EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Martin Kell
Felix Dietrich

Optimaler Transport

Wintersemester 16/17 **17.10.2016**

Übungsblatt 9

Aufgabe 25 [2 Punkte]

Seien $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Untervektorräume mit $E_1 \perp E_2$ und $\mu, \nu \in P(R^n)$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, so dass $\operatorname{supp}(\mu) \subset\subset E_1$ und $\operatorname{supp}(\nu) \subset\subset E_2$. Zeigen Sie bitte, dass jede Kopplung zwischen μ und ν optimal ist bezüglich der Kostenfunktion $c(x,y) = |x-y|^2$.

Aufgabe 26 [2 Punkte]

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $C \subset D$ eine abgeschlossene Teilmenge, sodass die Projektion $p : M \to C$, definiert durch $p(x) := y_x$, wobei $d(x, y_x) = \min_y d(x,y)$, wohldefiniert ist. Zeigen Sie bitte, dass für ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{P}(M)$, das Maß $\pi := (\mathrm{Id} \times p)_\# \mu$ eine optimale Kopplung zwischen μ und $p_\# \mu$ bezüglich der Kostenfunktion d^p für alle $p > 0$.

Aufgabe 27 [4 Punkte]

Sei φ eine konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $S_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ihr Gradientenfluss, d.h für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $S_0(u_0) := u_0$ und die Kurve u_t is die eindeutige C^1- Lösung der ODE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t = -\nabla \varphi(u_t) \quad \text{in } (0,\infty) \tag{1}$$

mit $\lim_{t\to 0} u_t = u_0$. Zeigen Sie bitte

(a) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u_t - v|^2 \leq \varphi(v) - \varphi(u_t).$$

(b) Für jedes $t > 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(u_t) = -|\nabla \varphi(u_t)|^2 \leq 0$$

(c) Für jedes $t > 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(|\nabla \varphi(u_t)|^2 \right) \leq 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften konvexer Funktionen aus den vorherigen Übungsblättern.

Aufgabe 28 [4 Punkte]

Sei $u_t : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve, die der Bedingung (a) aus Aufgabe 27 genügt. Zeigen Sie bitte, dass u_t eine Lösung der Gleichung (1) ist.

Hinweis: Wählen Sie dafür $v = u_t + \varepsilon \xi$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ in Aufgabe 27 (a) und betrachten Sie den Limes für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 29 [4 Punkte]

Sei $S_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Familie von Abbildungen, sodass für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$ die Kurve $u_t := S_t(u_0)$ der Bedingung (a) aus Aufgabe 24 genügt. Zeigen Sie bitte, dass dann φ eine konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie für $g(s) := \varphi((1-s)x + sy)$ für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $g'(0) \leq g'(1)$.

Schriftliche Abgabe am 19.12.2016 vor der Vorlesung.

Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter `www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/geometrische-analysis-und-mathematische-relativitaetstheorie/lehre`.