EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 3

Aufgabe 10 [4 Punkte]

Sei $X = Y = \mathbb{R}^n$ und $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}\nu(y) = g(y)\mathrm{d}y$ für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. μ und ν sind absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes auf R^n. Sei zusätzlich T ein C^1-Diffeomorphismus mit $T\#\mu = \nu$. Zeigen Sie bitte, dass T die folgende nichtlineare Differentialgleichung löst

$$f(x) = g\left(T\left(x\right)\right)\left|\det\left(\nabla T\left(x\right)\right)\right|$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Testen Sie mit einer Funktion $\varphi \in L^1(\mathrm{d}\nu)$ und benutzen Sie dann Aufgabe 2 und den Transformationssatz für Lebesgue-Integrale.

Aufgabe 11 [4 Punkte]

Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \leq |x_1 - y_2|^2 + |x_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

Wir definieren die Geraden $\gamma_1(t) := ty_1 + (1-t)x_1$ und $\gamma_2(t) := ty_2 + (1-t)x_2$.
Zeigen Sie bitte, es gilt $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ für alle $t \in [0, 1]$, außer wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. In diesem Fall gilt $\gamma_1 \equiv \gamma_2$.

Hinweis: Falls es t_0 gibt mit $\bar{x} := \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, so berechnen Sie $|x_1 - \bar{x}|^2 + |\bar{x} - y_2|^2$, um eine Abschätzung herzuleiten die (1) widerspricht. Die Youngsche Ungleichung aus Aufgabe 9 hilft.

Aufgabe 12 [4 Punkte]

In der Situation von Aufgabe 11 zeigen Sie bitte, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \leq \max\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right\}|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \tag{2}$$

für jedes $t \in (0, 1)$. Folgern Sie nun, dass für jedes $t_0 \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq \max\left\{\frac{1}{t_0}, \frac{1}{1-t_0}\right\}|\gamma_1(t_0) - \gamma_2(t_0)|$$

erfüllt ist. Lässt sich die Aussage aus Aufgabe 11 aus (2) herleiten?

Hinweis: Berechnen Sie ähnlich wie in Aufgabe 11 $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ und benutzen Sie (1).

Schriftliche Abgabe am 7.11.2016 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.