EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 [4 Punkte]

Seien X, Y zwei metrische Räume und $\nu \in P(Y)$ und $\mu \in P(X)$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße.
Zeigen Sie bitte, das Maß $\pi := (\mathrm{Id} \times T)_{\#}\mu$ ist genau dann eine Kopplung zwischen μ und ν, wenn $T_{\#}\mu = \nu$. Dabei gilt für alle Testfunktionen $\xi \in L^1(X \times Y)$

$$\int_{X \times Y} \xi(x, y)\, \mathrm{d}\pi(x, y) = \int_X \xi(x, T(x))\, \mathrm{d}\mu(x)$$

nach Aufgabe 2.

Aufgabe 14 [4 Punkte]

Für einen metrischen Raum (M, d) definiere wir die Menge von Maßen

$$\mathcal{P}^{(N)}(M) := \{\mu \in P(M) \mid \forall A \in \mathcal{B}(M) :\, \mu(A) \cdot N \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie bitte folgende Aussagen

(a) Die Menge $\mathcal{P}^{(N)}(M) \subset (P(M), d_{LP})$ ist abgeschlossen.

(b) Die Menge $(\mathcal{P}^{(1)}(M), d_{LP})$ ist isometrisch zu $(M, \min\{1, d\})$. Finden Sie dazu eine geeignete Darstellung der Maße $\mu \in \mathcal{P}^{(1)}(M)$.

Hinweis: $\min\{1, d\}$ ist eine Metrik auf M, die die gleiche Topolgie wie d liefert.

Aufgabe 15 [4 Punkte]

Sei $k : [0, \infty) \to [0, M]$ stetig und monoton auf $(0, \infty)$. Wir definieren die Kostenfunktion $c(x, y) := k(|x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie bitte, dass es genau dann eine optimale Kopplung zwischen beliebigen $\mu \in P(\mathbb{R})$ und $\nu \in P(\mathbb{R})$, wenn

$$k(0) \le \liminf_{x \to 0} k(x),$$

d.h. wenn k unterhalbstetig in 0 ist.

Hinweis: Eine Richtung wurde bereits in der Vorlesung behandelt. Nehmen Sie für die Rückrichtung an, dass k nicht unterhalb stetig ist in der 0, also $k(0) > 0$ aber $\liminf_{x\to 0} k(x) = 0$. Zeigen Sie dann $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} c(x, y)\, \mathrm{d}\pi(x, y) > 0$ für alle $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Es gilt aber $C(\mathcal{L}^1_{[0,1]}, \mathcal{L}^1_{[0,1]}) = \inf_{\pi\in\Pi} \int c\, \mathrm{d}\pi = 0$,wobei $\mathcal{L}^1_{[0,1]}$ das Lebesguemaß ist auf $[0, 1]$.

Schriftliche Abgabe am 14.11.2016 vor der Vorlesung.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.