EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **16.01.2017**

Übungsblatt 12

Aufgabe 40 [8 Punkte]

Sei (M, d, m) ein nicht-verzweigender geodätischer Maßraum, der die starke $\mathsf{CD}(K,\infty)$-Bedinung erfüllt, d.h. das Entropiefunktional bzgl. m definiert als

$$\mathrm{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu) = \begin{cases} \int f \log f d\mathsf{m} & \text{falls } \mu \ll \mathsf{m}, \text{ d.h. } \mu = f\mathsf{m} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist K-konvex in $\mathcal{P}_2(M)$, sprich für alle Geodäten $t \mapsto \mu_t$ gilt

$$\mathrm{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_t) \leq (1-t)\mathrm{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_0) + t\mathrm{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_1) - Kt(1-t)w_2(\mu_0,\mu_1)^2.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $S_t = \operatorname{supp} \mu_t$ und $\mu_i = \frac{1}{\mathsf{m}(S_i)}\mathsf{m}\big|_{S_i}$ gilt

$$\log \mathsf{m}(S_t) \geq (1-t)\log \mathsf{m}(S_0) + t\log \mathsf{m}(S_1) + Kt(1-t)\Theta_K(S_0,S_1)$$

wobei

$$\Theta_K(A,B) = \begin{cases} \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y) & K \geq 0 \\ \sup_{x\in A, y\in B} d(x,y) & K < 0. \end{cases}$$

(b) Ist $\mathsf{m}(S_1) \in (0,\infty)$, dann gilt für alle $f \in L^1(\mathsf{m})$ mit $0 \leq f \leq C$

$$\int f \log f dm \leq C \log C\mathsf{m}(S_1).$$

(c) Ist π eine optimale Kopplung zwischen $\mu_0 = f_0 m$ und $\mu_1 = f_1 m$ mit $f_0 \equiv \mathrm{const} \cdot \chi_{S_0}$ und $f_1 \leq C{\cdot}\chi_{S_1}$ dann gilt

$$\log \mathsf{m}(\Gamma_t) \geq (1-t)\log \mathsf{m}(\Gamma_0) - tC\log C\mathsf{m}(\Gamma_1) + Kt(t-1)\Theta_K(S_0,S_1)$$

wobei $\Gamma = \operatorname{supp}\pi$ eine c_2-zyklisch monotone Menge ist. (Bemerkung: Nach Annahme gilt $\Gamma_0 = S_0$, $\Gamma_1 = S_1$ und $S_t \subset \Gamma_t$).

(d) Für Γ gilt

$$\lim_{t\to 0} \mathsf{m}(\Gamma_t) = \mathsf{m}(\Gamma_0).$$

(e) (Zusatzaufgabe 2 Punkte) Schließen Sie, dass für alle $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(M)$ mit $\mu_0, \mu_1 \ll \mathsf{m}$ jede optimale Kopplung $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$ durch eine Transportabbildung induziert ist, d.h. es gibt eine Borel-Abbildung $T : M \to M$, so dass

$$\pi = (\mathrm{id} \times T)_* \mu_0.$$

(Hinweis: Nutzen Sie die Idee der Vorlesung)

Aufgabe 41 [6 Punkte]

Sei (M, d) eine metrischer Raum.

(a) Sei $f : M \to M'$ L-Lipschitz stetig, d.h. für alle $x \in M$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$f(B_\epsilon(x)) \subset B_{L\epsilon}(f(x)).$$

Zeigen Sie, dass für alle $N \in [0, \infty)$

$$\mathcal{H}^N(f(A)) \leq L^N \mathcal{H}^N(A).$$

und somit

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A.$$

(b) Sei $g : M \to M'$ K-co-Lipschitz stetig, d.h. für alle $x \in M$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$g(B_\epsilon(x)) \supset B_{K\epsilon}(g(x)).$$

Zeigen Sie, dass für alle $N \in [0, \infty)$

$$\mathcal{H}^N(A) \leq K^{-N} \mathcal{H}^N(g(A)).$$

und somit

$$\dim_H A \leq \dim_H f(A).$$

Schriftliche Abgabe am 23.01.2017 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.