



## Optimaler Transport

Wintersemester 16/17

17.10.2016

### Übungsblatt 8

#### Aufgabe 23

[8 Punkte]

Sei  $\|\cdot\|$  eine strikt konvexe Norm auf  $\mathbb{R}^n$  (Alternativ  $\|\cdot\|$  ist die euclidische Norm) und  $\mathcal{L}^n$  das  $n$ -dimensionale Lebesgues-Maß. Außerdem sei für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in [0, 1]$  die folgende Abbildung  $\Phi_{x,t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert

$$\Phi_{x,t}(y) = x + t(y - x).$$

Zeigen Sie bitte folgende Aussagen:

- (a) (*Ohtas Maßkontraktionseigenschaft*) Für alle beschränkten Borel-Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $N \in [n, \infty)$  gilt

$$t^N \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(\Phi_{x,t}(A)).$$

- (b) (*Sturms Maßkontraktionseigenschaft*) Für alle nicht-negativen  $\rho_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(x) d\mathcal{L}^n(x) = 1$  und  $N \in [n, \infty)$  gilt

$$\int \rho_t^{1-\frac{1}{N}} d\mathcal{L}^n \geq t \int \rho_1^{1-\frac{1}{N}} d\mathcal{L}^n$$

wobei  $\rho_t$  die Dichte des absolut-stetigen Maßes  $\mu_t = (\Phi_{t,x})_* \mu_1$  mit  $\mu_1 = \rho_1 \mathcal{L}^n$  ist.

*Hinweis:* Zeige dies erst für  $\mu_1 = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \mathcal{L}^n|_A$ , dann via Approximation durch einfache Funktionen für alle Dichten  $\rho$ .

#### Aufgabe 24

[8 Punkte]

Angenommen  $(M, d)$  ist ein vollständiger, geodätischer Raum. Eine Funktion  $f : M \rightarrow [0, \infty)$  wird *K-konvex* genannt, wenn für alle Geodäten  $\gamma \in \text{Geo}_{[0,1]}(M, d)$

$$f(\gamma_t) \leq \frac{1}{2}f(\gamma_0) + \frac{1}{2}f(\gamma_1) - Kt(1-t)d(\gamma_0, \gamma_1)^2.$$

Zeigen Sie folgendes:

- (a) Jede *K*-konvexe Funktion mit  $K > 0$  hat ein Minimum.

*Hinweis:* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine minimierende Folge. Aus der Konvexität folgt, dass auch die Folge der Mittelpunkte von  $x_n$  und  $x_{n+1}$  minimierend ist. Benutze die *K*-Konvexität um zu zeigen, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  somit eine Cauchy-Folge ist.

- (b) Angenommen es gibt ein  $C > 0$ , so dass

$$d(\gamma_t, y)^2 \leq \frac{1}{2}d(\gamma_0, y)^2 + \frac{1}{2}d(\gamma_1, y)^2 - Ct(1-t)d(\gamma_0, \gamma_1)^2$$

für alle  $y \in M$  und alle Geodäten  $\gamma \in \text{Geo}_{[0,1]}(M, d)$ . Zeige, dass für alle Maße  $\mu \in \mathcal{P}_2(M)$  und alle Geodäten  $\gamma \in \text{Geo}_{[0,1]}(M, d)$  auch folgendes gilt

$$w_2(\delta_{\gamma_t}, \mu)^2 \leq \frac{1}{2}w_2(\delta_{\gamma_0}, \mu)^2 + \frac{1}{2}w_2(\delta_{\gamma_1}, \mu)^2 - Ct(1-t)d(\gamma_0, \gamma_1)^2,$$

d.h.  $f(x) = w_2(\delta_x, \mu)^2$  ist  $C$ -konvex.

- (c) Schließen Sie aus den beiden vorigen Aussagen, dass es für jedes  $\mu \in \mathcal{P}_2(M)$  ein  $x_\mu \in M$  gibt, so dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_2(\mu) &:= \inf_{x_0 \in M} \int d(x, x_0)^2 d\mu(x). \\ &= \int d(x, x_\mu)^2 d\mu(x).\end{aligned}$$

Wir nennen  $\mathrm{Var}_2(\mu)$  die *Varianz von  $\mu$*  und  $x_\mu$  den *Schwerpunkt* oder *Erwartungswert*.

**Schriftliche Abgabe am 12.12.2016 vor der Vorlesung.**

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter [www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre](http://www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre).