_p(\mu, \nu) = 0$ genau dann, wenn $\mu = \nu$.

Sei nun $\mu, \nu, \lambda \in \mathcal{P}_p(M)$ und $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ und $\tilde{\pi} \in \Pi(\nu, \lambda)$. Wenden wir das Desintegrationstheorem bzgl. ν and so erhalten wir

$$\pi = \int \nu_y \otimes \delta_y d\nu(y)$$
$$\tilde{\pi} = \int \delta_y \otimes \tilde{\nu}_y d\nu(y)$$

so dass

$$\hat{\pi} = \int \nu_y \otimes \tilde{\nu}_y \nu(y)$$

eine Kopplung zwischen μ und ν ist. Daraus schließen wir

$$\begin{aligned}
\left(\int d(x,z)^p d\hat{\pi}(x,z) \right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\int d(x,z)^p d\nu_y(x) d\nu_y(z) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int (d(x,y) + d(y,z))^p d\nu_y(x) d\nu_y(z) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int d(x,y)^p d\nu_y(x) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int d(y,z)^p d\nu_y(z) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Sind nun π und $\tilde{\pi}$ optimal so ergibt sich

$$w_p(\mu, \lambda) \leq \left(\int d(x,z)^p d\hat{\pi}(x,z) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq w_p(\mu, \nu) + w_p(\nu, \lambda).$$

□

Lemma 5.6. *Ist $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{P}_p(M)$, dann ist $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$. Weiterhin gibt es ein $\mu \in \mathcal{P}_p(M)$, so dass $\mu_n \rightharpoonup \mu$ und $\mu_n \to \mu$ in $(\mathcal{P}_p, w_p)$, d.h. $(\mathcal{P}_p(M), w_p)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei zunächst $p \geq 1$. Dann ist $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge in $\mathcal{P}_1(M)$. Insbesondere gibt für alle $\epsilon > 0$ ein N_ϵ, so dass für $m, n \geq N_\epsilon$

$$w_1(\mu_m, \mu_n) \leq \epsilon^2.$$

Für jedes abgeschlossene C definiere eine $\frac{1}{\epsilon}$-Lipschitz Funktion wie folgt

$$\varphi_C(x) = \left(1 - \frac{d(x,C)}{\epsilon}\right).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\chi_C \le \varphi_C \le \chi_{C_\epsilon}$ und für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon + \mu_n(C_\epsilon) &\ge \epsilon + \int \varphi_C d\mu_n \\
&= \epsilon + \int \varphi_C \mu_m + \left(\int \varphi_C \mu_n - \int \varphi_C \mu_m\right) \\
&\ge \epsilon + \int \varphi_C \mu_m - \frac{w_1(\mu_n, \mu_m)}{\epsilon} \\
&\ge \epsilon + \mu_m(C) - \frac{w_1(\mu_n, \mu_m)}{\epsilon} \\
&\ge \mu_m(C).
\end{aligned}$$

Da C beliebig war, gilt somit

$$d_{LP}(\mu_n, \mu_m) \le \epsilon,$$

d.h. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$.

Ist $p \in (0,1]$, so ist d^p eine Metrik auch M mit der selben Topologie wie (M,d). Insbesondere ist dann $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. der Levi-Prokhorov-Metrik generiert durch d^p, d.h. $\mu_n \rightharpoonup \mu$ für eine $\mu \in \mathcal{P}(M)$. Daraus folgt jedoch auch, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. d_{LP} ist.

Da $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $(\mathcal{P}(M), d_{LP})$ ist, gilt $\mu_n \rightharpoonup \mu \in \mathcal{P}(M)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\int d(x,x_0)^p d\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int d(x,x_0)^p d\mu_n(x) \\
&\le 2^p \liminf w_p(\mu_{N_0}, \mu_n)^p + 2^p \int d(x,x_0)^p d\mu_{N_0}(x) < \infty,
\end{aligned}$$

d.h. $\mu \in \mathcal{P}_p(M)$. Seien nun π_{mn} optimale Kopplungen zwischen μ_m und μ_n. Da $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, gibt es eine Folge $C_m \to 0$, so dass für $n \ge m$

$$\sup_{n\ge m} w_p(\mu_m, \mu_n) \le C_m.$$

Satz 4.23 besagt, nun dass es eine optimale Kopplung π_m zwischen μ_m und μ gibt mit

$$w_p(\mu_m, \mu) \le \liminf_{n'\to\infty} w_p(\mu_m, \mu_{n'}) \le C_m.$$

Da $C_m \to 0$ gilt auch $w_p(\mu_m, \mu) \to 0$. □

Satz 5.7. *Sei $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}_p(M)$ und $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i. $\lim_{n\to\infty} w_p(\mu_n, \mu) = 0$

ii. $\lim_{n\to\infty} \int d(x,x_0)^p d\mu_n(x) = \int d(x,x_0)^p d\mu(x)$

iii. $\limsup_{n\to\infty} \int d(x,x_0)^p d\mu_n(x) = \int d(x,x_0)^p d\mu(x)$

iv. $\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{M\setminus B_R(x_0)} d(x,x_0)^p d\mu_n(x) = 0$

v. Für alle stetigen Funktionen φ mit $|\varphi(x)| \leq C(1 + d(x,x_0)^p)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu.$$

Beweis. "$(i) \Rightarrow (ii)$": Es gilt

$$w_p(\mu_n, \delta_{x_0}) = \left(\int d(x,x_0)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}},$$

so dass

$$|w_p(\mu_n, \delta_{x_0}) - w_p(\mu, \delta_{x_0})| \leq w_p(\mu_n, \mu) \to 0.$$

"$(ii) \Leftrightarrow (iii)$": Bemerke, dass aus $\mu_n \rightharpoonup \mu$ impliziert

$$\int d(x,x_0)^p d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int d(x,x_0)^p d\mu_n(x)$$

folgt.

"$(iv) \Rightarrow (iii)$": Definiere $\varphi_R = \chi_{B_R} \cdot d(\cdot, x_0)^p$. Dann ist φ_R beschränt und stetig, so dass

$$\int \varphi_R d\mu_n \to \int \varphi_R d\mu.$$

Gilt nun

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} w_p(\mu_n, \delta_{x_0})^{p'} &= \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left[\int \varphi_R d\mu_n + \int_{M\setminus B_R} d(x,x_0)^p d\mu_n(x)\right] \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \left[\int \varphi_R d\mu + \limsup_{n\to\infty} \int_{M\setminus B_R} d(x,x_0)^p d\mu_n(x)\right] \\
&= w_p(\mu, \delta_{x_0})^{p'}.
\end{aligned}$$

"$(iii) \Rightarrow (iv)$": Bemerke, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left[\int_{M\setminus B_R} d(x,x_0)^p d\mu_n(x)\right] &\leq \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left[-\int \varphi_R d\mu_n + w_p(\mu_n, \delta_{x_0})^{p'}\right] \\
&\leq -\lim_{R\to\infty} \int \varphi_R d\mu_n + w_p(\mu, \delta_{x_0}) = 0.
\end{aligned}$$

"$(v) \Rightarrow (iv)$": Folgt trivialerweise da $x \mapsto d(x,x_0)^p$ die Bedingungen der 5. Aussage erfüllt.

"$(iv) \Rightarrow (v)$": Sei φ eine stetige Funktion mit $|\varphi(x)| \leq C(1 + d(x, x_0)^p)$ und $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, die Zerlegung in den positiven und negativen Anteil. Zunächst gilt

$$\int \varphi_\pm d\mu_n, \int \varphi_\pm d\mu < \infty,$$

d.h. φ ist sowohl μ_n- als auch μ- integrierbar. Somit gilt

$$\int \varphi_\pm d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \varphi_\pm d\mu_n.$$

Weiterhin gilt für

$$f_R(x) = \max\{0, 1 - \frac{d(x, B_R(x_0))}{R}\}$$

mit $R \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int \varphi_\pm d\mu_n &\leq \int f_R\varphi d\mu_n + \int (1 - f_R)\varphi d\mu_n \\
&\leq \int_M f_R\varphi d\mu_n + 2C \int_{M\setminus B_R(x_0)} d(x, x_0) d\mu_n(x),
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int \varphi_\pm d\mu_n &\leq \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int f_R\varphi_\pm d\mu_n + 2C \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{M\setminus B_R} d(x, x_0)^p d\mu_n \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \int f_R\varphi_\pm d\mu \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \int_{B_{2R}} \varphi_\pm d\mu = \int \varphi_\pm d\mu.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\int \varphi_\pm d\mu_n \to \int \varphi_\pm d\mu$$

und damit auch

$$\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu.$$

"$(v) \Rightarrow (i)$": Sei $a \wedge b = \min\{a, b\}$, dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, y) \wedge R + 2d(x, x_0)\chi_{M\setminus B_{\frac{R}{2}}(x_0)}(x) + 2d(x_0, y)\chi_{M\setminus B_{\frac{R}{2}}(x_0)}(y),$$

und damit

$$d(x, y)^p \leq 3^{p'-1}(d(x, y)^p \wedge R^p + 2^p d(x, x_0)^p \chi_{M\setminus B_{\frac{R}{2}}(x_0)}(x) + 2^p d(x_0, y)^p \chi_{M\setminus B_{\frac{R}{2}}(x_0)}(y)).$$

Sei nun π_n eine optimale Kopplung zwischen μ_n und μ. Dann konvergiert π_n gegen die triviale Kopplung $(\mathrm{id} \times \mathrm{id})_* \mu$ (siehe Satz 4.23) und es gilt

$$\begin{aligned}\int d(x,y)^p d\pi_n(x,y) \leq \qquad & 3^{p'-1} \int d(x,y)^p \wedge R^p d\pi_n(x,y) \\ & +3^{p'-1} 2^p \bigg(\int d(x,x_0)^p d\mu_n(x) \\ & + \int d(x_0,y)^p d\mu(y) \bigg).\end{aligned}$$

Nehmen wir nun erst den Limes superior mit $n \to \infty$, dann konvergieren die erste Term auf der rechten Seite gegen 0. Schließlich nehmen wir den Limes $R \to \infty$, so dass auch die anderen beiden Terme gegen 0 konvergieren. Daraus folgt

$$w_p(\mu_n, \mu)^{p'} = \int d(x,y)^p d\pi_n(x,y) \to 0.$$

□

5.2 Geodätische Räume

Definition 5.8 (Geodäte)**.** Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to M$ wird $[a,b]$-parametrisierte Geodäte (zwischen γ_a und γ_b) genannt, wenn

$$d(\gamma_t, \gamma_s) = \frac{|t-s|}{|a-b|} d(\gamma_a, \gamma_b).$$

Gilt $[a,b] = [0,d]$ mit $d(\gamma_0, \gamma_d) = d$, dann nennen wir γ eine Geodäte mit Geschwindigkeit 1.

Sei $\mathsf{Geo}_{[a,b]}(M,d)$ der Raum der $[a,b]$-parametrizierten Geodäten. Im folgenden sind wir hauptsächlich an $[0,1]$-parametrisierten Geodäten interessiert. Für jedes $t \in [0,1]$ sei $e_t : \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d) \to M$ die Evaluation von γ an der Stelle t, d.h. $e_t(\gamma) = \gamma_t$.

Wir definieren eine Metrik d_∞ zwischen zwei Geodäten $\gamma, \eta \in \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d)$ wie folgt:

$$d_\infty(\gamma, \eta) = \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma_t, \eta_t).$$

Lemma 5.9. *Ist (M,d) vollständig, dann ist auch $(\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d), d_\infty)$ vollständig. Insbesondere sind die Evaluationsabbildungen stetig.*

Beweis. Ist $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist auch $(\gamma^n_t)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Definiere nun $\gamma_t = \lim_{n\to\infty} \gamma^n_t$. Dann auch gilt

$$\lim_{n\to\infty} |d(\gamma_t, \gamma_s) - d(\gamma^n_t, \gamma^n_s)| = 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned} d(\gamma_t, \gamma_s) &= \lim_{n\to\infty} d(\gamma_t^n, \gamma_s^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} |t-s| d(\gamma_0^n, \gamma_1^n) \\ &= |t-s| d(\gamma_0, \gamma_1), \end{aligned}$$

d.h. γ ist eine Geodäte. □

Korollar 5.10. *Ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Gamma \subset M \times M$ abgeschlossene, dann ist die Menge $(e_0, e_1)^{-1}(\Gamma)$ abgeschlossen in $\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$.*

Lemma 5.11. *Ist (M, d) beschränkt-kompakt, so ist auch $\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ beschränkt-kompakt.*

Beweis. Sei $(\gamma^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ mit $d(\gamma^{(n)}, \gamma^{(0)}) \leq R$, dann gilt

$$\gamma_t^{(n)} \in \bar{B}_{R+d(\gamma_0^{(0)}, \gamma_1^{(1)})}(\gamma_0^{(0)}).$$

D.h. wir können $\gamma^{(n)}$ als Funktionen $[0,1] \to \bar{B}_{R+d(\gamma_0^{(0)}, \gamma_1^{(1)})}(\gamma_0^{(0)})$ betrachten. Weiterhin sind die Funktionen $\gamma^{(n)} : [0,1] \to M$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante kleiner gleich 1 und aufgrund der Beschränkt-Kompaktheit ist $\bar{B}_{R+d(\gamma_0^{(0)}, \gamma_1^{(1)})}(\gamma_0^{(0)})$ kompakt. Somit gibt es nach Arzela-Ascoli eine Lipschitz-stetige Funktion $\eta : [0,1] \to \bar{B}_{R+d(\gamma_0^{(0)}, \gamma_1^{(1)})}(\gamma_0^{(0)})$ und eine Teilfolge, so dass

$$\eta_t = \lim_{n'\to\infty} \gamma_t^{(n')}.$$

Ist η eine Geodäte, so folgt die Aussage. Dazu bemerke, dass für alle $t \in [0,1]$

$$\lim_{n'\to\infty} d(\gamma_t^{(n')}, \gamma_s^{(n')}) = d(\eta_t, \eta_s),$$

so dass

$$\begin{aligned} d(\eta_t, \eta_s) &= \lim_{n'\to\infty} d(\gamma_t^{(n')}, \gamma_s^{(n')}) \\ &= \lim_{n'\to\infty} |t-s| d(\gamma_0^{(n')}, \gamma_1^{(n')}) = |t-s| d(\eta_0, \eta_1). \end{aligned}$$

□

Definition 5.12 (Geodätischer Raum)**.** Ein metrischer Raum (M, d) wird geodätischer Raum genannt, wenn für alle $x, y \in M$ eine $[0,1]$-parametrizierte Geodäte zwischen x und y existiert, d.h. $(e_0, e_1)^{-1}(x, y) \neq \varnothing$.

5.3 Geodäten im Wassersteinraum

Wir nennen $\sigma \in \mathcal{P}(\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d))$ eine dynamische Kopplung zwischen $\mu \in \mathcal{P}(M)$ und $\nu \in \mathcal{P}(M)$, wenn

$$(e_0)_*\sigma = \mu$$

und

$$(e_1)_*\sigma = \nu.$$

Die dynamische Kopplung ist p-optimal, wenn $\pi = (e_0, e_1)_*\sigma$ p-optimal bzgl. seiner Marginale ist und

$$\int d(x,y)^p d\pi(x,y) < \infty.$$

Sei $\mathsf{OptGeo}_p(M,d)$ der Raum der p-optimalen dynamische Kopplung und $\mathsf{OptGeo}_p(\mu_0,\mu_1)$ diejenigen $\sigma \in \mathsf{OptGeo}_p(M,d)$ mit $(e_0)_*\sigma = \mu_0$ und $(e_1)_*\sigma = \mu_1$.

