EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 10

Aufgabe 30

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die nicht konvergiert. Zeigen Sie, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossen ist.

(b) Gilt $x_n \to x$, dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ (überdeckungs)kompakt.

Aufgabe 31

Für einen lokal kompakten, topologischen (Hausdorff) Raum (X,τ), sei $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung mit Topologie

$$\tilde{\tau} = \tau \cup \{U \cup \{\infty\} \,|\, U = X\backslash K, K \,\text{kompakt in}\, X\}.$$

Zeige Sie bitte, dass folgende Aussagen gelten

(a) $\tilde{\tau}$ ist eine Topologie auf $\tilde{X}$.

(b) Die natürliche Einbettung $i : X \hookrightarrow \tilde{X}$ ist stetig und injektiv.

(c) $\tilde{X}$ ist (überdeckungs)kompakt (Hinweis: Ist K kompakt in X, dann ist $i(K)$ kompakt in X).

(d) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in X genau dann, wenn die Folge $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen ∞ konvergiert.

Aufgabe 32

Sei (M,d) beschränkt-kompakt und $\tilde{M}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Man kann zeigen, dass es eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\tilde{M}$ gibt mit Topologie $\tau_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}$. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf M. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\{i_*\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig straff in $\mathcal{P}(\tilde{M})$.

(b) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig straff in $\mathcal{P}(M)$, genau dann wenn jeder Häufungspunkt $\tilde{\mu}$ von $(i_*\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\tilde{\mu}(\{\infty\}) = 0$. Anders ausgedrückt, die Folge (μ_n) ist *nicht* konvergent, wenn sie Masse verliert.

Aufgabe 33

Zeigen Sie für $\mu,\nu \in \mathcal{P}(M)$ gilt

$$\sup_{A\in\mathcal{B}} |\mu(A)-\nu(A)| = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int \chi_{M\times M\backslash\Delta}(x,y)d\pi(x,y),$$

wobei

$$\chi_{M\times M\backslash\Delta}(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y. \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathcal{B}} |\mu(A)-\nu(A)|$$

eine Metrik auf $\mathcal{P}(M)$ ist. Diese wird die Totale-Variationsmetrik genannt. Sind die Topologien $\tau_{d_{LP}}$ und $\tau_{d_{TV}}$ äquivalent, d.h. gilt $d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$ genau dann, wenn $d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$? Zeigen Sie diese Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel. Betrachte dazu die Folge $\mu_n = \frac{1}{\lambda^n(B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{0}))}\lambda^n|_{B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{0})}$.

Aufgabe 34

Sei (M, d) eine vollständiger, metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgende Metrik, genannt Beschränkt-Lipschitz-Metrik,

$$w_{BL}(\mu, \nu) = \sup\{\int f d\mu - \int f d\nu \mid \operatorname{Lip}_d f, \sup |f| \leq 1\}$$

eine Metrik auf $\mathcal{P}(M)$ mit der selben Topologie wie d_{LP} ist, d.h. $\tau_{w_{BL}} = \tau_{d_{LP}}$, wobei

$$\operatorname{Lip}_d f = \sup_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)}$$

Finden Sie dazu eine geeignete Kostenfunktion, die eine Metrik auf M ist und nutzten Sie, die Tatsache, dass für den metrischen Raum $(M, \tilde{d})$ die 1-Wasserstein-Metrik $\tilde{w}_1$ wie folgt gegeben ist

$$\tilde{w}_1(\mu, \nu) = \sup\{\int f d\mu - \int f d\nu \mid \operatorname{Lip}_{\tilde{d}} f \leq 1\},$$

wobei $\operatorname{Lip}_{\tilde{d}}$ die Lipschitz-Konstante bzgl. $\tilde{d}$ ist.

Aufgabe 35

Sei (M, d) beschränkt-kompakt und nicht-kompakt, $\mu \in \mathcal{P}_p(M)$ und $x_n \to \infty$. Wir definieren die Folge von Maßen $\mu_n = (1 - \lambda_n)\mu + \lambda_n \delta_{x_n}$ für $\lambda_n \in [0, 1]$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt
$$w_p(\mu, \mu_n)^p = \lambda_n w_p(\mu, \delta_{x_n})^p.$$

(b) Für geeignetes λ_n gilt
$$w_p(\mu, \mu_n) = 1.$$
Im folgenden wählen wir λ_n, so dass dies gilt.

(c) Die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ, aber $(w_p(\mu, \mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zwangläufig gegen 0.

(d) Ist $p > 0$ und $q \in (0, p)$, dann gilt
$$\int d(x_0, x)^q d\mu_n(x) \leq \int d(x_0, x)^q d\mu(x) + \lambda_n d(\delta_{x_n}, \delta_{x_0})^q.$$

(e) Weiterhing gilt
$$\lambda_n d(\delta_{x_n}, \delta_{x_0})^q = \frac{d(\delta_{x_n}, \delta_{x_0})^q}{d(\delta_{x_n}, \delta_{x_0})^p} \to 0,$$
so dass
$$\limsup_{n \to \infty} \int_{M \setminus B_R(x_0)} d(x_0, x)^q d\mu_n(x) \leq \limsup_{n \to \infty} \limsup \int_{M \setminus B_R(x_0)} d(x_0, x)^q d\mu(x).$$

(f) Ist $p > 0$ und $q \in (0, p)$, dann konvergiert $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen μ in $\mathcal{P}_q(M)$, d.h. $w_q(\mu_n, \mu) \to 0$.

