



Optimaler Transport

Wintersemester 16/17

17.10.2016

Übungsblatt 5

Aufgabe 16

[4 Punkte]

Sei φ eine konvexe Funktion und $\mu \in P(\mathbb{R}^n)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^n$, welches absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes $\mathcal{L}^n$ ist. Zeigen Sie bitte, dann gilt

$$(\nabla\varphi\#\mu)[A] = \mu[\partial\varphi^*(A)]$$

für alle Borel-Mengen $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Inklusion $(\nabla\varphi)^{-1}(A) \subset \partial\varphi^*(A)$ mittels der Äquivalenz von Aufgabe 7 b) und e). Die umgekehrte Inklusion folgt daraus, dass $M := \partial\varphi^*(A) \setminus (\nabla\varphi)^{-1}(A)$ eine Lebesgue Nullmenge ist, denn ist $x \in M$, so ist φ dort nicht differenzierbar.

Aufgabe 17

[2 Punkte]

Wir nennen eine Menge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ **zyklisch monoton**, falls für alle $m \geq 1$ und alle $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in \Gamma$

$$\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_{i-1}|^2 \quad (1)$$

gilt. Hier gilt die Konvention $y_0 = y_m$. Zeigen Sie bitte, die Bedingung (1) ist äquivalent zu der Bedingung

$$\sum_{i=1}^m \langle y_i, x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0,$$

wobei $x_{m+1} = x_1$.

Aufgabe 18

[4 Punkte]

Sei φ eine konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie bitte, die Menge

$$\text{Graph}(\partial\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in \partial\varphi(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

ist zyklisch monoton.

Aufgabe 19

[4 Punkte]

Zeigen Sie bitte, dass jede zyklisch monotone Menge Γ in dem Graph des Subgradienten einer konvexen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ enthalten ist, die nicht konstant gleich ∞ ist.

Hinweis: Definieren Sie für beliebiges $(x_0, y_0) \in \Gamma$: $\varphi(x) := \sup\{\langle y_m, x - x_m \rangle + \dots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle, m \in \mathbb{N}, (x_i, y_i) \in \Gamma\}$. Die zyklische Monotonie zeigt $\varphi(x_0) \leq 0$ also ist φ nicht identisch ∞ . Zeigen Sie dann $\varphi(z) \geq \alpha + \langle y, z - x \rangle$ für alle $\alpha < \varphi(x)$.

Schriftliche Abgabe am 21.11.2016 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre.