EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **23.01.2017**

Übungsblatt 12

Aufgabe 42 [2 Punkte]

Für alle $r \in (0, \infty)$ gilt

$$\lim_{q \to 2} \frac{r^{2-q} - 1}{2 - q} = \ln r.$$

Aufgabe 43 [8 Punkte]

Sei $p \in (1, \infty)$ und Ch_p die p-te Cheeger-Energie definiert als

$$\mathrm{Ch}_p(f) = \frac{1}{p} \int |\nabla f|^p d\mathsf{m}.$$

Man kann zeigen, dass Ch_p konvex und unterhalbstetig ist. Sei nun der p-Laplace-Operator definiert als

$$\Delta_p f = -\operatorname{argmin}_{\ell \in \partial \mathrm{Ch}_p(f)} \|\ell\|_{L^2(\mathsf{m})}.$$

Die Menge $D(\mathrm{Ch}_p)$ sind alle $f \in L^2(\mathsf{m})$ mit $\mathrm{Ch}_p(f) < \infty$ und $D(\Delta_p) \subset D(\mathrm{Ch}_p)$, so dass $\partial \mathrm{Ch}_p)(f) \neq \varnothing$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es somit einen L^2-Gradientenfluss von Ch_p gibt, so dass für fast alle $t \in (0, \infty)$

$$\frac{d}{dt} f_t = \Delta_p f_t.$$

Man kann zeigen, dass für glatte Funktionen

$$\Delta_p f = \mathrm{div}_{\mathsf{m}}(|\nabla f|^{p-2} \nabla f).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Ist $f \in D(\Delta_p)$ und $g \in D(\mathrm{Ch}_p)$ dann gilt

$$-\int \Delta_p f \cdot g d\mathsf{m} \leq -\int |\nabla g| \cdot |\nabla f|^{p-1} d\mathsf{m}.$$

2. Ist φ eine Lipschitz-Funktion (mit $\varphi(0) = 0$, falls $\mathsf{m}(M) = \infty$) dann gilt für $f, g \in D(\Delta_p)$

$$\int (\Delta_p g - \Delta_p f) \varphi(g - f) d\mathsf{m} \leq 0.$$

3. Für alle konvexen C^2-Funktionen $e : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $e(0) = 0$, falls $\mathsf{m}(M) = \infty$, gilt

$$E(f_t - g_t) \leq E(f_0 - g_0)$$

sowie für fast alle $t \in (0, \infty)$

$$\frac{d}{dt} E(f_t) = -\int e''(f_t) |\nabla f_t|^p d\mathsf{m}.$$

wobei $t \mapsto f_t$ und $t \mapsto g_t$ Lösungen des p-Wärmeflusses sind.

4. Die Ableitung entlang des p-Wärmeflusses von

$$f \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(3-q)(2-q)} \int f^{3-q} - f d\mathsf{m} & q \notin \{2,3\} \\ \int f \log f & q = 2 \end{cases}$$

für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist gleich

$$\mathbf{F}_p(f) = -\int \frac{|\nabla f|^p}{f^{q-1}} d\mathsf{m}.$$

Aufgabe 44 [6 Punkte]

Sei F eine Norm auf dem Vektorraum V. Dann können wir auf dem Vektorraum V^* der linearen Funktionale auf V eine Norm F^* wie folgt definieren

$$F^*(\alpha) = \sup\{|\alpha(v)| \mid F(v) \le 1\}.$$

Zeige folgende Aussagen:

1. F^* ist eine Norm auf V^* und für endlich-dimensionale V gilt $(F^*)^* = F$.
2. Ist V endlich-dimensional und F strikt konvex, dann gibt es genau ein $v_\alpha \in V$ mit

$$F^*(\alpha)^2 = F(v_\alpha)^2 = \alpha(v_\alpha).$$

Schriftliche Abgabe am 30.01.2017 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.