Lemma 5.13. *Sei $p \in [1,\infty)$. Ist σ eine p-optimale dynamische Kopplung, dann ist $(e_t, e_s)_*\sigma$ eine p-optimale Kopplung bzgl. seiner Marginale für $s,t \in [0,1]$. Insbesondere ist $t \mapsto \mu_t = (e_t)_*\sigma$ eine Geodäte in $(\mathcal{P}_p(M), w_p)$.*

Beweis. Da $(e_t, e_s)_*\sigma$ eine Kopplung zwischen μ_t und μ_s ist gilt

$$\begin{aligned} w_p(\mu_t,\mu_s) &\leq \left(\int d(x,y)^p d(e_t,e_s)_*\sigma(x,y)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int d(\gamma_t,\gamma_s)^p d\sigma(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |t-s|\left(\int d(\gamma_0,\gamma_1) d\sigma(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} = |t-s| w_p(\mu_0,\mu_1). \end{aligned}$$

Da für $s \leq t$

$$\begin{aligned} w_p(\mu_0,\mu_1) &\leq w_p(\mu_0,\mu_s) + w_p(\mu_s,\mu_t) + w_p(\mu_t,\mu_1) \\ &\leq (t + t - s + s) w_p(\mu_0,\mu_1) = w_p(\mu_0,\mu_1) \end{aligned}$$

muss stets Gleichheit in der vorigen Ungleichung gelten, d.h.

$$w_p(\mu_s,\mu_t) = |t-s| w_p(\mu_0,\mu_1).$$

Insbesondere ist dann $(e_s, e_t)_*\sigma$ p-optimal. $\square$

Satz 5.14. *Angenommen (M,d) ist ein beschränkt-kompakter geodätischer Raum. Dann gibt für alle $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}_p(M)$ und alle Kopplungen $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$ eine dynamische Kopplung $\sigma \in \mathcal{P}(\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d))$ mit $(e_0,e_1)_*\sigma = \pi$.*

Beweis. Da (M, d) beschränkt kompakt ist, ist $\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ ebenfalls beschränkt-kompakt und damit separabel. Sei nun $(x_n, y_n) \to (x, y)$ und γ^n eine Folge von Geodäten zwischen x_n und y_n. Angenommen $\gamma^n \to \gamma$. Dann ist γ eine Geodäte zwischen x und y. Somit hat die Zuweisung

$$\mathcal{L} : (x, y) \mapsto (e_0, e_1)^{-1}(x, y)$$

einen abgeschlossenen Graph und ist π-messbar bzgl. jedem Maß $\pi \in \mathcal{P}(M \times M)$. Der messbare Auswahlsatz besagt nun, dass eine π-messbare Abbildung $S : M \times M \to \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ mit

$$S(x, y) \in \mathcal{L}(x, y)$$

gibt. Offensichtlich ist dann $\sigma = S_*\pi$ eine dynamische Kopplung mit $(e_0, e_1)_*\sigma = \pi$. □

Korollar 5.15. *Für alle $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_p(M)$ ist $\mathsf{OptGeo}_p(\mu_0, \mu_1)$ nicht-leer. Insbesondere ist $(\mathcal{P}_p(M), w_p)$ ein geodätischer Raum.*

Beweis. Ist π eine p-optimale Kopplung, so ist automatische jede dynamische Kopplung σ mit $(e_0, e_1)_*\sigma$, die durch den vorigen Satz konstruiert wurde, p-optimal und somit in $\mathsf{OptGeo}_p(\mu_0, \mu_1)$. Daraus folgt nun, dass

$$t \mapsto (e_t)_*\sigma$$

eine Geodäte zwischen μ_0 und μ_1 ist. Da μ_0 und μ_1 beliebig sind, ist $(\mathcal{P}_p(M), w_p)$ eine geodätischer Raum. □

5.4 Nicht-verzweigende geodätische Räume

Definition 5.16. Ein geodätischer Raum wird nicht-verzweigend genannt, wenn für alle Geodäten $\gamma, \eta \in \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ und $t \in (0, 1)$ mit

$$\gamma_0 = \eta_0, \gamma_t = \eta_t$$

stets $\gamma \equiv \eta$ gilt. Aufgrund der Symmetrie der Metrik gilt dann auch $\gamma \equiv \eta$ für alle Geodäten $\gamma, \eta \in \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ und $t \in (0, 1)$ mit

$$\gamma_1 = \eta_1, \gamma_t = \eta_t$$

stets $\gamma \equiv \eta$ gilt.

Beispiel (Tripod)**.** KOMMT.

Lemma 5.17. *Sei (M, d) ein nicht-verzweigender geodätischer Raum und seien γ und η zwei Geodäten in $\mathsf{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ und $p \in (1, \infty)$. Ist Γ eine c_p-zyklisch monotone Menge und $(\gamma_0, \gamma_1), (\eta_0, \eta_1) \in \Gamma$, so dass*

$$\gamma_t = \eta_t$$

für ein $t \in (0, 1)$. Dann gilt $\gamma \equiv \eta$.

Beweis. Aus den Bedingungen folgt

$$d(\gamma_0,\gamma_1)^p + d(\eta_0,\eta_1)^p \le d(\gamma_0,\eta_1)^p + d(\eta_0,\gamma_1)^p.$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung und der Annahme $\gamma_t = \eta_t$ ergibt dies

$$\begin{aligned} d(\gamma_0,\gamma_1)^p + d(\eta_0,\eta_1)^p &\le (d(\gamma_0,\gamma_t) + d(\eta_t,\eta_1))^p + (d(\eta_0,\eta_t) + d(\gamma_t,\gamma_1))^p \\ &= (td(\gamma_0,\gamma_1) + (1-t)d(\eta_0,\eta_1))^p + (td(\eta_0,\eta_1) + (1-t)d(\gamma_0,\gamma_1))^p \\ &\le td(\gamma_0,\gamma_1)^p + (1-t)d(\eta_0,\eta_1)^p + td(\eta_0,\eta_1)^p + (1-t)d(\gamma_0,\gamma_1)^p \\ &= d(\gamma_0,\gamma_1)^p + d(\eta_0,\eta_1)^p. \end{aligned}$$

Somit sind alle Ungleichung Gleichungen und aufgrund der strikten Konvexität von $r \mapsto r^p$ für $p > 1$ muss außerdem gelten

$$d(\gamma_0,\eta_1) = d(\gamma_0,\gamma_1) = d(\eta_0,\eta_1) = d(\eta_0,\gamma_1).$$

Wir definieren nun

$$\tilde{\gamma}_s = \begin{cases} \gamma_s & s \in [0,t] \\ \eta_s & s \in [t,1] \end{cases}$$

und

$$\tilde{\eta}_t = \begin{cases} \eta_s & s \in [0,t] \\ \gamma_s & s \in [t,1]. \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\tilde{\gamma}$ eine Geodäte zwischen γ_0 und η_1 ist und $\tilde{\eta}$ eine Geodäte zwischen η_0 und γ_1. Aufgrund der Nicht-Verzweigungseigenschaft folgt jedoch, dass

$$\tilde{\gamma} = \gamma$$

und

$$\tilde{\eta} = \eta,$$

d.h. $\gamma_s = \eta_s$ für $s \in [0,1]$, oder äquivalent $\gamma \equiv \eta$. □

Korollar 5.18. *Ist (M,d) nicht verzweigend und σ eine p-optimale dynamische Kopplungmit $p \in (1,\infty)$, dann gibt es für alle $t \in (0,1)$ und $s \in [0,1]$ eine Borel-Abbildungen $T_{t,s} : M \to M$mit*

$$(T_{t,s})_*\mu_t = \mu_s$$

und

$$\int d(x, T_{t,s}(x))^p d\mu_t(x) = w_p(\mu_t,\mu_s)^p$$

wobei $\mu_t = (e_t)_*\sigma$.

Beweis. Das vorige Lemma zeigt

$$e_t : \operatorname{supp}\sigma \to \operatorname{supp}\mu_t$$

ist injektiv. Damit ist sie messbar invertierbar, d.h. es gibt eine μ_t-messbare Abbildung $T_t : M \to \mathsf{Geo}_{[0,1]}(M,d)$, so dass $e_t \circ T_t(x) = x$ für $x \in \operatorname{supp}\mu_t$ (Ist $\operatorname{supp}\sigma$ kompaket, so ist T_t sogar ein Homeomorphismus). Dann gilt insbesondere

$$\mu_s = (e_s)_*\sigma = (e_s)_*(T_t)_*\mu_t = (e_s \circ T_t)_*\mu_t.$$

Damit ist $T_{t,s} = e_s \circ T_t$ die gesuchte Abbildung. □

5.5 Die schwache Maßkontraktionsbedingung und Existenz von Transportabbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie eine sehr schwache Kontraktionseigenschaft eines Referenzmaßes die Existenz von Transportabbildungen zwischen absolut stetigen Maßen und beliebigen anderen Maßen impliziert[1].

Definition 5.19. Das Tripel (M, d, m) wir metrischer Maßraum genannt, wenn m eine (möglicherweise unendliches) Maß auf M ist, welches lokal beschränkt ist, d.h. für alle $x \in M$ und $r > 0$ gilt

$$\mathsf{m}(B_r(x)) > 0.$$

Beispiele sind gegeben durch den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{Euklid}})$ und $\mathsf{m} = \lambda^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß. Alternativ ist jede riemannische Mannigfaltigkeit mit dazugehörigem Volumenmaß eine metrischer Maßraum.

Ist nun (M, d) ein geodätischer Raum so schreiben wir für $A \subset M$, $x \in M$ und $t \in [0,1]$

$$A_{t,x} = \{\gamma_t \,|\, \gamma \in (e_0, e_1)^{-1}(A \times \{x\})\}.$$

Zunächst die folgende Aussage, die man entweder beweist, indem man zeigt, dass K Teilmenge eines affinen Hyperraums der Dimension $n-1$ ist, oder direkt aus den Wachstumseigenschaften des Lebesgue-Maßes.

Lemma 5.20. *Sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ und $x \neq y \in \mathbb{R}^n$. Ist*

$$K \times \{x, y\}$$

c_p-zyklisch monotone so gilt $\lambda^n(K) = 0$.

Beweis. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \in (0, t_0)$

$$K_{t,x} \cup K_{t,y} \subset K_\epsilon$$

und wegen der c_p-zyklischen Monotonie gilt

$$K_{t,x} \cap K_{t,y} = \varnothing.$$

[1] Die folgenden Definitionen und Beweise sind aus Cavelletti–Huesmann „Existence and uniqueness of optimal transport maps“.

Weiterhin gilt
$$\lambda^n(K_{t,x}) = (1-t)^n \lambda(K).$$
Aufgrund der äußeren Regularität des Lebesgue-Maßes gilt nun

$$\begin{aligned}
\lambda^n(K) &= \lim_{\epsilon\to 0} \lambda^n(K_\epsilon) \\
&\geq \limsup_{t\to 0} \lambda^n(K_{t,x} \cup K_{t,y}) \\
&= \limsup_{t\to 0} \lambda^n(K_{t,x}) + \lambda^n(K_{t,y}) \\
&\geq 2 \limsup_{t\to 0} (1-t)^n \lambda^n(K) = 2\lambda^n(K).
\end{aligned}$$

□

Der gleiche Beweis funktioniert auch für allgemeinere geodätische Maßräume (M, d, m)

Satz 5.21. *Angenommen (M, d, m) ist ein nicht-verzweigender, geodätischer Maßraum, so dass für alle $x \in M$ und alle kompakten Mengen K gilt, dass*

$$\liminf_{t\to 1} \mathsf{m}(K_{t,x}) > \frac{1}{2}\mathsf{m}(K).$$

Ist für $x \neq y \in M$ und die Menge $A \times \{x, y\}$ c_p-zyklisch monotone für eine Borel-Menge $A \subset M$, dann gilt $\mathsf{m}(A) = 0$.

Beweis. Ist $\mathsf{m}(A) > 0$ dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mathsf{m}(K) > 0$. Wäre $A \times \{x, y\}$ c_p-zyklisch monoton, dann ist auch $K \times \{x, y\}$ c_p-zyklisch monoton. Da K kompakt ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \in (0, t_0)$

$$K_{t,x} \cup K_{t,y} \subset K_\epsilon.$$

Da laut Lemma 5.17 die Mengen $K_{t,x}$ und $K_{t,y}$ disjunkt sind für $t > 0$, gilt somit

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}(K) &= \lim_{\epsilon\to 0} \mathsf{m}(K_\epsilon) \\
&\geq \liminf_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,x} \cup K_{t,y}) \\
&\geq \liminf_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,x}) + \liminf_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,y}) \\
&> \mathsf{m}(K)
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Korollar 5.22. *Unter den vorigen Annahmen, ist jede p-optimale Kopplung zwischen Maßen$\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_p(M)$ mit $\mu_0 \ll \mathsf{m}$ und $\mu_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$ durch eine Transportabbildung $T : M \to M$ induziert, d.h. $\pi = (\mathrm{id} \times T)_* \mu_0$.*

Beweis. Setzte $\Gamma = \operatorname{supp} \pi$. Dann gilt

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times \{x_i\} \cup \bigcup_{i \neq j} A_{i,j} \times \{x_i, x_j\}.$$

Wobei

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

für $i \neq j$ und

$$A_i \cap A_{j,k} = \varnothing$$

für alle i, j, k.

Da Γ c_p-zyklisch monoton, folgt aus dem vorigen Satz, dass $\mathsf{m}(A_{i,j}) = 0$ für $i \neq i$. Da μ_0 absolut stetig bzgl. m ist, gilt $\mu_0(A_{i,j}) = 0$, d.h.

$$\pi(M \times M \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times \{x_i\}) = 0.$$

Somit gilt

$$\pi(M \times M \backslash \operatorname{graph} T) = 0$$

für

$$T(x) = \begin{cases} x_i & x \in A_i \\ x_0 & x \notin M \backslash \cup A_i. \end{cases}$$

Insbesondere muss dann $T_* \mu_0 = \mu_1$ gelten und und T p-optimal sein. $\square$

Der Nachteil der obigen Bedingung ist, dass diese nicht stabil ist, d.h. man kann nicht erwarten, dass man allgemeine μ_1 durch endliche Maße approximiert und ein ähnliches Wachstum erhält. Aus diesem Grund müssen wir diese sehr Schwache Kontraktionsbedingung durch eine uniforme Bedingung ersetzen.

Definition 5.23. Der geodätische Maßraum (M, d, m) erfüllt die schwache Maßkontraktionseigenschaft $(\mathsf{MCP})_{\frac{1}{2}}$, wenn es für alle $x_0 \in M$ und $R > 0$ Funktionen $f : (0,1) \to (0, \infty)$ gibt mit

$$\limsup_{t \to 0} f(t) > \frac{1}{2},$$

so dass für alle $x \in B_R(x_0)$ und $A \subset B_R(x_0)$ gilt

$$\mathsf{m}(A_{t,x}) \geq f(t) \mathsf{m}(A).$$

Im folgenden wählen wir ein fixes $x_0 \in M$.

Wie oben erhalten wir folgenden wichtigen Satz.

Satz 5.24. *Angenommen* (M, d, m) *ist ein nicht-verzweigender, geodätischer Maßraum, der die schwache Maßkontraktionseigenschaft* $(\mathsf{MCP})_{\frac{1}{2}}$ *erfüllt. Ist für* $x \neq y \in M$ *und die Menge* $A \times \{x, y\}$ c_p*-zyklisch monotone für eine Borel-Menge* $A \subset M$*, dann gilt* $\mathsf{m}(A) = 0$.

