

Algebra Übungsblatt 1

Abgabe: Voraussichtlich bis zum 22.4. um 10 Uhr über URM. Details werden noch auf der Webseite bekanntgegeben. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte).

Sei S_3 die symmetrische Gruppe, d.h. die Gruppe aller Permutationen einer 3-elementigen Menge. Wir definieren die Untergruppe $U = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$, die durch das Element $(1\ 2\ 3)$ erzeugt wird.

- Zeigen Sie, dass U Normalteiler in S_3 ist und listen Sie alle Nebenklassen von U in S_3/U auf. Überzeugen Sie sich, dass die Gruppenverknüpfung auf S_3/U wohldefiniert ist.
- Beweisen Sie $S_3/U \cong S_2$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 Punkte).

Es sei G eine beliebige Gruppe. Zeigen oder widerlegen Sie:

- Wenn G Untergruppen H_1 und H_2 mit der Eigenschaft $H_2 \subset H_1 \subset G$ hat, dann ist auch H_2 eine Untergruppe von H_1 .
- Umgekehrt: Wenn H_1 eine Untergruppe von G und H_2 eine Untergruppe von H_1 ist, dann ist auch H_2 eine Untergruppe von G .
- Wenn H_1 und H_2 Normalteiler von G sind mit $H_2 \subset H_1 \subset G$, dann ist H_2 Normalteiler in H_1 .
- Wenn H_1 Normalteiler in G ist und H_2 Normalteiler in H_1 , dann ist H_2 Normalteiler in G .

Aufgabe 3 (4+4+1 Punkte).

Sei $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

- Wenn N ein Normalteiler in H ist, dann ist $f^{-1}(N)$ ein Normalteiler in G .
- Wenn f surjektiv und N ein Normalteiler in G ist, dann ist $f(N)$ ein Normalteiler in H .
- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass auf die Voraussetzung „ f surjektiv“ in (b) nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Die Gruppe G operiere auf der Menge X . Die *Bahn* eines Elementes $m \in X$ ist definiert als $G.m := \{g.m \mid g \in G\}$.

Der *Stabilisator* eines Elementes $m \in X$ unter einer Operation ist definiert als $\text{Stab}(m) := \{g \in G \mid g.m = m\}$.

Es seien $x, y \in X$ auf der selben Bahn, d.h. $G.x = G.y$.

Zeigen Sie, dass die Stabilisatoren von x und y isomorph sind.