Aufgabe 1

Vor: Sei $U = \langle (1\,2\,3) \rangle$ Untergruppe von S_3

Beh: a) U ist Normalteiler in S_3

b) $S_3/U \cong S_2$

Beweis: a) Sei $\sigma \in S_3$ beliebig.

$\Rightarrow \sigma(1\,2\,3)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \in \{id, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\} = U$

$\Rightarrow U$ ist Normalteiler in S_3

Nebenklassen von S_3/U: Da $|S_3| = 6, |U| = 3 \Rightarrow |S_3/U| =$
Es gilt $\overline{id} = \overline{(1\,2\,3)} = \overline{(1\,3\,2)}$, $\overline{(1\,2)} = \overline{(1\,3)} = \overline{(2\,3)}$

$\Rightarrow S_3/U = \{\overline{id}, \overline{(1\,2)}\}$.

Gruppenoperation auf S_3/U wohldefiniert?

Wähle verschiedene Vertreter aus, prüfe Äquivalenzmalth. von Vertreten

Da U Normalteiler in S_3, gilt für $\sigma \in U$, $a, b \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow \sigma(a\,b) \in (a\,b) \cdot U$.

$\Rightarrow \overline{id} \cdot \overline{(1\,2)} = \overline{(1\,2)} \cdot \overline{id} = \overline{(1\,2)}$ ✓

Da U Gruppe bleibt nur noch zu prüfen, dass

$\overline{(1\,2)} \cdot \overline{(1\,2)} = \overline{id}$ wohldefiniert.

Seien a, b, c paarweise verschieden in $\{1,2,3\}$.
Es gilt:

$(a\,b)(b\,c) = (a\,b\,c) \in U$

$\Rightarrow$ Gruppenoperation auf S_3/U wohldefiniert.

b) Sei $\varphi: S_2 \longrightarrow S_3/U$ mit $\varphi(id) = \overline{id}$
$\varphi((1\,2)) = \overline{(1\,2)}$

$\Rightarrow \varphi$ bijektiv & nach a) Gruppenhomomorphismus $\square$

Aufgabe 2

Vor: Sei G eine Gruppe.

Beh: a) H_1, H_2 UG von G, $H_2 \subset H_1 \Rightarrow H_2$ ist UG von H_1
b) H_2 UG von H_1, H_1 UG von $G \Rightarrow H_2$ ist UG von G
c) H_1, H_2 NT von G, $H_2 \subset H_1 \Rightarrow H_2$ NT von H_1
d) H_2 NT von H_1, H_1 NT von $G \Rightarrow H_2$ muss <u>nicht</u> UG von G sein

Beweis: a) Seien H_1, H_2 UG von G mit $H_2 \subset H_1$.

zz H_2 ist UG von H_1

- $H_2 \subset H_1$ nach Vor., $H_2 \neq \emptyset$ nach Vor.
- Verknüpfung auf H_i ist Einschränkung der Verknüpfung von G $\forall i = 1,2$.

$\Rightarrow$ Verknüpfung von H_1 eingeschränkt auf H_2 = Verknüpfung von H_2.

$\Rightarrow \forall g,h \in H_2 : \underline{gh^{-1}} \in H_2$
bzgl. eingeschränkter Verknüpfung von H_1.

$\Rightarrow H_2$ ist UG von H_1.

b) Sei H_1 UG von G, H_2 UG von H_1.

zz H_2 ist UG von G.

- $H_2 \subset G$, da $H_2 \subset H_1$, $H_1 \subset G$.
- $H_2 \neq \emptyset$ nach Vor.
- Verknüpfung auf H_2 ist Einschränkung der Verknüpfung von H_1,
  Verknüpfung von H_1 ist Einschränkung der Verknüpfung von G

$\Rightarrow$ Verknüpfung auf H_2 entspricht der Einschränkung der Verknüpfung von G auf H_2.

$\Rightarrow \forall gh \in H_2 : \underline{gh^{-1}} \in H_2$
bzg. eingeschränkter Verknüpfung von G.

c) Seien H_1, H_2 Normalteiler von G, $H_2 \subset H_1$.

Nach a) ist H_2 UG von H_1.
noch zz: $\forall g \in H_1, h \in H_2 : ghg^{-1} \in H_2$

Da H_2 Normalteiler von G, gilt $\forall g \in G: ghg^{-1} \in H_2 \ \forall h \in H_2$
Da $H_1 \subset G$ folgt: $\forall g \in H_1, h \in H_2: ghg^{-1} \in H_2$
$\Rightarrow H_2$ Normalteiler von H_1

d) Gegenbeispiel: Sei $G = S_4$, H_1 = Kleinsche 4er Gruppe
$= \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
$H_2 = \{id, (12)(34)\}$

H_2 ist nicht normal in G denn: $\forall \sigma \in S_4 \ (ab)(cd) \in H_1$ gilt

$\sigma(ab)(cd)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\,\sigma(b))(\sigma(c)\sigma(d)) \in H_1$

(da σ Bijektion auf $\{1,2,3,4\}$ & nach Def. von H_1).