Beweis. Ist $\mathsf{m}(A) > 0$ dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mathsf{m}(K) > 0$. Wäre $A \times \{x, y\}$ c_p-zyklisch monoton, dann ist auch $K \times \{x, y\}$ c_p-zyklisch monotone. Da K kompakt ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \in (0, t_0)$

$$K_{t,x} \cup K_{t,y} \subset K_\epsilon.$$

Da laut Lemma 5.17 die Mengen $K_{t,x}$ und $K_{t,y}$ disjunkt sind für $t > 0$, gilt somit

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(K) &= \lim_{\epsilon\to 0} \mathsf{m}(K_\epsilon) \\ &\geq \limsup_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,x} \cup K_{t,y}) \\ &\geq \limsup_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,x}) + \limsup_{t\to 0} \mathsf{m}(K_{t,y}) \\ &\geq \limsup_{t\to 0} 2f(t)\mathsf{m}(K) > \mathsf{m}(K).\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Sei nun $\Gamma \subset M \times M$, dann definieren wir

$$\Gamma_t = e_t(e_0, e_1)^{-1}(\Gamma),$$

d.h. Γ_t sind alle t-Mittelpunkte zwischen zwei Punkten in Γ. Aus der Definition folgt, dass $\Gamma_0 = p_1(\Gamma)$. Das folgende Lemma zeigt, dass sich die Maßkontraktionseigenschaft auch auf

Lemma 5.25. *Angenommen (M, d, m) ist ein beschränkt-kompakter geodätischer Maßraum der $(\mathsf{MCP})_{\frac{1}{2}}$ erfüllt. Sei $\Gamma \subset M \times M$ eine kompakte, c_p-zyklisch monotone Menge. Dann gilt*

$$\mathsf{m}(\Gamma_t) \geq f_R(t)\mathsf{m}(\Gamma_0)$$

für alle $R > 0$ mit $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset B_R(x_0)$.

Beweis. Sei $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in $p_2(\Gamma)$ und φ eine c_p-konkave Funktion mit $\Gamma \subset \partial^{c_p}\varphi$.

Definiere die folgenden Mengen

$$E_i^{(n)} = \{x \in \Gamma_0 \,|\, d(x, y_i)^p - \varphi^{c_p}(y_i) \leq d(x, y_j)^p - \varphi^{c_p}(y_j), j = 1, \ldots, n\}$$

und

$$\Gamma^{(n)} = \bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)} \times \{y_i\}.$$

Sei $(x_k, z_k) \in \Gamma^{(n)}$ für $k = 1, \ldots, m$. Dann gilt aufgrund der Definition von $E_i^{(n)}$

$$d(x_k, z_k) - \varphi^{c_p}(z_k) \leq d(x_k, z_{k+1}) - \varphi^{c_p}(z_{k+1})$$

mit $z_{m+1} = z_1$. Summiert man dies auf so ergibt dies

$$\sum_{k=1}^m d(x_k, z_k) - \varphi^{c_p}(z_k) \leq \sum_{k=1}^m d(x_k, z_{k+1}) - \varphi^{c_p}(z_{k+1}),$$

d.h. $\Gamma^{(n)}$ ist c_p-zyklisch monoton.

Da $\Gamma^{(n)}$ zyklisch monoton ist, gilt nach Lemma 5.17 für $i \neq j$ und alle Geodäten γ und η mit $\gamma_0 \in E_i^{(n)}$, $\gamma_1 = y_i$ und $\eta_0 \in E_j^{(n)}$,$\eta_1 = y_j$ stets $\gamma_t \neq \eta_t$ für $t \in (0,1)$ und deshalb

$$(E_i^{(n)} \times \{y_i\})_t \cap (E_j^{(n)} \times \{y_j\})_t = \varnothing.$$

Da $(E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)}) \times \{y_i, y_j\} \subset \Gamma^{(n)}$ folgt aus Satz 5.24, dass $\mathsf{m}(E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)}) = 0$ für alle $i \neq j$.

Zusammengefasst gilt damit

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\Gamma_t^{(n)}) &= \mathsf{m}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i^{(n)} \times \{y_i\})_t\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{m}((E_i^{(n)} \times \{y_i\})_t)\\ &\geq f(t)\sum_{i=1}^{n} \mathsf{m}(E_i^{(n)}) = f(t)\mathsf{m}(\Gamma_0),\end{aligned}$$

da $\mathsf{m}(E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)}) = 0$ für $i \neq j$ und $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^{n} E_i^{(n)}$.

Wir behaupten, für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \geq N$, so dass

$$\Gamma_t^{(n)} \subset (\Gamma_t)_\epsilon$$

wobei $(\Gamma_t)_\epsilon = \cup_{x\in\Gamma_t} B_\epsilon(x)$ die ϵ-Umgebung von Γ_t ist.

Angenommen dies ist nicht der Fall, dann gibt es eine Folge von Geodäten γ^n mit $(\gamma_0^n, \gamma_1^n) \in \Gamma^{(n)}$ und $\gamma_t^n \notin (\Gamma_t)_\epsilon$. Da (M,d) beschränkt-kompakt und $\Gamma^{(n)} \subset \Gamma$ kompakt ist, können wir annehmen, dass γ^n gegen eine Geodäte γ mit Endpunkten in Γ konvergiert. Dies würde jedoch implizieren, dass $\gamma_t \in \Gamma_t$ und $\gamma_t^n \to \gamma_t$ was ein Widerspruch ist, da $(\Gamma_t)_\epsilon$ eine Umgebung von γ_t ist.

Aufgrund der Annahme und der σ-Monotonie von m gilt nun

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\Gamma_t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \mathsf{m}((\Gamma_t)_\epsilon)\\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathsf{m}(\Gamma_t^{(n)})\\ &\geq f(t)\mathsf{m}(\Gamma_0)\end{aligned}$$

□

Theorem 5.26. *Angenommen (M, d, m) erfüllt $(\mathsf{MCP})_{\frac{1}{2}}$ und $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_p(M)$ sind Maße mit $\mu_0 \ll \mathsf{m}$. Dann ist jede p-optimale Kopplung π durch eine Transportabbildung induziert.*

Beweis. Wir zeigen den Satz durch Widerspruch: Angenommen π ist eine p-optimale Kopplung, die nicht durch eine Transportabbildung induziert wird. Dann gibt es laut der

Auswahl-Dichotomy (Satz 1.25) eine kompakte Menge K mit $\mu_0(K) > 0$ und zwei stetige Funktionen $f_1, f_2 : K \to M$ mit $f_1(K) \cap f_2(K) = \varnothing$ und $\Gamma^{(i)} = \operatorname{graph} f_i \subset \operatorname{supp} \pi$.

Insbesondere sind dann $\mathsf{m}(K) > 0$ und $\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ eine kompakte, c_p-zyklisch monoton Menge. Lemma 5.17 impliziert somit, dass

$$\Gamma_t^{(1)} \cap \Gamma_t^{(2)} = \varnothing$$

für $t \in (0,1)$. Da $\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ kompakt ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \in (0, t_0)$

$$\Gamma_t^{(1)} \cup \Gamma_t^{(1)} \subset K_\epsilon.$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}(K) &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathsf{m}(K_\epsilon) \\
&\geq \limsup_{t \to 0} \mathsf{m}(\Gamma_t^{(1)} \cup \Gamma_t^{(2)}) \\
&\geq \limsup_{t \to 0} \mathsf{m}(\Gamma_t^{(1)}) + \limsup_{t \to 0} \mathsf{m}(\Gamma_t^{(2)}) \\
&\geq \limsup_{t \to 0} 2f(t)\mathsf{m}(K) > \mathsf{m}(K)
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Korollar 5.27. *Unter den Annahmen des vorigen Theorem gibt es zwischen $\mu_0 \ll \mathsf{m}$ und μ_1 genau eine p-optimale Kopplung π. Außerdem gibt es genau eine Geodäte $t \mapsto \mu_t$ zwischen μ_0 und μ_1 und es gilt $\mu_t \ll \mathsf{m}$.*

Beweis. Seien π und π' zwei p-optimale Kopplungen und T und S die zugehörigen Transportabbildungen, dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi &= \int \delta_x \otimes \delta_{T(x)} d\mu_0(x) \\
\pi' &= \int \delta_x \otimes \delta_{S(x)} d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

Da auch $\frac{1}{2}(\pi + \pi')$ eine p-optimale Kopplung ist, gibt es eine Transportabbildung R, so dass

$$\int \delta_x \otimes \delta_{R(x)} d\mu_0(x) = \int \delta_x \otimes \frac{1}{2}(\delta_{T(x)} + \delta_{S(x)}) d\mu_0(x),$$

was nur wahr sein kann, wenn

$$\mu_0(\{T \neq S\} \cup \{R \neq T\}) = 0$$

und somit $\pi = \pi'$.

Der zweite Teil folgt analog: Seien $t \mapsto \mu_t^{(i)}$, $i = 0; 1$, zwei Geodäten zwischen μ_0 und μ_1. Dann ist auch $t \mapsto \mu_t^{(\lambda)} = (1-\lambda)\mu_t^{(0)} + \lambda\mu_t^{(1)}$ eine Geodäte und die eindeutige p-optimale Kopplung zwischen μ_0 und μ_t^λ wird durch eine Transportabbildung induziert. Wie oben impliziert dies, dass $\mu_t^{(0)} = \mu_t^{(1)}$.

Wäre nun μ_{t_0} nicht absolut stetig ist ein $t_0 \in (0,1)$, dann gäbe es eine c_p-zyklisch monotone Menge $\Gamma \subset \operatorname{supp} \pi$, so dass $\pi(\Gamma) > 0$ und $\mathsf{m}(\Gamma_{t_0}) = 0$. Dann gilt jedoch auch $\mu_0(\Gamma_0) > 0$ und damit $\mathsf{m}(\Gamma_0) > 0$. Aufgrund der inneren Regularität können wir annehmen, dass Γ kompakt ist, was nicht möglich ist, da sonst

$$\mathsf{m}(\Gamma_{t_0}) \geq f(t_0)\mathsf{m}(\Gamma_0) > 0,$$

d.h. $\mu_t \ll \mathsf{m}$ für alle $t \in (0,1)$. □

5.6 Maßkontraktionsbedingung

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ definiere

$$\sigma_\kappa^{(t)}(\theta) = \begin{cases} \infty & \kappa\theta^2 > \pi^2 \\ \frac{\sin(\theta t\sqrt{\kappa})}{\sin(\theta\sqrt{\kappa})} & \kappa > 0, \kappa\theta^2 \leq \pi^2 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(\theta t\sqrt{\kappa})}{\sinh(\theta\sqrt{-\kappa})} & \kappa < 0. \end{cases}$$

Die Funktionen $t \mapsto \sigma_\kappa^{(t)}(\theta)$ sind die Eindeutigen Lösungen der Differentialgleichung

$$x'' + \kappa\theta^2 x = 0$$

mit $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$.

Weiterhin sei

$$\sigma_{K,N}^{(t)}(\theta) = \sigma_{\frac{K}{N}}^{(t)}(\theta)$$

und

$$\tau_{K,N}^{(t)} = t^{\frac{1}{N}} \sigma_{K,N-1}^{(t)}(\theta)^{\frac{N-1}{N}}.$$

Lemma 5.28. *Es gilt*

$$\sigma_\kappa^{(t)}(\theta) \geq \sigma_{\kappa'}^{(t)}(\theta)$$

für $\kappa \geq \kappa'$. Außerdem ist für $\kappa \leq 0$ die Funktion $\theta \mapsto \sigma_\kappa^{(t)}(\theta)$ monoton fallend.

Definition 5.29 (Maßkontraktionsbedingung)**.** Der geodätische Maßraum (M, d, m) erfüllt die Maßkontraktionsbedingung $\mathsf{MCP}(K, N)$ für $K \in \mathbb{R}$ und $N \in [1, \infty)$, wenn es für alle $\mu_0 \in \mathcal{P}_p(M)$ mit $\mu_0 \ll \mathsf{m}$ und $y \in M$ eine Geodäte $t \mapsto \mu_t$ mit $\mu_1 = \delta_y$ gibt, so dass

$$\int \rho_t^{1-\frac{1}{N}} d\mathsf{m} \geq \int \tau_{K,N}^{(1-t)}(d(x,y))\rho_0^{1-\frac{1}{N}}(x) d\mathsf{m}(x)$$

wobei $\mu_t = \rho_t \mathsf{m} + \mu_t^s$ mit $\mu_t^s \perp \mathsf{m}$.

Lemma 5.30. *Die Bedingung $\mathsf{MCP}(K, N)$ impliziert die Bedingung $\mathsf{MCP}(K', N')$ für $K' \leq K$ und $N' \geq N$.*

Lemma 5.31. *Die Bedingung* $\mathsf{MCP}(K,N)$ *impliziert die Bedingung* $(\mathsf{MCP})_{\frac{1}{2}}$.

Beweis. Sei $\mu_0 = \frac{1}{\mathsf{m}(C)}\mathsf{m}\big|_C$ für ein kompakte Menge C, $\mu_1 = \delta_y$ und $t \mapsto \mu_t$ wie in der Definition der $\mathsf{MCP}(K,N)$-Bedingung.

Aus der Definition entnehmen wir, dass wir K durch $\min\{K,0\}$ ersetzen können. Weiterhin gilt für $A \subset B_R(x_0)$ und $x,y \in B_R(x_0)$

$$\tau_{K,N}^{(1-t)}(d(x,y)) \geq \tau_{K,N}^{(1-t)}(2R),$$

so dass

$$\int \rho_t^{1-\frac{1}{N}} d\mathsf{m} \geq \tau_{K,N}^{(1-t)}(2R) \int \rho_0^{1-\frac{1}{N}} d\mathsf{m}.$$

Da $\rho_0 = \frac{1}{\mathsf{m}(C)}$, gilt Da $r \mapsto r^{1-\frac{1}{N}}$ konkav ist, gilt

$$\int \rho_t^{1-\frac{1}{N}} d\mathsf{m} \leq \mathsf{m}(\{\rho_t > 0\})^{\frac{1}{N}}.$$

Weiterhin ist $\rho_0 \equiv \frac{1}{\mathsf{m}(C)}$, so dass

$$\int \rho_0^{1-\frac{1}{N}} = \mathsf{m}(\{\rho_0 > 0\})^{\frac{1}{N}}.$$

Zusammen ergibt dies

$$\mathsf{m}(\{\rho_t > 0\}) \geq \left(\tau_{K,N}^{(1-t)}(2R)\right)^N \mathsf{m}(\{\rho_0 > 0\}).$$

Insbesondere gilt damit

$$\mathsf{m}(C_{t,y}) \geq f_R(t)\mathsf{m}(C)$$

mit $f(t) = \left(\tau_{K,N}^{(1-t)}(2R)\right)^N$. □

5.7 Beispiel der Maßkontraktionsbedingung anhand von nicht-negativ gekrümmte Räume

In diesem Abschnitt wollen wir für einen metrischer Raum (M,d) die N-dimensionalen Hausdorff-Maße konstruieren und zeigen, dass diese (falls nicht-trivial) kompatibel zu der obigen Maßkontraktionbedingung sind.

Für $N \in [0,\infty)$, $\epsilon > 0$ und $A \subset M$ definieren wir

$$\mathcal{H}_\epsilon^N(A) = c_N \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} C_i)^N \mid A \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} C_i, \operatorname{diam} C_i \leq \epsilon\}.$$

Bemerkung. Für $N \in \mathbb{N}$ ist der Parameter C_N so gewählt, dass $\mathcal{H}^N(B_1(\mathbf{0}))$ für $B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^N$ dem Volumen der n-dimensionalen Einheitkugel entspricht.

