



Optimaler Transport

Wintersemester 16/17

17.10.2016

Übungsblatt 11

Aufgabe 39

[8 Punkte]

Seien X_0 und X_1 kompakte Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die uniformen Verteilungen von X bzw. Y . Sei außerdem die Verschiebungsinterpolierte zwischen μ_0 und μ_1 durch $\mu_t := [\mu_0, \mu_1]_t$ für alle $t \in [0, 1]$ gegeben. Wir definieren die Minkowski-Summe $X + Y$ von zwei Mengen via

$$X + Y := \{x + y : (x, y) \in X \times Y\}.$$

Zeigen Sie nun folgende Aussagen:

- (a) Der Träger von μ_t definiert als S_t ist für jedes t enthalten in der Minkowski-Summe $(1-t)X_0 + tX_1$. Insbesondere gilt also

$$\mathcal{L}^n(S_t) \leq \mathcal{L}^n((1-t)X_0 + tX_1).$$

- (b) Das Funktional

$$\mathcal{D} \ni f \mapsto E_1(f) := - \int_{\mathbb{R}^n} f^{1-\frac{1}{n}}(x) \, dx$$

ist verschiebungskonvex.

Hinweis: Argumentieren Sie, wieso der Beweis aus der Vorlesung auch für dieses Funktional durchgeht.

- (c) Es gilt die folgende Form der *Brunn-Minkowski* Ungleichung

$$\mathcal{L}^n((1-t)X_0 + tX_1)^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\mathcal{L}^n(X_0)^{\frac{1}{n}} + t\mathcal{L}^n(X_1)^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

für jedes $t \in [0, 1]$.

Hinweis: Benutzen Sie die Jensensche Ungleichung für die Funktion $x \mapsto x^{1-\frac{1}{n}}$ und (a)

- (d) Schließen Sie daraus die klassische *Brunn-Minkowski* Ungleichung

$$\mathcal{L}^n(X_0 + X_1)^{\frac{1}{n}} \geq \mathcal{L}^n(X_0)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(X_1)^{\frac{1}{n}}. \quad (2)$$

Schriftliche Abgabe am 16.01.2017 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre.