



Optimaler Transport

Wintersemester 16/17

24.10.2016

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

[4 Punkte]

Sei $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen zwei mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie bitte, die Funktion φ ist genau dann konvex, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften gilt:

- (a) Die Hessische $D^2\varphi$ ist auf ganz A positiv definit.
- (b) Für alle $x, y \in A$ gilt $\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x), y - x \rangle$.

Schließen Sie nun aus (b), dass für konvexes φ

$$\langle \nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y), x - y \rangle \geq 0$$

für alle $x, y \in A$ gilt, d.h. $\nabla\varphi$ ist monoton.

Aufgabe 6

[6 Punkte]

Für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Mengenfunktion

$$\partial\varphi(x) := \{b \in \mathbb{R}^n : \varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle b, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Man nennt sie auch **Subgradient** von φ . Zeigen Sie bitte:

- (a) Eine Funktion φ ist genau dann konvex, wenn $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$ für alle x .
- (b) Eine konvexe Funktion φ ist genau dann differenzierbar an einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn $\partial\varphi(x_0) = \{b_0\}$. Es gilt $b_0 = \nabla\varphi(x_0)$.
- (c) Ist φ konvex, so gilt für alle $b_1 \in \partial\varphi(x_1)$ und $b_2 \in \partial\varphi(x_2)$:

$$\langle b_2 - b_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0,$$

d.h. die Monotonie aus Aufgabe 5 überträgt sich auf den Subgradienten.

Aufgabe 7

[4 Punkte]

Für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, die nicht konstant gleich ∞ ist, definieren wir die **Legendre-Transformierte** $\varphi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ via

$$\varphi^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, y \rangle - \varphi(x) \}.$$

Zeigen Sie bitte folgende Eigenschaften von φ^* :

- (a) Die Legendre-Transformierte φ^* ist konvex und unterhalbstetig und es gilt $\langle x, y \rangle \leq \varphi(x) + \varphi^*(y)$ für alle x, y .
- (b) Ist φ konvex und unterhalbstetig, so gilt $\langle x, y \rangle = \varphi(x) + \varphi^*(y)$ genau dann, wenn $y \in \partial\varphi(x)$.
- (c) $\varphi_1 \leq \varphi_2$ impliziert $\varphi_1^* \geq \varphi_2^*$.

(d) Es gelten folgende Äquivalenzen

- φ ist konvex und unterhalbstetig
- $\varphi = \psi^*$ für eine Funktion ψ , die nicht konstant gleich ∞ ist.
- $\varphi^{**} := (\varphi^*)^* = \varphi$.

Nehmen Sie der Einfachheit halber $\varphi(x) < \infty$ für alle x an und benutzen sie Aufgabenteil (b).

(e) Ist φ konvex und unterhalbstetig, so gilt $\langle x, y \rangle = \varphi(x) + \varphi^*(y)$ genau dann, wenn $x \in \partial\varphi^*(y)$.

Aufgabe 8

[2 Punkte]

Berechnen Sie bitte die Legendre-Transformierten von

- $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \langle a, x \rangle + b$ für $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{p}|x|^p$ für $1 \leq p < \infty$.
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(\alpha x)$ mit $0 < \alpha \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie bitte den Subgradienten $\partial\varphi(0)$ von $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp(x+1) & \text{für } x < -1 \\ |x| & \text{für } x \in [-1, 1] \\ \exp(1-x) & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Ist φ in 0 differenzierbar? Wie verhält sich Ihr Ergebnis im Vergleich zu Aufgabe 6 (b)?

Aufgabe^f 9

[1 Punkt]

Benutzen Sie Aufgabe 8 und 7 (a), um folgenden Spezialfall der **Youngschen Ungleichung** zu beweisen:
Seien $1 < p, q < \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Schriftliche Abgabe am 31.10.2016 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre.

^fDie Aufgaben mit ^f sind freiwillig und zählen nicht in die Gesamtpunktzahl.