Aufgrund der Definition folgt, dass für $\epsilon \leq \epsilon'$ und $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\epsilon^N(A) \leq \mathcal{H}_{\epsilon'}^N(A)$$
$$\mathcal{H}_\epsilon^{N+\delta}(A) \leq \epsilon^\delta \mathcal{H}^N(A).$$

Weiterhin gilt

$$\mathcal{H}_\epsilon^N(\varnothing) = 0$$

und

$$\mathcal{H}_\epsilon^N(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\epsilon^N(A_j).$$

D.h. $\mathcal{H}_\epsilon^N$ ist ein äußeres Maß.

Ist $A_{2\epsilon} \cap B = \varnothing$, dann gilt sogar

$$\mathcal{H}_\epsilon^N(A \cup B) = \mathcal{H}_\epsilon^N(A) + \mathcal{H}_\epsilon^N(B).$$

Definition 5.32 (Hausdorff-Maß)**.** Das N-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^N : 2^M \to [0, \infty]$ auf dem metrischen Raum (M, d) ist definiert als

$$\mathcal{H}^N(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon^N(A).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{H}^N$ ein äußeres Maß ist.

Korollar 5.33. *Das Hausdorff-Maß ist ein Borel-Maß, d.h. $\mathcal{H}^N$ eingeschränkt auf $\mathcal{B}_d$ ist ein Maß.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{H}^N$ additiv auf offenen Mengen $U, V \subset M$ mit $U_\delta \cap V = \varnothing$ ist. Dies folgt jedoch sofort aus der Definition

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^N(U \cup V) &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon^N(U \cup V) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon^N(U) + \mathcal{H}_\epsilon^N(V) = \mathcal{H}^N(U) + \mathcal{H}^N(V).\end{aligned}$$

□

Lemma 5.34. *Angenommen $\mathcal{H}^N(A) < \infty$, dann gilt $\mathcal{H}^{N'}(A) = 0$ für alle $N' > N$. Analog folgt aus $\mathcal{H}^N(B) > 0$, $\mathcal{H}^{N''}(B) = \infty$ für $N'' < N$*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{N'}(A) &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon^{N'}(A) \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{N'-N} \mathcal{H}_\epsilon^N(A) = 0\end{aligned}$$

da $\mathcal{H}_\epsilon^N(A)$ gleichmäßig beschränkt ist für hinreicht klein $\epsilon > 0$.

Für den zweiten Teil folgt aus der Definition

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^N(B) &= \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{H}^N_\epsilon(B)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{N-N''}\mathcal{H}^{N''}_\epsilon(B) > 0\end{aligned}$$

was nur wahr sein kann wenn

$$\mathcal{H}^{N''}(B) = \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{H}^{N''}_\epsilon(B) = \infty.$$

□

Die Aussage des Lemmas lässt sich nun dafür nutzen eindeutig die Hausdorff-Dimension einer beschränkten Menge zu ermitteln.

Definition 5.35 (Hausdorff-Dimension)**.** Die Hausdorff-Dimension $\dim_H A$ einer beschränkten Menge $A \subset M$ ist definiert als

$$\begin{aligned}\dim_H A &= \inf\{N \in [0,\infty) \,|\, \mathcal{H}^N(A) = 0\}\\ &= \sup\{N \in [0,\infty) \,|\, \mathcal{H}^N(A) = \infty\}\end{aligned}$$

wobei wir die Konvention $\inf\varnothing = \infty$ und $\sup\varnothing = 0$ verwenden.

Im allgemeinen kann die Hausdorff-Dimension auf verschiedenen offenen Mengen ungleich sein. Ein einfache Beispiel ist gegeben indem man die Raum

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \le 0, y = 0 \text{ oder } x \ge 0\}$$

mit der induzierten Metrik $d((x,y),(x',y')) = \max\{|x-x'|,|y-y'|\}$ betrachten. Es gilt nämlich

$$\dim_H B_{\frac{1}{2}}((-1,0)) = 1$$

und

$$\dim_H B_{\frac{1}{2}}((1,0)) = 2.$$

Im folgenden wollen wir eine Klasse von metrischen Räumen betrachen für die $(x,r) \mapsto \dim_H B_r(x)$ konstant ist. Ist dies der Fall so sagen wir, dass die Hausdorff-Dimension von (M,d) wohldefiniert ist.

Definition 5.36 (nicht-negative Krümmung)**.** Sei $\alpha \in [1,\infty)$. Der geodätische Raum (M,d) hat nicht-negative Krümmung $(\mathsf{NNK})_\alpha$, falls für alle Geodäten γ und η mit $\gamma_0 = \eta_0$ gilt

$$d(\gamma_t,\eta_t) \ge t^\alpha d(\gamma_1,\eta_1).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $(\mathsf{NNK})_\alpha$ die Bedingung $(\mathsf{NNK})_{\alpha'}$ für $\alpha' \ge \alpha$ impliziert, d.h. die Bedingung $(\mathsf{NNK})_1$ ist die stärkste.

Beispiel. Jeder genormte Raum mit strikt konvexer Norm ist nicht-negativ gekrümmt mit $\alpha = 1$.

Lemma 5.37. *Jeder nicht-negativ gekrümmter Raum ist nicht-verzweigend.*

Beweis. Angenommen γ und η sind Geodäten in (M,d) mit $\gamma_t = \eta_t$ für $t \in [0,t_0]$ mit $t_0 \in (0,1)$. Dann gilt für alle $s \in (t_0, 1]$ und $\lambda = \frac{t_0}{s}$

$$\lambda^\alpha d(\gamma_s, \eta_s) \leq d(\gamma_{t_0}, \eta_{t_0}) = 0$$

und somit $\gamma \equiv \eta$, d.h. (M,d) ist nicht-verzweigend. $\square$

Satz 5.38. *Sei (M,d) ein geodätischer Raum mit nicht-negativer Krümmung* $(\mathsf{NNK})_\alpha$*, dann gilt für $A \subset M$, $x \in M$ und $t \in (0,1)$*

$$t^{\alpha N}\mathcal{H}^N(A) \leq \mathcal{H}^N(A_{t,x}).$$

Beweis. Sei

$$F_{t,x} : M \to 2^M$$

definiert als

$$F_{t,x}(z) = e_1(e_t^{-1}(z)) = \{\gamma_1 \in M \mid \exists \gamma \in \mathsf{Geo}(M,d) : \gamma_0 = x, \gamma_t = z\}$$

Sei $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A_{t,x}$ mit $\operatorname{diam} V_i \leq \epsilon$, dann gilt für

$$U_i = \bigcup_{z \in V_i} F_{t,x}(z)$$

$$\operatorname{diam} U_i \leq t^{-\alpha} \operatorname{diam} V_i \leq t^{-\alpha}\epsilon.$$

und

$$\sum (\operatorname{diam} U_i)^N \leq t^{-\alpha N} \sum (\operatorname{diam} V_i)^N.$$

Daraus folgt sofort

$$\mathcal{H}^N_{t^{-\alpha}\epsilon}(A) \leq t^{-\alpha N}\mathcal{H}_\epsilon(A_{t,x})$$

und mit $\epsilon \to 0$

$$t^{\alpha N}\mathcal{H}^N(A) \leq \mathcal{H}^N(A_{t,x}).$$

$\square$

Korollar 5.39. *Die Hausdorff-Dimension eines nicht-negativ gekrümmten metrischen Raumes ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}^N(B_r(x)) = 0$ und $y \in M$, $R > 0$ gebeliebig. Dann gibt es ein t, so dass

$$(B_R(y))_{t,x} \subset B_r(x)$$

woraus folgt

$$0 \leq t^{\alpha N}\mathcal{H}^N(B_R(y)) \leq \mathcal{H}^N((B_R(y))_{t,x}) \leq \mathcal{H}^N(B_r(x)) = 0.$$

$\square$

Analog lässt sich zeigen, dass $\mathcal{H}^N(B_r(x))) = \infty$ für ein $x \in M$ und $r > 0$ genau dann, wenn $\mathcal{H}^N(B_R(y)) = \infty$ für alle $y \in M,\ R > 0$.

Korollar 5.40. *Ist $\mathcal{H}^N(B_r(x)) \in (0, \infty)$ für ein $x \in M$ und $r > 0$ dann gilt*

$$\mathcal{H}^N(U) \in (0, \infty)$$

für alle beschränkten, offenen Mengen $U \subset M$.

Wir sagen, dass das N-dimensionale Hausdorff-Maß nicht-trivial ist, wenn $\mathcal{H}^N(B_r(x)) \in (0, \infty)$ für alle $x \in M$ und $r > 0$.

Definition 5.41 (Bishop-Gromov-Volumenwachstum)**.** Ein metrischer Maßraum (M, d, m) erfüllt das Biship-Gromov-Volumenwachstum $\mathsf{BG}(0, \tilde{N})$, falls

$$\frac{\mathsf{m}(B_r(x))}{\mathsf{m}(B_R(x))} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^{\tilde{N}}$$

für alle $x \in M$ und $0 < r \leq R$.

Korollar 5.42. *Ist (M, d) nicht-negativ gekrümmt und $\mathcal{H}^N$ nicht-trivial, dann erfüllt $(M, d, \mathcal{H}^N)$ die $\mathsf{MCP}(0, \alpha N)$-Bedingung und insbesondere das Bishop-Gromov-Volumenwachstum $\mathsf{BG}(0, \alpha N)$.*

6 Analysis und Optimaler Transport

6.1 Hamilton-Jacobi-Halbgruppe

Im folgenden nehmen wir an, dass (M, d) ein beschränkt-kompakter metrischer Raum ist.

Definition 6.1 (Hamilton-Jacobi-Operator)**.** Wir definieren einen Operator Q_t, $t \geq 0$, auf Funktionen $f : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wie folgt

$$Q_t f(y) = \inf_{x \in M} \left\{ f(x) + \frac{d(x,y)^2}{2t} \right\}.$$

Bemerkung. (1) Es ist leicht zu sehen, dass $\varphi^{c_2}(y) = 2Q_1(-\frac{1}{2}\varphi)(y)$.

(2) Für $p \in (1, \infty)$ gibt es einen analogen Operator $Q_t^p f(y) = \inf_{x \in M} \left\{ f(x) + \frac{d(x,y)^p}{pt^{p-1}} \right\}$.

Lemma 6.2. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig mit Lipschitz-konstante L so gilt*

$$Q_t f(y) = \min_{x \in \bar{B}_{Lt}(y)} \left\{ f(x) + \frac{d(x,y)^2}{2t} \right\}.$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$Q_t f(y) = \lim_{n \to \infty} \left\{ f(x_n) + \frac{d(y, x_n)^2}{2t} \right\}.$$

Da $f(y) \geq Q_t f(y)$, können wir annehmen, dass auch $f(y) \geq f(x_n) + \frac{d(y,x_n)^2}{2t}$ gilt. Somit

$$\begin{aligned} 0 \leq f(y) - Q_t(y) &= \lim_{n \to \infty} \left\{ f(y) - f(x_n) - \frac{d(y, x_n)^2}{2t} \right\} \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \left\{ L d(y, x_n) - \frac{d(y, x_n)^2}{2t} \right\}, \end{aligned}$$

d.h. $d(y, x_n) \leq Lt$. Die Aussage folgt nun aus der Kompaktheit des abgeschlossenen Balles $\bar{B}_{Lt}(y)$. □

Lemma 6.3. *Es gilt*

$$Q_{t+s} f = Q_t(Q_s f).$$

Beweis. Da (M,d) geodätisch ist, gilt stets

$$\frac{d(x,y)^2}{2(t+s)} = \inf_{y\in M}\left\{\frac{d(x,y)^2}{2t} + \frac{d(y,z)^2}{2s}\right\},$$

so dass

$$\begin{aligned} Q_t(Q_s f)(z) &= \inf_{y\in M}\left\{\inf_{x\in M}\left\{f(x) + \frac{d(x,y)^2}{2s}\right\} + \frac{d(y,z)^2}{2t}\right\} \\ &= \inf_{x\in M}\left\{f(x) + \inf_{y\in M}\left\{\frac{d(x,y)^2}{2t} + \frac{d(y,z)^2}{2s}\right\}\right\} \\ &= \inf_{x\in M}\left\{f(x) + \frac{d(x,z)^2}{2(t+s)}\right\} = Q_{t+s}f(z). \end{aligned}$$

□

Definition 6.4 (Distanzfunktionen)**.** Sei f wie beim Hamilton-Jacobi-Operator, dann definieren wir

$$\begin{aligned} D^+(y,t) &= \sup \limsup_{n\to\infty} d(y,x_n) \\ D^-(y,t) &= \inf \liminf_{n\to\infty} d(y,x_n) \end{aligned}$$

wobei das Supremum bzw. Infimum jeweils über alle minimierenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q_t f(y) = \lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n) + \frac{d(y,x_n)^2}{2t}\right\}$$

genommen wird.

As der Definition folgt, dass $D^- \leq D^+$. Außerdem gelten folgende Aussagen.

Lemma 6.5. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist D^+ unterhalbstetig und D^- oberhalbstetig, $t \mapsto D^\pm(y,t)$ sind nicht-fallend und für fixes $x \in M$ gibt es eine abzählbare Menge $Q_y \subset [0,\infty)$, so dass $t \in [0,\infty)\backslash R_y$ gilt $D^+(y,t) = D^-(y,t)$.*

Beweis. Für $t < s$ seien $(x_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{n,s})_{n\in\mathbb{N}}$ Minimierer bzgl. $Q_t f(y)$ bzw. $Q_s(y)$. Dann gilt

$$f(x_{n,t}) + \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2t} \leq f(x_{n,s}) + \frac{d(y,x_{n,s})^2}{2t}$$

und

$$f(x_{n,s}) + \frac{d(y,x_{n,s})^2}{2s} \leq f(x_{n,t}) + \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2s}.$$

Da $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{s}$ folgt sofort

$$d(y,x_{n,t}) \leq d(y,x_{n,s})$$

und somit $D^+(x,t) \leq D^-(x,s)$. Da $D^- \leq D^+$ folgt sofort, dass $t \mapsto D^\pm(y,t)$ nicht-fallend ist. Daraus folgt auch, dass es eine abzählbare Menge R_y gibt, so dass $t \mapsto D^-(y,t)$ rechtsstetig für alle $t \in [0,\infty)\backslash R_y$ ist und deshalb

$$D^-(y,t) \leq D^+(y,t) \leq \inf_{s>t} D^-(y,s) = D^-(y,t).$$

Es bleibt zu zeigen, dass D^+ oberhalbstetig und D^- unterhalbstetig ist. □

Satz 6.6. *Die Abbildung $t \mapsto Q_t f$ ist lokal Lipschitz-stetig von $[0,\infty)$ nach $C(M)$ solange $D^\pm(x,t)$ beschränkt ist und es gibt eine abzählbare Menge $R_y \subset (0,\infty)$, so dass für alle $t \in (0,\infty)\backslash R_y$*

$$\frac{d}{dt} Q_t f(y) = -\frac{1}{2}\left[\frac{D^\pm(y,t)}{t}\right]^2.$$

Beweis. Sei $0 < t < s$, $(x_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{n,s})_{n\in\mathbb{N}}$ wie im vorigen Beweis. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q_s f(y) - Q_t f(y) &\leq \lim_{n\to\infty} f(x_{n,t}) + \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2s} - f(x_{n,t}) + \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2t} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2}\frac{t-s}{ts} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Q_s f(y) - Q_t f(y) &\geq \lim_{n\to\infty} f(x_{n,s}) + \frac{d(y,x_{n,s})^2}{2s} - f(x_{n,s}) + \frac{d(y,x_{n,s})^2}{2t} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{d(y,x_{n,s})^2}{2}\frac{t-s}{ts} \geq \frac{1}{2}\frac{D^-(y,s)(t-s))}{st}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $t \in (0,\infty)\backslash R_x$ für R_x wie im vorigen Beweis

$$\lim_{s\to t} \frac{Q_s f(y) - Q_t f(y)}{s-t} = -\frac{1}{2}\left[\frac{D^\pm(y,t)}{t}\right]^2.$$