Aufgabe 36
Ist (M,d) ein beschränkt-kompakter, metrischer Raum, so ist für $\mu,\nu\in\mathcal{P}_p(M)$, $p\geq 1$, die Menge der t-Mittelpunkte

$$M_t(\mu,\nu)=\{\mu_t\in\mathcal{P}_p(M)\,|\,\frac{w_p(\mu,\mu_t)}{t}=\frac{w_p(\mu_t,\nu)}{1-t}=w_p(\mu,\nu)\}$$

kompakt in $\mathcal{P}_p(M)$.

Aufgabe 37
Ist (M,d) nicht-verzweigend, so gilt

$$D(x_0)\subset\mathrm{Cut}(x_0),$$

wobei $\mathrm{Cut}(x_0)$, die Menge der Schnittpunkte

$$\mathrm{Cut}(x_0)=e_1(e_0^{-1}(x_0))\backslash\bigcup_{t\in[0,1)}e_t(e_0^{-1}(x_0)$$

und $D(x_0)$ gegeben als

$$D(x_0)=\{x\in M\,|\,\exists\gamma,\gamma'\in(e_0,e_1)^{-1}(x_0,x):\gamma\neq\gamma'\}$$

ist die Menge der Punkte, welche durch zwei Geodäten erreichbar ist. D.h. jeder Punkt in $D(x_0)$ ist bereits ein Schnittpunkt. Zusatzfrage: Gibt es andere Punkte, wenn ja wie sehen diese aus?

Aufgabe 38
Seien $(M_i,d_i)_{i\in I}$ kompakte geodätische Raume und $K_i\subset M_i$ kompakte Teilmengen, so dass es Isometrien $\mathcal{I}_{i,j}:K_i\to K_j$ gibt, d.h. $\mathcal{I}_{i,j}$ ist bijektiv, $\mathcal{I}_{i,k}=\mathcal{I}_{j,k}\circ\mathcal{I}_{i,j}$, $\mathcal{I}_{i,i}=\mathrm{id}$ und es gilt

$$d_i(x_i,y_i)=d_j(\mathcal{I}_{i,j}(x_i),\mathcal{I}_{i,j}(y_i)).$$

Auf $\amalg M_i$ definieren wir eine Äquivalenzklasse $\sim$ wie folgt,

$$x\sim y:\Leftrightarrow\begin{cases}x=y & \exists i\in I:x\in M_i\backslash K_i\\ \mathcal{I}_{i,j}(x)=y & \exists i,j\in I:x\in K_i,y\in K_j.\end{cases}$$

Die Menge M ist nun die Menge der Äquivalenzklassen auf $\amalg M_i$. Bildlich erhält man M indem man die Räume M_i an den Stellen K_i zusammenklebt. Aus diesem Grund werden wir häufig missbräuchlich annehmen, dass

$$M=K\cup\bigcup_{i\in M}M_i$$

wobei K alle K_i gleichzeitig repräsentiert, d.h. für jedes $x\in M$ existiert ein i mit $x\in M_i$ und für $x\in K$ gilt sogar $x\in K_j$, $j\in I$.
Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $d:M\times M\to[0,\infty)$

$$d(x,y)=\begin{cases}\inf_{z\in K}\{d(x,z)+d(z,y)\} & x\in M_i,y\notin M_i\\ d(x,y) & x,y\in M_i\end{cases}$$

eine geodätische Metrik auf M und M kompakt ist genau dann, wenn die Indexmenge endliche ist.
Beispiel: Den Tripod erhält man, indem man $M_i=[0,1]=[0_i,1_i]$ und $K_i=\{0_i\}$ wählt.

Sei X eine nicht-abzählbare, wohl-geordnetete Menge mit minimalem und maximalem Element, d.h. es gibt eine Ordnung $<$, so dass für alle $\alpha \neq \beta \in X$ entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$. Außerdem gibt es ein Elemente $0, \omega \in X$ mit $0 < \alpha < \omega$ für alle $\alpha \in X \backslash \{0, \omega\}$. Aufgrund der Ordnung, sind offene Intervalle (α, β) wohldefiniert und man sagt nun U ist offen in X genau dann, wenn

$$U = \bigcup_{(\alpha,\beta)\subset U} (\alpha, \beta) \cup \bigcup_{[0,\beta)\subset U} [0, \beta) \cup \bigcup_{(\alpha,\omega]\subset U} (\alpha, \omega].$$

Schriftliche Abgabe am 12.12.2016 vor der Vorlesung.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.