

Algebra Übungsblatt 10

Abgabe: Bis zum 01.07. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte).

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{7})$.

- Zeige, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$.
- Zeige, dass $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und berechne $[K : \mathbb{Q}]$.
- Berechne das Minimalpolynom von $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte + 2 Zusatzpunkte).

Konstruieren Sie einen Körper mit 9 Elementen an Hand der folgenden Anleitung:

- Zeigen Sie, dass $f := X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreduzibel ist.
- Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle$ an. Um wie viele Elemente handelt es sich?
- Zeigen Sie mit Hilfe der Verknüpfungstabellen, dass $(\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle, +, \cdot)$ ein Körper ist.
- Zusatz:** Sei $\mathbb{F}_9 := \mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle$ der gerade von Ihnen konstruierte Körper. Berechnen Sie die Nullstellen von $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_9[X]$ in $\mathbb{F}_9$. Geben Sie eine Zerlegung in irreduzible Polynome an.

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte).

Es sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$ und $f = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

- ζ ist Nullstelle von $\sum_{i=0}^6 X^i$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ζ Nullstelle von $X^7 - 1$ ist.

- $\alpha_1 := \zeta + \zeta^6$, $\alpha_2 := \zeta^2 + \zeta^5$ und $\alpha_3 := \zeta^3 + \zeta^4 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind Nullstellen von f . Folgern Sie daraus, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist. (Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für $i = 1, 2, 3$.)
- Das reguläre 7-Eck lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0, 1\}$ konstruieren.