Insbesondere gilt für alle

$$T < \inf\{t \in [0,\infty) \,|\, D^+(x,t) < \infty\}$$

ist $t \mapsto Q_t f(y)$ Lipschitz-stetig auf $[0,T]$. □

Lemma 6.7. *Es gilt*

$$\operatorname{Lip} Q_t f(y) \leq \frac{D^+(y,t)}{t}.$$

Beweis. Sei $y,z \in M$, $t \in [0,\infty)$ und $(x_{n,t})$ ein Minimierer für $Q_t f(y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{Q_t f(z) - Q_t f(y)}{d(z,y)} &\leq \frac{1}{d(z,y)} \lim_{n\to\infty} f(x_{n,t}) + \frac{d(z,x_{n,t})^2}{2t} - f(x_{n,t}) + \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2t} \\ &\leq \frac{1}{d(z,y)} \lim_{n\to\infty} \frac{(d(z,y)+d(y,x_{n,t}))^2}{2t} - \frac{d(y,x_{n,t})^2}{2t} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}(d(z,y)+d(y,x_{n,t})) \leq \frac{(d(z,y)+D^+(y,t))}{t}. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\frac{Q_t f(y) - Q_t f(z)}{d(z,y)} \leq \frac{(d(z,y) + D^+(z,t))}{t}.$$

Da D^+ oberhalbtstetig ist, folgt somit

$$\limsup_{z \to y} \frac{|Q_t f(z) - Q_t f(y)|}{d(z,y)} \leq \frac{D^+(y,t)}{t}.$$

□

Korollar 6.8. *Es gilt*

$$\partial_t Q_t f + (\operatorname{Lip} Q_t f)^2 \leq 0.$$

Insbesondere gilt für den relaxierten Anstieg $|\nabla Q f|_*$ *(bzgl.* $p = 2$*, siehe unten) gilt*

$$\partial_t Q_t f + \frac{1}{2} |\nabla Q_t f|^2 \leq 0.$$

Theorem 6.9. *Für alle* $y \in M$ *gibt eine abzählbare* $y \subset (0, \infty)$*, so dass*

$$\partial_t Q_t f + \frac{1}{2} |\nabla Q_t f|^2 = 0.$$

Beweis. KOMMT. □

6.2 L^2-Gradientenflüsse konvexer Funktionale

Der Raum der $L^2(\mathsf{m})$-Funktionen ist definiert als die Menge (genauer die Menge der Äquivalenzklassen) alle messbaren Funktionen bzgl. der Norm

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int f^2 d\mathsf{m}.$$

Man kann zeigen, dass $L^2(\mathsf{m})$ ein Hilbertraum ist, d.h. dass $\|\cdot\|$ eine vollständige Norm auf $L^2(\mathsf{m})$ ist, welche durch das Skalarproductk

$$(f,g) \mapsto \int f \cdot g d\mathsf{m}$$

induziert ist.

Sei $E : L^2(\mathsf{m}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein konvexes, unterhalbstetiges Funktional. Sei $D(E)$ die Menge aller $f \in L^2(\mathsf{m})$ mit $E(f) < \infty$. Eine Funktion $\ell \in L^2(\mathsf{m})$ ist ein Subgradient von E an $f \in L^2(\mathsf{m})$, falls für alle $g \in L^2(\mathsf{m})$

$$\int \ell(g - f) d\mathsf{m} + E(f) \leq E(g).$$

Sei $\partial E(f)$ die Menge der Subgradienten von E an f und $D(\partial E)$ die Menge aller $f \in L^2(\mathsf{m})$ mit $\partial E(f) \neq \varnothing$.

Es ist leicht zu sehen, dass $D(\partial$ konvex und abgeschlossen ist.

Lemma 6.10. *Für alle $f \in D(\partial E)$ gibt es genau ein Element $\ell \in \partial E(f)$ mit*

$$\|\ell\|_{L^2} = \inf_{\ell' \in \partial E(f)} \|\ell'\|_{L^2}.$$

Theorem 6.11. *Für alle konvex, unterhalbstetigen Funktionale E und jedes Element $f_0 \in \mathrm{cl}_{L^2}(D(E))$ gibt es eine Lipschitz-stetige Lösung $t \mapsto f_t$, $t \geq 0$, des Gradientenfluss-problems, so dass für fast alle $t \in (0, \infty)$*

$$\frac{d}{dt} f_t = -\ell$$

wobei ℓ das eindeutige Element in ∂E ist. Außerdem gilt für alle $t > 0$

$$\frac{d^+}{dt} f_t = -\operatorname{argmin}_{\ell \in \partial E(f_t)} \|\ell\|_{L^2(\mathsf{m})}.$$

und

$$\|f_t - g_t\|_{L^2} \leq \|f_0 - g_0\|_{L^2},$$

sowie

$$\frac{d}{dt} \|f_t - g\|_{L^2}^2 \leq E(g) - E(f_t).$$

6.3 Lokale Lipschitz-Konstante und der relaxierte Anstieg

Definition 6.12 (lokale Lipschitz-Konstante)**.** Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine (lokale) Lipschitz-stetige Funktion. Dann ist die lokale Lipschitz-Konstante $\operatorname{Lip} f(x)$ in $x \in M$ definiert als

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)}.$$

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{Lip} f(x) \leq \mathbf{Lip} f = \sup_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y,x)}$ für alle $x \in M$. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

Lemma 6.13. *Für jeden geodätischen Raum (M, d) gilt*

$$\|\operatorname{Lip} f\|_\infty \leq M \iff \mathbf{Lip} f \leq M.$$

Beweis. Die Aussage lässt sich leicht zeigen für Lipschitz-Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenem, zusammenhängendes Intervall $I \subset \mathbb{R}$: Da jede Lipschitz-Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ fast überall differenzierbar ist, gilt für fast alle $t \in I$

$$|f'(t)| = \operatorname{Lip} f(t).$$

und für alle $a < b \in I$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Somit folgt aus $\| \operatorname{Lip} f\|_\infty \le M$

$$|f(b) - f(a)| \le \int_a^b \operatorname{Lip} f(t)dt \le M|b-a|,$$

d.h. die Lipschitz-Konstante von f ist kleiner gleich M.

Im allgemeinen Falls folgt die Rückrichtung der Aussage direkt aus der Definition, so das lediglich die Hinrichtung bewiesen werden muss. Dazu sei $x_n, y_n \in M$, so dass

$$\mathbf{Lip} f = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(y_n) - f(x_n)|}{d(y_n, x_n)}.$$

Sei γ_n eine Geodäte zwischen x_n und y_n, dann gilt für $f_n = f \circ \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ebenfalls $\| \operatorname{Lip} f\|_\infty \le M d(y_n, x_n)$ und somit

$$\frac{|f(y_n) - f(x_n)|}{d(y_n, x_n)} = \frac{|f_n(1) - f(0)|}{d(y_n, x_n)} \le M.$$

Insbesondere gilt damit $\mathbf{Lip} f \le M$. □

Lemma 6.14. *Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende, Lipschitz-stetige C^1-Funktion, dann gilt*

$$\operatorname{Lip}(f+g)(x) \le \operatorname{Lip} f(x) + \operatorname{Lip} g(x)$$

und

$$\operatorname{Lip}(\varphi \circ f)(x) = |\varphi'(f(x))| \cdot \operatorname{Lip} f(x).$$

Da in $\mathbb{R}^n$ und auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten $|\nabla f| = \operatorname{Lip} f$ gilt, können wir die lokale Lipschitz-Konstante als Ersatz der Norm des Gradientens, oder besser der Norm des Differentials, betrachten. Auf glatten Räumen lassen sich mittels partieller Integrations und Vervollständigung einer Norm nun Sobolev-Räume definieren. Für metrische Räume ist dies auch möglich, jedoch muss dazu eine geeignete Definition von $f \mapsto \frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 d\mathsf{m}$ gefunden werden. Aufgrund der Sobolev-Einbettungssätze und deren Nützlichkeit in der Analysis, sollte das Funktional unterhalbstetig sein. Eine geeignete Definition ist deshalb folgende, welche nichts anderes ist als die unterhalbstetige Hülle des Funktionals $f \mapsto \frac{1}{2}\int (\operatorname{Lip} f)^2 d\mathsf{m}$.

Definition 6.15 (Cheeger-Energie)**.** Die Cheeger-Energie $\mathsf{Ch}_2 : L^2(\mathsf{m}) \to [0,\infty]$ ist definiert als

$$\mathsf{Ch}_2(f) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int (\operatorname{Lip} f_n)^2 d\mathsf{m} \,|\, f_n \to f \text{ in } L^2(\mathsf{m}) \text{ mit } f_n \in \operatorname{Lip}(M,d)\}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Cheeger-Energie tatsächlich durch die lokale Lipschitz-Konstante approximiert wird.

Satz 6.16. *Für alle $f \in D(\mathsf{Ch}_2)$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Lipschitz-Funktionen und eine eindeutige $L^2(\mathsf{m})$-Funktion $|\nabla f|_*$, so dass $f_n \to f$ in $L^2(\mathsf{m})$ und* $\operatorname{Lip} f \to |\nabla f|_*$ *in $L^2(\mathsf{m})$.*

Behauptung. Die Funktion $|\nabla f|_*$, genannt *relaxierter Anstieg*, ist ein Symbol für die Norm des Gradienten/Differentials einer Sobolev-Funktion. Im allgemeinen gibt es kein Objekt ∇f, welches den tatsächlichen Gradienten darstellt.

Korollar 6.17. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktion und $f \in D(\mathsf{Ch}_2)$, dann gilt*

$$|\nabla(\varphi \circ f)|_* = |\varphi' \circ f| \cdot |\nabla f|_*.$$

Lemma 6.18. *Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ (lokal) Lipschitz-stetig, $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende, konvexe Funktion und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $0 \leq \varphi' \leq 1$. Dann gilt für alle $x \in M$*

$$\psi(\operatorname{Lip} \tilde{f}(x)) + \psi(\operatorname{Lip} \tilde{g}) \leq \psi(\operatorname{Lip} f(x)) + \psi(\operatorname{Lip} g(x))$$

wobei

$$\tilde{f} = f + \varphi(g - f) \quad \textit{und} \quad \tilde{g} = g - \varphi(g - f).$$

Beweis. Seien $x_n \to x$ und $y_n \to x$, so dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip} \tilde{f}(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x)|}{d(x_n, x)} \\ \operatorname{Lip} \tilde{g}(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{g}(y_n) - \tilde{g}(x)|}{d(y_n, x)}. \end{aligned}$$

Da φ differenzierbar ist, gibt es ζ_n zwischen $g(x)-f(x)$ und $g(x_n)-f(x_n)$ und ξ_n zwischen $g(x) - f(x)$ und $g(y_n) - f(y_n)$, so dass

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n) &= f(x) - f(x_n) + \varphi(g(x) - f(x)) - \varphi(g(x_n) - f(x_n)) \\ &= f(x) - f(x_n) + \varphi'(\zeta_n)\left(g(x) - g(x_n) - (f(x) - f(x_n))\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_n) &= g(x) - g(y_n) - (\varphi(g(x) - f(x)) - \varphi(g(y_n) - f(y_n))) \\ &= g(x) - g(y_n) - \varphi'(\zeta_n)\left(g(x) - g(y_n) - (f(x) - f(y_n))\right). \end{aligned}$$

Da f und g stetig sind, gilt $g(x_n)-f(x_n) \to g(x)-f(x)$ sowie $g(y_n)-f(y_n) \to g(x)-f(x)$ und somit $\varphi'(\zeta_n), \varphi'(\xi_n) \to \varphi'(x) = \alpha \in [0, 1]$.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip} \tilde{f}(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n)|}{d(x, x_n)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} (1 - \varphi(\zeta_n)) \frac{|f(x_n) - f(x)|}{d(x_n, x)} + \varphi'(\zeta_n) \frac{|g(x) - g(x_n)|}{d(x_n, x)} \\ &\leq (1 - \alpha) \operatorname{Lip} f(x) + \alpha \operatorname{Lip} g(x) \end{aligned}$$

und analog

$$\operatorname{Lip} \tilde{g}(x) \leq \alpha \operatorname{Lip} f(x) + (1 - \alpha) \operatorname{Lip} g(x).$$

Da ψ konvex und nicht-fallend ist ist, erhalten wir

$$\psi(\operatorname{Lip}\tilde{f}(x)) \leq (1-\alpha)\psi(\operatorname{Lip} f(x)) + \alpha\psi(\operatorname{Lip} g(x))$$

und

$$\psi(\operatorname{Lip}\tilde{g}(x)) \leq \alpha\psi(\operatorname{Lip} f(x)) + (1-\alpha)\psi(\operatorname{Lip} g(x)),$$

woraus direkt die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 6.19. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht-fallend und kontrahierend, d.h. $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq |t-s|$ (und $\varphi(0) = 0$ falls $\mathsf{m}(M) = \infty$). Dann gilt für alle $f, g \in D(\mathsf{Ch}_2)$*

$$|\nabla \tilde{f}|_*^2(x) + |\nabla \tilde{g}|^2(x) \leq |\nabla f|_*^2(x) + |\nabla g|_*^2(x) \quad \textit{für } \mathsf{m}\textit{-fast alle } x \in M$$

wobei

$$\tilde{f} = f + \varphi(g-f) \qquad \tilde{g} = g - \varphi(g-f).$$

6.4 Der Laplace-Operator und der Wärmefluss

Definition 6.20 (Laplace-Operator)**.** Ist $f \in D(\partial\mathsf{Ch}_2)$ dann ist der Laplace-Operator $-\ell$, wobei ℓ gleich das Element kleinster $L^2(\mathsf{m})$-Norm in $\partial\mathsf{Ch}_2(f)$ ist, d.h.

$$\Delta f = -\operatorname{argmin}_{\ell \in \partial\mathsf{Ch}_2(f)} \|\ell\|_{L^2}.$$

Man kann zeigen, dass die Menge der $f \in D(\partial\mathsf{Ch}_2)$, so dass $\partial\mathsf{Ch}_2(f)$ genau ein Element enthält dicht in $D(\partial\mathsf{Ch}_2)$ ist. Diese Menge sei $D(\Delta)$..

