EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **30.01.2017**

Übungsblatt 14

Aufgabe* 44 [4 Punkte]

Falls $r_n \in (0,1)$ eine Folge mit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n^2 < \infty$$

dann

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \log(1-r_n) > -\infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n < \infty.$$

Nutze

$$\log(1-x) \le -x \quad \text{für alle } x \in (0,\infty)$$

und für hinreichend kleine $x \ge 0$ gilt

$$\log(1-x) \ge -x - x^2.$$

Aufgabe* 45 [4 Punkte]

Sei $C_{n+1} \subset C_n \subset [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, eine induktiv konstruierte Folge von Mengen: Gegeben $r_n \in (0,1)$ und $C_1 = [0,1]\backslash(\frac{1-r_1}{2}, \frac{1+r_1}{2})$, d.h. C_1 besteht aus 2^1 gleichlangen Intervallen. Die Konstruktion $n \to n+1$ ist wie folgt: C_n besteht aus 2^n gleichlangen Intervallen $\{[a_i^n, b_i^n]\}_{i=0}^{2^n-1}$ der Länge ℓ_n und Mittelpunkt m_i^n. Dann besteht C_{n+1} aus den 2^{n+1} Intervallen

$$I_{2i}^{n+1} = I_i^n \backslash [m_i - r_n \frac{\ell_n}{2}, b_i^n]$$
$$I_{2i+1}^{n+1} = I_i^n \backslash [a_i^n, m_i + r_n \frac{\ell_n}{2}],$$

d.h. wir entfernen von jedem Intervall I_i^n das mittlere Intervall der Länge $r_n \ell_n$ und erhalten jeweils zwei neue Intervall I_{2i}^{n+1} und I_{2i+1}^{n+1} der gleichen Länge $\ell_{n+1} = (1-r_n)\frac{\ell_n}{2}$. Zeige die folgenden Aussagen:

1. $\mathcal{L}^1(C_n) = \Pi_{i=1}^n (1-r_i)$
2. Für $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, genannt Cantor-Menge bzgl. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\mathcal{L}^1(C) = \Pi_{i=1}^\infty (1-r_i)$.
3. Angenommen $\sum r_n^2 < \infty$. Zeige $\mathcal{L}^1(C) > 0$ genau dann, wenn $\sum r_n < \infty$. Eine solche Cantor-Menge mit $\mathcal{L}^1(C) > 0$ wird *fette Cantor-Menge* genannt. (Hinweis: Nutze $\log \mathcal{L}^1(C_n) \to \log \mathcal{L}^1(C_n)$ und die vorige Aufgabe).

*Die *Aussagen* der Aufgaben mit * sind freiwillig.

Aufgabe* 46 [2 Punkte]

Sei C eine Cantor-Menge. Man kann zeigen, dass für jede Cantor-Menge ist es für jede Cantor-Menge C und jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Partition $\{A_i\}_{i=1}^N$, $C = \cup_{i=1}^N A_i$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass $B_\delta(A_i) \cap B_\delta(A_j) = \varnothing$ für $i \neq j$, wobei

$$B_\delta(A) = \bigcup_{x \in A} B_\delta(x).$$

Zeige folgende Aussagen:

1. Jede Lipschitz-Funktion f gleichmäßig approximierbar durch Lipschitz-stetige lokal konstante Funktionen.
2. Ist g lokal konstant, d.h. für alle $x \in C$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $g(y) = g(x)$ für $|x - y| < \epsilon$. Insbesondere gilt $\operatorname{Lip} f(x) = 0$.
3. Schlussfolge zunächst, dass $\mathsf{Ch}_2(f) = 0$ für alle Lipschitz-Funktionen f.
4. Zeige schließlich, dass $\mathsf{Ch}_2 \equiv 0$, d.h. die Cheeger-Energie auf Cantor-Mengen ist stets trivial.

Schriftliche Abgabe am 06.02.2017 vor der Vorlesung.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.

*Die *Aussagen* der Aufgaben mit * sind freiwillig.