H_1 ist abelsch $\Rightarrow$ H_2 ist Normalteiler in H_1.

Aber H_2 ist <u>nicht</u> normal in G da:

$$(1\,2\,3\,4)\,(12)(34)\,(1\,4\,3\,2) = (1\,4)(23) \notin H_2. \quad \square$$

Aufgabe 3

Vor: Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

Beh: a) N Normalteiler in H $\Rightarrow$ $f^{-1}(N)$ Normalteiler in G.

b) f surjektiv, N Normalteiler in G $\Rightarrow$ $f(N)$ Normalteiler in H.

c) Auf die Bedingung "f surjektiv" in b) kann nicht verzichtet werden.

Bew: a) Sei N Normalteiler in H. zz $f^{-1}(N)$ normal in G.
Sei $g \in G$, $h \in f^{-1}(N)$.

zz $ghg^{-1} \in f^{-1}(N)$

Betrachte: $f(ghg^{-1}) \overset{f \text{ Gruppenhom}}{=} \underbrace{f(g)}_{\in H}\,\underbrace{f(h)}_{\in N}\,\underbrace{f(g)^{-1}}_{\in H} \in N$

Da N normal in H.

b) Sei f surjektiv, N normal in G.
Sei $h \in H$, $g \in f(N)$.
$\Rightarrow \exists\, n \in N: g = f(n)$.

Da f surjektiv $\exists\, g \in G: f(g) = h$.

$\Rightarrow hgh^{-1} = f(g)f(n)f(g)^{-1} = f(\underbrace{gng^{-1}}_{\in N \text{ da } N \text{ normal in } G}) \in f(N)$.

c) Gebe Gegenbeispiel zu b) wenn auf Bedingung "f surjektiv" verzichtet wird:

Sei $G = S_3$, $H = S_4$, $N = \langle (1\,2\,3) \rangle$
Sei $f: G \to H$ die Inklusionsabb. von $S_3 \subset S_4$.

Nach Aufgabe 1a) ist N Normalteiler in G.

Wähle $\sigma = (14) \in S_4$. Dann gilt:

$$(14)(123)(14) = (234) \notin f(N)$$

$\Rightarrow f(N)$ nicht normal in H. $\square$

Aufgabe 4

Vor: Sei G eine Gruppe, X eine Menge.
G operiere auf X.
Seien $x, y \in X$ mit $G.x = G.y$

Beh: $\mathrm{Stab}(x) \cong \mathrm{Stab}(y)$.

Bew: Da $x \in G.x = G.y \Rightarrow \exists g \in G: x = g.y$

Definiere $\varphi: \mathrm{Stab}(x) \longrightarrow \mathrm{Stab}(y)$

$$h \longmapsto g^{-1} h g$$

φ ist wohldefiniert: Sei $h \in \mathrm{Stab}(x)$

$$(g^{-1} h g).y = (g^{-1} h).(g.y) = (g^{-1} h).x$$
$$= g^{-1}.(h.x) = g^{-1}.x = y$$

$\Rightarrow g^{-1} h g \in \mathrm{Stab}(y)$ für $h \in \mathrm{Stab}(x)$
$\Rightarrow \varphi$ wohldefiniert.

φ ist Gruppenhomomorphismus:

Seien $h_1, h_2 \in \mathrm{Stab}(x)$:

$$\varphi(h_1 \cdot h_2) = g^{-1} h_1 h_2 g$$
$$= (g^{-1} h_1 g)(g^{-1} h_2 g)$$
$$= \varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2)$$

$\Rightarrow \varphi$ ist Gruppenhomomorphismus.

φ bijektiv: Definiere

$$\psi: \mathrm{Stab}(y) \longrightarrow \mathrm{Stab}(x)$$
$$h \longmapsto g h g^{-1}$$

ψ ist wohldefinierter Gruppenhom., denn:

- $(g h g^{-1}).x = (gh).y = g.y = x. \quad \forall h \in \mathrm{Stab}(y)$
- $\psi(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = (g h_1 g^{-1})(g h_2 g^{-1}) = \psi(h_1)\psi(h_2)$
  $\forall h_1, h_2 \in \mathrm{Stab}(y)$.

Es ist $\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Stab}(y)}$, $\psi \circ \varphi = id_{\mathrm{Stab}(x)}$

Denn: $\forall h \in \mathrm{Stab}(y)$: $\varphi \circ \psi(h) = \varphi(g h g^{-1}) = g^{-1} g h g^{-1} g = h$

$\forall h \in \mathrm{Stab}(x)$: $\psi \circ \varphi(h) = \psi(g^{-1} h g) = g g^{-1} h g g^{-1} = h$

$\Rightarrow \varphi$ ist Isomorphismus, also $\mathrm{Stab}(x) \cong \mathrm{Stab}(y)$ $\square$