Lemma 6.21. *Für all $g \in D(\mathsf{Ch}_2)$ und $f \in D(\partial\mathsf{Ch}_2)$ gilt*

$$-\int g\Delta f d\mathsf{m} \leq \int |\nabla f| \cdot |\nabla g| d\mathsf{m}$$

mit Gleichheit für $g = \varphi(f)$ und φ Lipschitz stetig. In dem Fall gilt dann

$$-\int \varphi(f)\Delta f d\mathsf{m} = \int \varphi'(f)|\nabla f|^2 d\mathsf{m}.$$

Beweis. Es gilt für $\ell \in \partial\mathsf{Ch}_2(f)$ gilt

$$\frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 d\mathsf{m} + \ell(\epsilon g) \leq \frac{1}{2}\int |\nabla(f+\epsilon g)|^2,$$

so dass

$$\frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 d\mathsf{m} - \int \epsilon g\Delta f d\mathsf{m} \leq \frac{1}{2}\int |\nabla(f+\epsilon g)|^2 d\mathsf{m}.$$

Dies ergibt dann

$$-\int g\Delta f d\mathsf{m} \leq \inf_{\epsilon>0}\int |\nabla f| \cdot |\nabla g| + \frac{\epsilon}{2}|\nabla g|^2 d\mathsf{m} = \int |\nabla f| \cdot |\nabla g| d\mathsf{m}.$$

Ist $g = \varphi(f)$ so gilt

$$\frac{1}{2\epsilon}\int |\nabla(f+\epsilon g)|^2 - |\nabla f|^2 d\mathsf{m} = \frac{1}{2\epsilon}\int (1+\epsilon\varphi'(f))^2|\nabla f|^2 - |\nabla f|^2 d\mathsf{m}$$
$$= \int \varphi'(f)|\nabla f|^2 + \frac{\epsilon}{2}(\varphi'(f))^2|\nabla f|^2 d\mathsf{m}$$

und damit für alle $\ell \in \partial\mathsf{Ch}_2(f)$

$$\int \ell(\varphi(f))d\mathsf{m} = \int \varphi'(f)|\nabla f|^2 d\mathsf{m}.$$

□

Lemma 6.22. *Für $f, g \in D(\partial\mathsf{Ch}_2)$ und Lipschitz-Funktionen φ mit $\varphi(0) = 0$ für $\mathsf{m}(M) = \infty$ gilt*

$$\int (\Delta g - \Delta f)\varphi(g-f)d\mathsf{m} \le 0.$$

Beweis. Sei $h = \varphi(g-f)$ dann gilt

$$\epsilon\int(\Delta f - \Delta g)h d\mathsf{m} \le -\epsilon\int \Delta f \cdot h d\mathsf{m} - \epsilon\int \Delta g \cdot (-h) d\mathsf{m}$$
$$\le \mathsf{Ch}_2(f+\epsilon h) - \mathsf{Ch}_2(f) + \mathsf{Ch}_2(g-\epsilon h) - \mathsf{Ch}_2(g).$$

Da für hinreichend kleine $\epsilon \ll 1$ die Funktion $\epsilon\varphi$ kontrahierend ist, ist nach Korollar 6.19 die rechte Seite kleiner gleich null. □

Lemma 6.23. *Ist m lokal beschränkt, so sind Lipschitz-Funktionen mit L^2-integrierbarer lokalen Lipschitz-Konstante dicht in $L^2(\mathsf{m})$, d.h. für alle $f \in L^2(\mathsf{m})$ gibt es $f_n \to f$ in $L^2(\mathsf{m})$ mit $f_n \in \mathrm{Lip}(M,d)$ und $\mathrm{Lip}\, f \in L^2(\mathsf{m})$. Insbesondere ist $D(\mathsf{Ch}_2)$ dicht in $L^2(\mathsf{m})$.*

Da $D(\mathsf{Ch}_2)$ dicht in $L^2(\mathsf{m})$ ist, ist der $L^2(\mathsf{m})$-Gradientenfluss von Ch_2 für alle $f \in L^2(\mathsf{m})$ wohldefiniert.

Definition 6.24 (Wäremfluss)**.** Der Wärmefluss mit Anfangeswert $f \in L^2(\mathsf{m})$ ist eine Lipschitz-stetige Kurve $t \mapsto f_t$ mit $f_t \to f$, $t \to 0$, so dass für fast alle $t \in (0,\infty)$

$$\frac{d}{dt}f_t = \Delta f_t.$$

Wir sagen $t \mapsto f_t$ ist eine Lösung des Wärmeflusses.

Korollar 6.25. *Die Menge $D(\Delta)$ ist dicht in $D(\mathsf{Ch}_2)$ und in $L^2(\mathsf{m})$.*

Beweis. Da $D(\Delta) \subset D(\mathsf{Ch}_2) \subset L^2(\mathsf{m})$, muss lediglich Dichtheit in $L^2(\mathsf{m})$ gezeigt werden. Laut dem Existenzsatz von Gradientenflüsse konvexer Funktionale gilt $f_t \in D(\Delta)$ für alle Lösungen des Wärmeflusses, somit wählen wir eine Lösung des Wärmeflusses $t \mapsto f_t$ mit Anfangswert f. Dann gilt $f_t \to f$ in $L^2(\mathsf{m})$ und $f_t \in D(\Delta)$. □

Satz 6.26. *Sei* $e : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *konvexer Funktion und*

$$E(f) := \int e(f) d\mathsf{m}$$

dann gilt für Lösungen des Wärmeflusses $t \mapsto f_t$ *und* $t \mapsto g_t$

$$E(f_t - g_t) \le E(f_0 - g_0)$$

und

$$\frac{d}{dt} E(f_t) = -\int e''(f_t) |\nabla f_t|_*^2 d\mathsf{m}.$$

Beweis. Wir zeigen das Resultat nur für $e \in C^2$: Da $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ lokal Lipschitz-stetig von $[0, \infty)$ nach $L^2(\mathsf{m})$ sind, ist auch $t \mapsto e(f_t - g_t)$ lokal Lipschitz-stetig und es gilt für fast alle $t \in [0, \infty)$

$$\frac{d}{dt} e(f_t - g_t) = e'(f_t - g_t) \frac{d}{dt}(f_t - g_t) = e'(f_t - g_t)(\Delta f_t - \Delta g_t),$$

so dass

$$\frac{d}{dt} E(f_t - g_t) \le 0.$$

Ist $g_0 \equiv 0$, dann folgt aus dem obigen Lemma

$$\frac{d}{dt} E(f_t) = \int e'(f_t) \Delta f_t d\mathsf{m} = -\int e''(f_t) |\nabla f_t|^2 d\mathsf{m}.$$

□

Korollar 6.27 (Masseerhaltung für endliche Referenzmaße)**.** *Ist* m *ein endliches Maß, dann gilt für jede Lösung* $t \mapsto f_t$ *des Wärmeflusses*

$$\int f_t d\mathsf{m} = \int f_0 d\mathsf{m}.$$

Beweis. Da $\mathsf{m}(M) < \infty$, kann der obige Satz für die konvexe Funktion $e(r) = r$ angewandt werden und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int f_t d\mathsf{m} = 0,$$

so dass

$$\int f_t d\mathsf{m} = \int f_0 d\mathsf{m}.$$

□

Bemerkung. Die Masseerhaltung gilt auch für lokal beschränkte Maße m, die nicht allzu schnell wachsen, d.h. es gibt ein C, so dass

$$\mathsf{m}(B_r(x_0)) \le C e^{Cr^2}$$

oder äquivalent: für ein $D > 0$ gilt

$$\int e^{-Dd(x,x_0)^2} d\mathsf{m}(x) < \infty.$$

Diese Wachstumsschrank ist bereits aus der Theorie der Diffusionsprozesse bekannt: Man kann zeigen, dass es Maß auf $\mathbb{R}^n$ gibt die schneller als e^{Cr^2} wachsen und deren Wärmefluss nicht masseerhaltend ist.

Korollar 6.28 (schwaches paraboliosches Maximumsprinzip). *Sind $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ Lösungen des Wärmeflusses mit $f_0 \leq g_0 + C$, dann gilt $f_t \leq g_t + C$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis. Da $e : r \mapsto \max\{r - C, 0\}$ konvex ist, gilt mit dem obigen Satz

$$E(f_t - g_t) \leq E(f_0 - g_0) = 0$$

und somit $f_t(x) \leq g_t(x) + C$ für m-fast alle $x \in M$. $\square$

Korollar 6.29 (Ableitung der Entropie). *Für $e(r) = r \log r$ und jede Lösung $t \mapsto f_t$ des Wärmeflusses gilt*

$$\frac{d}{dt} \int f_t \log f_t d\mathsf{m} = -\int \frac{|\nabla f_t|_*^2}{f_t} d\mathsf{m}.$$

Das Funktional

$$f \mapsto \int \frac{|\nabla f|_*^2}{f} d\mathsf{m}$$

wird Fisher-Information genannt und spielt eine zentrale Rolle in der Informationstheorie.

Korollar 6.30 ($L^p(\mathsf{m})$-Kontraktion). *Für $e(r) = r^p$, $p > 1$ und Lösungen $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ des Wärmeflusses gilt*

$$\|g_t - f_t\|_{L^p} \leq \|f_0 - g_0\|_{L^p}.$$

Aus dem Korollar folgt, dass wir den Wärmefluss für alle L^p-Räume mit $p > 1$ definieren können: Da $H_t : L^2(\mathsf{m}) \to L^2(\mathsf{m})$, definiert als $H_t f_0 = f_t$, den Raum $L^2(\mathsf{m}) \cap L^p(\mathsf{m})$, der dicht $L^p(\mathsf{m})$ ist, in sich selbst abbildet und eine $L^p(\mathsf{m})$-Kontraktion, können wir H_t eindeutig auf ganz $L^p(\mathsf{m})$ fortsetzen.

6.5 Das Kuwada-Lemma

Satz 6.31 (Kuwada-Lemma). *Angenommen (M, d) ist kompakt und $t \mapsto f_t$ der Wärmefluss mit $\int f_0 d\mathsf{m} = 1$ und $f_0 \geq 0$. Dann ist die Kurve $t \mapsto \mu_t = f_t \mathsf{m}$ absolut stetig in $\mathcal{P}_p(M)$ und es gilt*

$$|\dot{\mu}_t|^2 \leq \int \frac{|\nabla f_t|_*^2}{f_t} d\mathsf{m} \quad \textit{für fast alle } t \in [0, \infty).$$

Beweis. Da (M,d) kompakt ist, gilt für $\varphi = -\psi$ gilt

$$\frac{w_2(\mu,\nu)^2}{2} = \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}(M)} \int Q_1\varphi d\nu - \int \varphi d\mu.$$

Für $0 < t < s$ und $\ell = s - t$ ist $\tau \mapsto f_{t+\tau}, \tau \in [0,\ell]$, absolut stetig in $L^2(\mathsf{m})$, so dass

$$\tau \mapsto Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau}$$

auch absolut stetig ist. Da nun

$$\frac{Q_{\frac{\tau+h}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau+h} - Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau}}{h} = f_{t+\tau} \cdot \frac{Q_{\frac{\tau+h}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau} - Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau}}{h} + Q_{\frac{\tau+h}{\ell}}\varphi \frac{f_{t+\tau+h} - f_{t+\tau}}{h}$$

folgt für fast alle $\tau \in (0,\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\left(Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau}\right) = f_{t+\tau} \cdot \partial_\tau Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi + Q_{\frac{\tau}{\ell}}\partial_\tau f_{t+\tau},$$

so dass

$$\begin{aligned}
\int Q_1\varphi d\mu_s - \int \varphi d\mu_t &= \int Q_1\varphi \cdot f_s - \varphi \cdot f_t d\mathsf{m} \\
&= \int \int_0^\ell \frac{d}{d\tau}\left(Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot f_{t+\tau}\right) d\tau d\mathsf{m} \\
&\leq \int \int_0^\ell -\frac{|\nabla Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi|_*^2}{2\ell} f_{t+\tau} + Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot \Delta f_{t+\tau} d\tau d\mathsf{m}.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\int Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi \cdot \Delta f_{t+\tau} d\mathsf{m} &\leq \int |\nabla Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi|_* |\nabla f_{t+\tau}|_* d\mathsf{m} \\
&\leq \frac{1}{2\ell}\int |\nabla Q_{\frac{\tau}{\ell}}\varphi|_*^2 f_{t+\tau} d\mathsf{m} + \frac{\ell}{2}\int \frac{|\nabla f_{t+\tau}|^2}{f_{t+\tau}} d\mathsf{m}.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$w_2(\mu_s,\mu_t)^2 \leq 2\left[\int Q_1\varphi d\mu_s - \int \varphi d\mu_t\right] \leq \int \int_0^\ell \frac{|\nabla f_{t+\tau}|^2}{f_{t+\tau}} d\tau d\mathsf{m}.$$

Da

$$t \mapsto \int \frac{|\nabla f_t|^2}{f_t} d\mathsf{m}$$

absolut stetig ist, folgt somit

$$|\dot{\mu}_t|^2 \leq \limsup_{\ell \to 0} \int \int_0^\ell \frac{|\nabla f_{t+\tau}|^2}{f_{t+\tau}} d\tau d\mathsf{m} = \int \frac{|\nabla f_t|^2}{f_t} d\mathsf{m}.$$

$\square$

Satz 6.32. *Angenommen (M,d) ist kompakt. Dann gilt für alle Lipschitz-Funktionen $f : M \to [\epsilon, C]$ mit $\int f d\mathsf{m} = 1$ und $\mu = f\mathsf{m} \in \mathcal{P}_2(M)$*

$$|D^{-}\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}|(\mu) \leq \int |\nabla\sqrt{f}|_*^2 d\mathsf{m}.$$

Beweis. Sei

$$L(x,y) = \begin{cases} \frac{(\log f(x) - \log f(y))_+}{d(x,y)} & x \neq y \\ \frac{|D^- f|^2}{f} & x = y. \end{cases}$$

Für fixes x ist die Funktion $y \mapsto L(x,y)$ oberhalbstetig. Da f Lipschitz-stetig und von unten Beschränkt ist L ebenfalls beschränkt.

Sei nun $\mu_n \to \mu$ in $\mathcal{P}_2(M)$, so dass

$$|D^{-}\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}|(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu) - \mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_n)}{w_2(\mu,\mu_n)}.$$

Dann ist μ_n absolut stetig mit Dichte f_n. Weiterhin sei π_n eine optimale Kopplung.

Da $r \mapsto r\log r$ konvex ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu) - \mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_n) &= \int f\log f - f_n \log f_n d\mathsf{m} \\
&\leq \int \log f (f - f_n) d\mathsf{m} \\
&= \int \log f(x) d\mu(x) - \int \log f(y) d\mu_n(y) \\
&= \int \log f(x) - \log f(y) d\pi(x,y) \\
&\leq \int L(x,y) d(x,y) d\pi(x,y) \\
&\leq w_2(\mu,\mu_n) \left(\int L^2(x,y) d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= w_2(\mu,\mu_n) \left(\int \left(\int L^2(x,y) d\mu_{n,x}(y) \right) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

wobei $x \mapsto \mu_{n,x}$ die Desintegration von π bzgl. μ ist.

Weil

$$\int\int d(x,y)^2 d\mu_{n,x}(y) d\mu(x) \to 0$$

gilt ffür μ-fast alle $x \in M$

$$\int d^2(x,y) d\mu_{n,x}(y) \to 0,$$

so dass aufgrund der Beschränktheit von L^2 auch

$$\int_{M\setminus B_r(x)} L^2(x,y) d\mu_{n,x}(y) \to 0$$

für μ-fast alle $x \in M$.

Daraus schließen wir

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int L^2(x,y)d\mu_{n,x}(y) &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_r} L(x,y)d\mu_{n,x}(y) + \limsup_{n\to\infty} \int_{M\setminus B_r(x)} L(x,y)d\mu_{n,x}(y) \\ &\leq \limsup_{r\to 0} \sup_{y\in B_r(x)} L^2(x,y) = L^2(x,x)\end{aligned}$$

wobei wir die Oberhalbstetigkeit von $y \mapsto L(x,y)$ im letzten Schritt benutzt haben.

In Kombination mit Fatous Lemma ergibt dies

$$\begin{aligned}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) - \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_n)}{w_2(\mu,\mu_n)} \\ &\leq \int \limsup_{n\to\infty} \left(\int \left(\int L^2(x,y)d\mu_{n,x}(y)\right) d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu(x) \\ &\leq \left(\int L^2(x,y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \frac{|D^-f|_*^2}{f} d\mathsf{m}(x)\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

6.6 Entropiefluss = Wärmefluss

In $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner in Riemannschen Mannigfaltigkeit erfüllt der (negative) Gradientenfluss $(x_t)_{t\in[0,\infty)}$ einer Funktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folgende Gleichung

$$\dot{x}_t = -\nabla E(x_t).$$

In allgemeinen metrischen Räumen ist es weder möglich den Gradient ∇E exakt zu beschreiben noch eine sinnvolle Definition von $\dot{x}_t$ zu geben.

