EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 [4 Punkte]
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : A \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz konstante $\mathrm{Lip}(\varphi)$.
Wir definieren die Abbildung $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ via

$$\bar{\varphi}(x) := \inf_{a \in A} \{\varphi(a) + \mathrm{Lip}(\varphi)\,|x - a|\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie bitte:

(a) Es gilt $\bar{\varphi} \equiv \varphi$ auf A.

(b) Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist Lipschitz stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Schließen Sie aus diesen Resultaten, dass es für Lipschitz-stetige Funktionen $\varphi : A \to \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Fortsetzung $\bar{\varphi}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ gibt. Können Sie ihre Lipschitz-Konstante $\mathrm{Lip}(\bar{\varphi})$ durch die von φ abschätzen?

Aufgabe 2 [4 Punkte]
Seien X und Y metrische Räumen ausgestattet mit zwei Maßen μ auf X und ν auf Y und $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung. Wir sagen ν ist das Bildmaß unter T auf Y, $\nu = T\#\mu$, falls

$$\nu[A] = T_*\mu[A] := \mu[T^{-1}(A)]$$

für alle Borel-Mengen $A \in \mathcal{B}(Y)$. Zeigen Sie bitte die Äquivalenz von (Lemma 2.1 der Vorlesung):

(a) $\nu = T_*\mu$

(b) $\int_X f(T(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y f(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ für alle $f \in L^1(\mathrm{d}\nu)$.

Aufgabe 3 [4 Punkte]
Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie bitte, dass φ lokal Lipschitz-stetig ist, d.h. φ eingeschränkt auf alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 4 [4 Punkte]
Sei wiederum $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Sei zusätzlich $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie bitte folgende Aussagen:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x), y - x \rangle.$$

Wie lässt sich diese Aussage geometrisch interpretieren?

(b) Die Hessische erfüllt $D^2\varphi \geq 0$, d.h. $D^2\varphi(x)$ ist eine positiv definite Matrix für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Es gelten folgende Abschätzungen

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}(x)} |\varphi| \leq C(n) \fint_{B_r(x)} |\varphi(y)| \, \mathrm{d}y$$

und

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}(x)} |\nabla\varphi| \leq \frac{C(n)}{r} \fint_{B_r(x)} |\varphi(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Hier ist

$$\fint_{\Omega} \varphi(y) \, \mathrm{d}y := \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(y) \, \mathrm{d}y.$$

Schriftliche Abgabe am 24.10.2016 vor der Vorlesung.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.