EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 7

Aufgabe 22

Ziel dieser Übungsaufgabe ist es eine Anwendung von Breniers Theorem über die Existenz von Transportabbildungen (Korollar 3.22 aus dem Skript) zu entwickeln. Wir wollen zeigen, dass für konvexes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand folgende Ungleichung gilt. Das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel sei durch ω_n gegeben. Dann gilt

$$n\omega_n^{\frac{1}{n}} \mathrm{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq \mathrm{Vol}(\partial\Omega), \tag{1}$$

wobei $\mathrm{Vol}(\partial\Omega)$ das Oberflächenvolumen vom Ω ist. Wir gehen dazu wie folgt vor

(a) Zeigen Sie bitte, für eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt die Arithmetisch-Geometrische Ungleichung:

$$\det(A)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\mathrm{Spur}(A). \tag{2}$$

[4 Punkte]

(b) Finden Sie eine konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodass fast überall

$$\frac{1}{\omega_n}\det(D^2\varphi) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \tag{3}$$

gilt. Benutzen Sie dazu Breniers Theorem (Korollar 3.22 und der Abschnitt danach) und Aufgabe 13 für geschickt gewählte Maße μ, ν (uniforme Verteilungen auf geeigneten Mengen) und nehmen Sie an, die Abbildung T aus dem Theorem ist glatt und bijektiv. [4 Punkte]

(c) Leiten Sie bitte aus (a) und (b) die Ungleichung

$$n\omega_n^{\frac{1}{n}} \mathrm{Vol}(\Omega)^{1-\frac{1}{n}} \leq \int_\Omega \Delta\varphi \,\mathrm{d}x \tag{4}$$

her. [1 Punkt]

(d) Zeigen Sie nun, dass die Ungleichung (1) gilt, in dem Sie (4) mit dem Divergenz-Theorem und der Beschränktheit des Bildes von $\nabla\varphi$ kombinieren. [3 Punkte]

(e) Ist die Ungleichung scharf? Können Sie die Fälle von Gleichheit in (1) charakterisieren?

[4 Punkte]

Schriftliche Abgabe am 05.12.2016 vor der Vorlesung.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.