Jedoch lässt sich die Gleichung auch anders beschreiben. Ist $t \mapsto x_t$ eine absolut stetige Funktion, dann ist die Differentialgleichung des Gradientenflusses äquivalent zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x_t) &= -|\nabla E|(x_t) \cdot |\dot{x}_t| \\ |\nabla E|^2(x_t) &= |\dot{x}_t|,\end{aligned}$$

anstelle von $|\nabla E|$ kann auch $|dE|$, die Norm des Diffentials, genommen werden[1].

Dieses Gleichungssystem lässt auch in einer (Un-)Gleichung schreiben. Dazu machen wir folgende Beobachtung: Für alle absolut stetigen Kurven $t \mapsto y_t$ gilt

$$\frac{d}{dt}E(y_t) \geq -|dE| \cdot |\dot{y}_t| \geq -\frac{|dE|^2(y_t)}{2} - \frac{|\dot{y}_t|}{2}$$

[1] Das Differentials dE ist unabhängig der Norm auf dem (Ko-)Tangentialraum definiert, während ∇E erst durch Legendre-Transformation ermittelt werden muss. Weiterhin ist für allgemeine genormte Räume und Finslermannigfaltigkeiten zwar d linear, jedoch nicht ∇.

mit Gleichheit in der zweiten Ungleichung genau dann wenn $|dE|^2(y_t) = |\dot{y}_t|^2$. Somit reicht zu zeigen, dass $t \mapsto x_t$ folgende Ungleichung

$$\frac{d}{dt}E(x_t) \leq -\frac{|dE|^2(x_t)}{2} - \frac{|\dot{x}_t|}{2}.$$

oder in Integralform

$$E(x_t) \leq E(x_s) - \int_t^s \left[\frac{|dE|^2(x_r)}{2} + \frac{|\dot{x}_t|}{2}\right] dr.$$

Während $t \mapsto |\dot{x}_t|$ für absolut stetige Kurven auch in metrischen Räumen definiert ist, haben wir bisher $|dE|$ bzw. $|\nabla E|$ nur für Lipschitz- und Sobolev-Funktionen definiert. Da die Entropie jedoch den Wert ∞ für alle nicht absolut stetigen Maße annimmt und die nicht absolut stetigen Maße dicht im Raum der Maße sind, wäre $\operatorname{Lip}\mathsf{Ent}_\mathsf{m} = |\nabla \mathsf{Ent}_\mathsf{m}| = \infty$. Der Grund ist, dass die Richtung des größten Anstiegs stets ∞ ist.

Definition 6.33 (Abstieg)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $E : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine beliebige Funktion. Wir definieren den Abstieg von E als

$$|D^- E|(x) = \limsup_{y \to x} \frac{\max\{E(x) - E(y), 0\}}{d(x, y)}.$$

Die Menge der Punkte $x \in X$ mit $|D^- E|(x) < \infty$ sei $D(|D^- E|)$.

Für glatte und auch Lipschitz-Funktionen E in $\mathbb{R}^n$ zeigt der Gradient ∇E in Richtung des größten Anstiegs und $-\nabla E$ in Richtung des größten Abstiegs zeigt, d.h. wir hätten $|D^- E| = |D^-(-E)|$. Im folgenden werden wir sehen, dass $|D^- \mathsf{Ent}_\mathsf{m}| < \infty$ für eine dichte Menge von Maßen.

Um den Abstieg mit absolut stetigen Funktionen in Verbindung zu bringen brauchen wir folgende Eigenschaft von K-konvexen Funktionen.

Lemma 6.34. *Ist* $\mathsf{Ent}_\mathsf{m} : \mathcal{P}_2(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *K-konvex und unterhalbstetig, dann gilt*

$$|D^- \mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu) = \sup_{\nu \neq \mu} \left\{ \frac{\max\{\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) - \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu, \nu)} - K w_2(\mu, \nu) \right\}.$$

Weiterhin gilt für jede absolut stetige Kurve $t \mapsto \mu_t$, $t \in [0, 1]$, mit $\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) < \infty$,

$$\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_1) \leq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) + \int_0^1 |D^- \mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu_t) \cdot |\dot{\mu}_t| dt.$$

Bemerkung. Das Lemma gilt für allgemeine K-konvexe Funktionale auf geodätischen Räumen (X, d). Die zweite Eigenschaft wird in der Literatur *strong upper gradient* genannt.

Beweis. Da $\mathsf{Ent_m} \not\equiv \infty$, gilt die erste Aussage für $\mathsf{Ent_m}(\mu) = \infty$. Sei im folgenden $\mathsf{Ent_m}(\mu) < \infty$ und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}_2(M)$, so dass

$$C := \lim_{n\to\infty} \frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu_n), 0\}}{w_2(\mu,\nu_n)} - Kw_2(\mu,\nu_n) = \sup_{\nu\neq\mu}\left\{\frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu,\nu)} + Kw_2(\mu,\nu)\right\}.$$

Zunächst gilt stets

$$\begin{aligned} 0 \le |D^-\mathsf{Ent_m}|(\mu) &= \limsup_{\nu\to\mu} \frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu,\nu)} \\ &\le \limsup_{\nu\to\mu}\left\{\frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu,\nu)} + Kw_2(\mu,\nu)\right\} \\ &\le \sup_{\nu\neq\mu}\left\{\frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu,\nu)} + Kw_2(\mu,\nu)\right\}. \end{aligned}$$

Wäre nun $\mathsf{Ent_m}(\nu_{n'}) \ge \mathsf{Ent_m}(\mu)$ für eine Teilfolge $(\nu_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ von $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so folgt $|D^-\mathsf{Ent_m}| = C = 0$ und die Aussage gilt.

D.h. wir können annehmen, dass $\mathsf{Ent_m}(\nu_n) < \mathsf{Ent_m}(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $s \mapsto \nu_{n,s}$ eine Geodäte zwischen μ und ν_n. Die K-Konvexität von $\mathsf{Ent_m}$ ergibt

$$\mathsf{Ent_m}(\nu_{n,s}) \le (1-s)\mathsf{Ent_m}(\mu) + s\mathsf{Ent_m}(\nu_n) - Ks(1-s)w_2(\mu,\nu_n)^2.$$

Da $sw_2(\mu,\nu_n) = w_2(\mu,\nu_{n,s})$ folgt somit

$$\frac{\mathsf{Ent_m}(\nu_{n,s}) - \mathsf{Ent_m}(\mu)}{w_2(\mu,\nu_{n,s})} \le \frac{\mathsf{Ent_m}(\nu_n) - \mathsf{Ent_m}(\mu)}{w_2(\mu,\nu_n)} - K(1-s)w_2(\mu,\nu_n)^2.$$

Für $s \to 0$ gilt dann $\nu_{n,s} \to \mu$ und deshalb

$$\begin{aligned} \left[\frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu_n), 0\}}{w_2(\mu,\nu_n)} + Kw_2(\mu,\nu_n)\right] &\le \frac{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu_{n,s})}{w_2(\mu,\nu_{n,s})} \\ &\le \limsup_{\nu\to\mu} \frac{\max\{\mathsf{Ent_m}(\mu) - \mathsf{Ent_m}(\nu), 0\}}{w_2(\mu,\nu)} \\ &= |D^-\mathsf{Ent_m}|(\mu) \le C. \end{aligned}$$

Da mit $n \to \infty$ die rechte Seite gegen gegen C konvergiert, folgt die erste Aussage aus der obigen Ungleichung.

Ist nun $t \mapsto \mu_t$ absolut stetig so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathsf{Ent_m}(\mu_1) - \mathsf{Ent_m}(\mu_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{Ent_m}(\mu_{\frac{k+1}{n}}) - \mathsf{Ent_m}(\mu_{\frac{k}{n}}) \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} |D^-\mathsf{Ent_m}(\mu_{\frac{k+1}{n}})| w_2(\mu_{\frac{k+1}{n}}, \mu_{\frac{k}{n}}) - Kw_2(\mu_{\frac{k+1}{n}}, \mu_{\frac{k}{n}})^2. \end{aligned}$$

Da die erste Aussage impliziert, dass $|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|$ unterhalbstetig ist, ist $t \mapsto |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu_t)$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_1) - \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_{\frac{k+1}{n}})| w_2(\mu_{\frac{k+1}{n}}, \mu_{\frac{k}{n}}) - K w_2(\mu_{\frac{k+1}{n}}, \mu_{\frac{k}{n}})^2 \\ &\leq \int_0^1 |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu_t) \cdot |\dot{\mu}_t| dt.\end{aligned}$$

□

Die obigen Ausagen ermöglichen uns den Gradientenfluss von Ent_m wie folgt zu definieren.

Definition 6.35 (Energieverlustungleichung (EDI))**.** Angenommen Ent_m ist K-konvex. Dann erfüllt die absolut stetige $t \mapsto \mu_t$, $t \in [0, \infty)$ in $\mathcal{P}_2(M)$ die Energieverlustungleichung (EDI), falls für fast all $t \in (0, \infty)$

$$\frac{d}{dt}\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t) \leq -\frac{|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_t)}{2} - \frac{|\dot{\mu}_t|^2}{2}$$

oder äquivalent

$$\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t) \leq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \int_0^t \frac{|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r)}{2} + \frac{|\dot{\mu}_r|^2}{2} dr.$$

In dem Fall sagen wir die Kurve $t \mapsto \mu_t$ ist ein Gradientenfluss der Entropie Ent_m.

Bevor wir zeigen, dass der Wärmefluss ein Gradientenfluss der Entropie ist, benötigen wir folgende Aussage.

Lemma 6.36. *Angenommen (M, d) ist kompakt und Ent_m K-konvex. Dann gilt für alle $\mu \in D(|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|)$*

$$|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu) = \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m}$$

wobei $\mu = f\mathsf{m}$.

Beweis. Sei $t \mapsto f_t$ eine Lösung des Wärmeflusses mit $f_0 = f$, dann gilt wegen des Kuwada-Lemma (Satz 6.31) für $\mu_t = f_t\mathsf{m}$

$$\begin{aligned}\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) - \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t) &= \int_0^t \int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m} dr \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^t \int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m} dr + \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{\mu}_r|^2 dr \\ &\geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \left(\sqrt{\int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m}}\right) dr\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t |\dot{\mu}_r| dr\right]^2 \\ &\geq \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sqrt{\int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m}}\right) dr \cdot w_2(\mu, \mu_t),\end{aligned}$$

so dass aufgrund der Unterhalbstetigkeit der Fisher-Information $g \mapsto \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mathsf{m}$

$$\begin{aligned}\int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m} &\leq \liminf_{t\to 0} \int_0^t \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m} \\ &\leq \limsup_{t\to 0} \left[\frac{\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) - \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t)}{w_2(\mu,\mu_t)}\right]^2 \\ &\leq |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|(\mu).\end{aligned}$$

Wegen Satz 6.32 folgt somit für alle Lipschitz-Funktionen f mit $\epsilon \leq f \leq C$ und $f\mathsf{m} \in \mathcal{P}_2(M)$

$$|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu) = \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m}.$$

Es sei angemerkt, dass diese Menge von Maßen ist dicht in $\mathcal{P}_2(M)$.

Da nun

$$\int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m} = 4\mathsf{Ch}_2(\sqrt{f})$$

und können wir eine Folge von Maßen $\mu_n = f_n$ mit $\epsilon \leq f_n \leq C$, so dass $\sqrt{f_n} \to \sqrt{f}$ in $L^2(\mathsf{m})$, oder äquivalent $f_n \to f$ in $L^1(\mathsf{m})$ und

$$4\mathsf{Ch}_2(\sqrt{f_n}) \to 4\mathsf{Ch}_2(\sqrt{f}).$$

Weiterhin können wir annehmen, dass $\int f_n d\mathsf{m} = 1$ und somit gilt auch $\mu_n \to \mu$ in $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_2(M)$. Schließlich folgt aus der Unterhalbstetigkeit von $|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|$

$$\begin{aligned}\int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m} &\leq |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \frac{|\nabla f_n|^2}{f_n} d\mathsf{m} = \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mathsf{m}.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.37. *Es gilt*

$$|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \leq \frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu) + \frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\nu).$$

Beweis. Da $(x,y) \mapsto x^2/y$ konvex auf

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$$

ist und $f \mapsto |\nabla f|_*$ sublinear, ist auch

$$f \mapsto \int \frac{|\nabla f|_*^2}{f} d\mathsf{m}$$

konvex (bzgl. linearer Interpolation) und die Aussage folgt aus der obigen Identifikation.

□

Korollar 6.38. *Für jeden Anfangswert $\mu_0 = f_0\mathsf{m} \in \mathcal{P}_2(M)$ gibt es höchstens eine Lösung $t \mapsto \mu_t$ des Gradientenflussproblems der Entropie Ent_m.*

Beweis. Seien $t \mapsto \mu_t^i$, $i = 1; 2$, zwei Lösungen mit $\mu_0^1 = \mu_0^2$. Dann gilt für $\mu_t^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_t^1+\mu_t^2}{2}$

$$|\dot{\mu}_t^{\frac{1}{2}}|^2 \leq \frac{1}{2}|\dot{\mu}_t^1|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\mu}_t^2|^2$$

und

$$\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^1) + \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^2)$$

mit strikter Ungleichung falls $\mu_t^1 \neq \mu_t^2$. Da $t \mapsto \mu_t^{\frac{1}{2}}$ absolut stetig ist, gilt stets

$$\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^{\frac{1}{2}}) \geq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \int_0^t \frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}|\dot{\mu}_r^{\frac{1}{2}}|^2 dr.$$

Angenommen $\mu_t^1 \neq \mu_t^2$ für ein $t > 0$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^{\frac{1}{2}}) &< \frac{1}{2}\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^1) + \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t^2) \\
&\leq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r^1) + \frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r^2)\right] dr \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{1}{2}|\dot{\mu}_r^1|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\mu}_r^1|^2\right] dr \\
&\leq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \int_0^t \frac{1}{2}|D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}|\dot{\mu}_r^{\frac{1}{2}}|^2 dr,
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Theorem 6.39. *Ist (M, d, m) kompakt und Ent_m K-konvex in $\mathcal{P}_2(M)$, so ist jede Lösung $t \mapsto f_t$ des Wärmeflusses $\int f_0 d\mathsf{m} = 1$ und $f_0 \geq 0$ die eindeutige Lösungen des Gradientenflussproblems der Entropie Ent_m mit Anfangswert $\mu_0 = f_0\mathsf{m}$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_t) &= \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \int_0^t \int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m} dr \\
&\leq \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \int \frac{|\nabla f_r|^2}{f_r} d\mathsf{m} dr - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{\mu}_r|^2 dr \\
&= \mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu_0) - \frac{1}{2}\int_0^t |D^-\mathsf{Ent}_\mathsf{m}|^2(\mu_r) dr - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{\mu}_r|^2 dr,
\end{aligned}$$

d.h. $t \mapsto \mu_t$ ist ein Gradientenfluss der Entropie Ent_m. Da für jedes $f_0 \in L^2(\mathsf{m})$ eine Lösung des Wärmeflusses existiert, folgt die Eindeutigkeit sofort aus dem vorigen Korollar. □

6.7 Lineare Wärmeflüsse

Wir sagen der Wärmefluss ist linear, falls für alle Lösungen des Wärmeflusses $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ die (absolut stetige) Kurve

$$t \mapsto f_t + g_t$$

ebenfalls eine Lösung des Wärmeflusses ist.

Lemma 6.40. *Ist der Wärmefluss auf* (M, d, m) *linear, so ist* Ch_2 *ein quadratische Form.*

Bemerkung. Es lässt sich leicht zeigen, dass für quadratische Cheeger-Energien Ch_2, der Laplace-Operator und der Wärmefluss jeweils linear sind. Im linearen Fall wird die Cheeger-Energie häufig auch Dirichlet-Energie genannt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathsf{Ch}_2\left(\frac{f+g}{2}\right) + \mathsf{Ch}_2\left(\frac{f+g}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(f) + \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(g).$$

Dazu reicht es dies auf einer dichten Menge zu zeigen. Sei nun $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ Lösungen des Wärmeflusses. Dann gilt für fast alle $t \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f_t + g_t) &= \Delta f_t + \Delta g_t \\ &= \Delta(f_t + g_t) \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $t \mapsto f_t + g_t$ eine Lösung des Wärmeflusses ist, dann gilt für $f, g \in D(\mathsf{Ch}_2)$

$$\begin{aligned} \mathsf{Ch}_2(f) &= \lim_{t\to 0} \mathsf{Ch}_2(f_t) \\ \mathsf{Ch}_2(g) &= \lim_{t\to 0} \mathsf{Ch}_2(g_t). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$-\int (f_t \pm g_t)\Delta(f_t \pm g_t) = \int |\nabla(f_t \pm g_t)|_*^2 d\mathsf{m} = 2\mathsf{Ch}_2(f_t \pm g_t).$$

sowie für alle $t > 0$ mit $\Delta f_t + \Delta g_t = \Delta(f_t + g_t)$

$$\begin{aligned} -\int (f_t + g_t)\Delta(f_t + g_t)d\mathsf{m} + -\int (f_t - g_t)\Delta(f_t - g_t)d\mathsf{m} &= -2\int f_t \Delta f_t d\mathsf{m} - 2\int g_t \Delta g_t d\mathsf{m} \\ &\le 4\mathsf{Ch}_2(f_t) + 4\mathsf{Ch}_2(g_t) \end{aligned}$$

so dass

$$\mathsf{Ch}_2(\frac{f_t + g_t}{2}) + \mathsf{Ch}_2(\frac{f_t - g_t}{2}) \le \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(f_t) + \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(g_t).$$

Aufgrund der Unterhalbstetigkeit von Ch_2 folgt demnach

$$\mathsf{Ch}_2(\frac{f+g}{2}) + \mathsf{Ch}_2(\frac{f-g}{2}) \le \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(f) + \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(g).$$

Die gleiche Ungleichung gilt für $\tilde{f} = f + g$ und $\tilde{g} = f - g$, so dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(f) + \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(g) &= \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(\frac{\tilde{f}+\tilde{g}}{2}) + \frac{1}{2}\mathsf{Ch}_2(\frac{\tilde{f}-\tilde{g}}{2}) \\ &\leq \frac{1}{4}\mathsf{Ch}_2(\tilde{f}) + \frac{1}{4}\mathsf{Ch}_2(\tilde{g}). \\ &= \mathsf{Ch}_2(\frac{f+g}{2}) + \mathsf{Ch}_2(\frac{f-g}{2}).\end{aligned}$$

□

Da Ch_2 quadratisch ist, können wir eine Bilinearform $\mathcal{E} : D(\mathsf{Ch}_2) \times D(\mathsf{Ch}_2) \to \mathbb{R}$ auf $D(\mathsf{Ch}_2)$ definierten

$$2\mathcal{E}(f,g) = \mathsf{Ch}_2(f+g) - \mathsf{Ch}_2(f) - \mathsf{Ch}_2(g).$$

Sei nun $\ell_f \in \partial\mathsf{Ch}_2(f)$ und $\ell_g \in \partial\mathsf{Ch}_2(g)$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int(\ell_f + \ell_g)h d\mathsf{m} &\leq \mathsf{Ch}_2(f+h) - \mathsf{Ch}_2(f) + \mathsf{Ch}_2(g+h) - \mathsf{Ch}_2(g) \\ &= 2\mathcal{E}(f+g,h) + 2\mathsf{Ch}_2(h) = \mathsf{Ch}_2(f+g+h) - \mathsf{Ch}_2(h)\end{aligned}$$

und somit $\ell_f + \ell_g \in \partial\mathsf{Ch}_2(f+g)$. Da für $\ell \in \partial\mathsf{Ch}_2(f+g)$ und $\ell_f \in \partial\mathsf{Ch}_2(f)$ stets $\ell - \ell_f \in \partial\mathsf{Ch}_2(g)$, ist jedes Element in $\partial\mathsf{Ch}_2(f+g)$ von der Form $\ell_f + \ell_g$. Da alle Elemente $f, g \in D(\Delta)$ eindeutige Subgradienten bzgl. Ch_2 haben, ist demnach $D(\Delta)$ ein linearer (möglicherweise nicht vollständiger) Unterraum von $L^2(\mathsf{m})$ und

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g.$$

Lemma 6.41. *Für alle $t, s > 0$ gilt*

$$P_t(\Delta f_s) = \Delta f_{t+s}.$$

Insbesondere gilt

$$\Delta f_s \in D(\Delta)$$

für fast alle $s \in (0,\infty)$.

Beweis. Es gilt

$$\Delta f_{t+s} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_h f_{t+s} - f_{t+s}}{h} \quad \text{in } L^2(\mathsf{m})$$

und

$$\Delta f_s = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_h f_s - f_s}{h} \quad \text{in } L^2(\mathsf{m}),$$

so dass aufgrund der Stetigkeit von $P_t : L^2(\mathsf{m}) \to L^2(\mathsf{m})$

$$0 = \lim_{h\to 0^+} P_t\left(\frac{P_h f_s - f_s}{h} - \Delta f_s\right) = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{P_h f_{t+s} - f_{t+s}}{h} - P_t(\Delta f_s)\right] \quad \text{in } L^2(\mathsf{m})$$

und somit

$$P_t(\Delta f_s) = \Delta f_{t+s}.$$

□

Ähnlich wie beim relaxierten Anstieg $|\nabla f|_*$, welcher mittels Lokalisierung aus Ch_2 heraus definiert wird, ist es möglich die Bilinearform $\mathcal{E}$ ebenfalls lokal darzustellen, d.h. für alle $f, g \in D(\mathsf{Ch}_2)$ gibt es eine $L^1(\mathsf{m})$-integrierbare Funktion $\langle \nabla f, \nabla g \rangle$, so dass

$$\mathcal{E}(f,g) = \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mathsf{m}.$$

Die Abbildung $(f,g) \mapsto \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ ist linear in beiden Faktoren und man kann zeigen, dass auch die Kettenregel gilt.

Lemma 6.42. *Für $f, g \in D(\Delta)$ gilt*

$$\int f \Delta g d\mathsf{m} = \int g \Delta f d\mathsf{m}.$$

Beweis. Da

$$\mathsf{Ch}_2(f \pm \epsilon g) - \mathsf{Ch}_2(f) \geq \mp\epsilon \int g \Delta f d\mathsf{m}$$

und

$$\mathsf{Ch}_2(g \pm \epsilon f) - \mathsf{Ch}_2(g) \geq \mp\epsilon \int f \Delta g d\mathsf{m}$$

folgt

$$\begin{aligned} \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mathsf{m} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathsf{Ch}_2(f + \epsilon g) - \mathsf{Ch}_2(f)}{\epsilon} = - \int g \Delta f d\mathsf{m} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathsf{Ch}_2(g + \epsilon f) - \mathsf{Ch}_2(g)}{\epsilon} = - \int f \Delta g d\mathsf{m}. \end{aligned}$$

□

Satz 6.43. *Für $f, g \in L^2(\mathsf{m})$ gilt*

$$\int P_t f \cdot g d\mathsf{m} = \int f \cdot P_t g d\mathsf{m}.$$

6.8 Kuwada-Dualität für lineare Wärmeflüsse

Im folgenden sei (M, d, m) ein kompakter metrischer Maßraum mit linearem Wärmefluss. Wir betrachten den Wärmefluss als Familie von Abbildung $\{P_t : L^2(\mathsf{m}) \to L^2(\mathsf{m})\}_{t \geq 0}$, so dass $P_{t+s} = P_t \circ P_s$. Die Kontraktionseigenschaft und das parabolische Maximumsprinzip zeigen, dass P_t auch ein Operator auf $L^p(\mathsf{m})$ bzw. $L^\infty(\mathsf{m})$ ist, der außerdem Nicht-negativität erhält. Ist m endlich so erhält er auch die Maße. Im folgenden betrachten wir die Familie $\{P_t\}_{t \geq 0}$ als eine solche masseerhaltende Familie von Operatoren.

Da die absolute stetige Maße mit Dichte in $L^p(\mathsf{m})$ dicht in $\mathcal{P}(M)$ sind, ist es auch möglich P_t auf ganz $\mathcal{P}(M)$ zu definieren. Alternativ können wir folgende Konstruktion verwenden.

Definition 6.44. Der adjungierte Wärmefluss $\{H_t : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)\}_{t\geq 0}$ ist definiert als das eindeutige Maß $H_t\mu \in \mathcal{P}(M)$, für das

$$\int \varphi dH_t\mu = \int P_t\varphi d\mu \quad \text{für alle } \varphi \in C_b(M).$$

Es ist leicht zu sehen, dass H_t wohldefiniert ist. Außerdem gilt für $\mu = f\mathsf{m}$ mit $f \in L^2(\mathsf{m})$

$$H_t\mu = P_t f\mathsf{m}.$$

Dies folgt aus

$$\int \varphi dH_t\mu = \int P_t\varphi \cdot f d\mathsf{m} = \int \varphi \cdot P_t f d\mathsf{m}$$

für $\varphi \in C_b(M) \cap L^2(\mathsf{m})$ und dem Fakt, dass $C_b(M) \cap L^2(\mathsf{m})$ dicht in $C_b(M)$ ist. Durch Approximation gilt dies auch für allgemeinere Dichten $f \in L^p(\mathsf{m})$.

Aufgrund der Linearität ist es möglich $H_t\mu$ aus der Evolution der δ-Maße zu ermitteln, denn es gilt

$$H_t\mu = \int H_t\delta_x d\mu(x).$$

Als Abkürzung schreiben wir $H_{t,x} = H_t\delta_x$.

Lemma 6.45. *Angenommen für alle $x, y \in M$ gilt*

$$w_p(H_{t,x}, H_{t,y}) \leq e^{-Kt} d(x, y)$$

folgt

$$w_p(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_p(\mu, \nu).$$

Beweis. Sei π eine p-optimale Kopplung zwischen μ und ν und $\pi_{t,x,y}$ eine optimale Kopplung zwischen $H_{t,x}$ und $H_{t,y}$. Dann ist

$$\tilde{\pi} = \int \pi_{t,x,y} d\pi(x, y)$$

eine Kopplung zwischen $H_t\mu$ und $H_t\nu$ und es gilt

$$\begin{aligned} w_p(H_t\mu, H_t\nu)^p &\leq \int d^p(x, y) d\tilde{\pi}(x, y) \\ &= \int \int d^p(\tilde{x}, \tilde{y}) \pi_{t,x,y} d\pi(x, y) \\ &= \int w_p^p(H_t\mu, H_t\nu) d\pi(x, y) \\ &\leq e^{-Kt} \int d^p(x, y) d\pi(x, y) = e^{-Kt} w_p(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

Korollar 6.46. *Gilt für $p \in [1, \infty)$ und alle $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(M)$*

$$w_p(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_p(\mu, \nu)$$

so folgt

$$w_q(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_q(\mu, \nu)$$

für alle $q \leq p$ und alle $\mu, \nu \in \mathcal{P}_q(M)$.

Beweis. Bemerke

$$w_q(H_{t,x}, H_{t,y}) \leq w_p(H_{t,x}, H_{t,y}) \leq e^{-Kt} d(x, y).$$

□

Lemma 6.47. *Ist der Wärmefluss linear, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

- *für alle $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(M)$ und alle $t \geq 0$ gilt $w_1(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_1(\mu, \nu)$*
- *für alle $f \in \mathrm{Lip}(M, d)$ gilt $\mathbf{Lip} P_t f \leq e^{-Kt} \mathbf{Lip} f$.*

Beweis. Die Kantorovich-Dualität zeigt

$$\begin{aligned} w_1(H_{t,y}, H_{t,x}) &= \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1(M,d)} \int f dH_{t,x} - \int f dH_{t,y} \\ &= \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1(M,d)} \int P_t f d\delta_x - \int P_t f d\delta_y \\ &= \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1(M,d)} P_t f(x) - P_t f(y). \end{aligned}$$

Gilt nun

$$w_1(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_1(\mu, \nu)$$

so folgt für alle $f \in \mathrm{Lip}_1(M, d)$

$$|P_t f(x) - P_t f(y)| \leq e^{-Kt} d(x, y)$$

und damit $\mathbf{Lip} P_t f \leq e^{-Kt}$. Durch Skalierung folgt, dann $\mathbf{Lip} P_t f \leq e^{-Kt} \mathbf{Lip} f$ für alle Lipschitz-Funktionen.

Falls hingegen für alle Lipschitz-Funktionen f

$$\mathbf{Lip} P_t f \leq e^{-Kt} \mathbf{Lip} f$$

gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w_1(H_t\mu, H_t\nu) &= \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1(M,d)} P_t f(x) - P_t f(y) \\ &\leq \sup_{\tilde{f} \in \mathrm{Lip}_{e^{-Kt}}(M,d)} \int \tilde{f} d\mu - \int \tilde{f} d\nu \\ &= e^{-Kt} \sup_{f \in \mathrm{Lip}(M,d)} \int f d\mu - \int f d\nu = w_1(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

Man kann nun zeigen, dass auch folgende Dualität gilt:

Lemma 6.48. *Ist der Wärmefluss linear, dann sind folgende Aussagen äquivalent für alle* $p, q \in [1, \infty]$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- *für alle* $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(M)$ *und alle* $t \geq 0$ *gilt* $w_p(H_t\mu, H_t\nu) \leq e^{-Kt} w_p(\mu, \nu)$
- *für alle* $f \in D(\mathsf{Ch}_2)$ *mit* $|\nabla f| \in L^p(\mathsf{m})$ *gilt* $|\nabla P_t f|^p \leq e^{-pKt} P_t(|\nabla f|^p)$.

Definition 6.49 (Bakry-Émery-Bedinung $\mathsf{BE}(K, \infty)$)**.** Ein metrischer Raum mit linearem Wärmefluss erfüllt die Bakry-\'Emery-Bedingung $\mathsf{BE}(K, \infty)$, falls für alle $f \in D(\mathsf{Ch}_2)$ mit $|\nabla f| \in L^p(\mathsf{m})$ gilt

$$|\nabla P_t f|^p \leq e^{-pKt} P_t(|\nabla f|^p).$$

6.9 Evolutionsvarationsungleichung.

In $\mathbb{R}^n$ kann gezeigt werden, dass $t \mapsto x_t$ ein Gradientenfluss einer konvexen Funktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, falls für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\|y - x_t\|^2}{2} + E(x_t) \leq E(y).$$

Man kann so gar zeigen, dass diese Ungleichung den Gradientenfluss konvexer Funktionen charakterisiert.

Definition 6.50 (Evolutionsvariationsungleichung)**.** Eine absolut stetig Kurve $t \mapsto \mu_t$ in $\mathcal{P}_2(M)$ erfüllt die Evolutionsvariationsungleichung $(\mathsf{EVI})_K$ der Entropie, falls für alle $\nu \in \mathcal{P}_2(M)$

$$\frac{d}{dt} \frac{w_2(\mu_t, \nu)^2}{2} + K w_2(\mu_t, \nu)^2 + \mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_t) \leq \mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\nu).$$

Satz 6.51. *Existiert für eine dichte Menge an* $\mu \in \mathcal{P}_2(M)$ *eine Kurve* $t \mapsto \mu_t$ *welche die Evolutionsvariationsungleichung erfüllt, so ist* $\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}$ K*-konvex.*