

Algebra Lösung Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Beh: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper hat ∞ -viele Elemente.

Bew: Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen.

Dann gibt es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n , sodass $K = \mathbb{F}_{p^n}$. (Satz 4.6.1)

Wir nummerieren die Elemente von K mit $\alpha_1, \dots, \alpha_{p^n}$ und betrachten das Polynom $f = 1 + \prod_{i=1}^{p^n} (X - \alpha_i) \in K[X]$. Dieses Polynom hat über K keine Nullstellen, da für jedes Element $\alpha_j \in K$ gilt: $f(\alpha_j) = 1$.

Somit kann K nicht algebraisch abgeschlossen sein, da nicht jedes Polynom über K Nullstellen hat. $\square$

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Gesucht: Den Zerfällungskörper K von $X^4 - X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und die Galoisgruppe $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Lösung: Es gilt $f := X^4 - X^2 - 2 = (X^2 + 1)(X^2 - 2)$. Dieses Polynom hat die Nullstellen $\pm i$ und $\pm\sqrt{2}$. Da $\pm i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(i)$ ist der kleinste Körper, der alle Nullstellen von f enthält $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Dies ist der Zerfällungskörper von f . Also $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

Um die Galoisgruppe zu bestimmen, müssen wir die $\mathbb{Q}$ -Automorphismen von K bestimmen, d.h. die Körperautomorphismen von K , die $\mathbb{Q}$ fixieren. Nach Proposition 4.4.6 bildet ein $\mathbb{Q}$ -Automorphismus φ von K die Nullstellen eines Polynoms $g \in \mathbb{Q}[X]$ auf die Nullstellen von g ab. Das bedeutet, dass wir für $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ folgern können $\varphi(i) = \pm i$ und $\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ in dem wir die Polynome $X^2 + 1, X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ betrachten. Da i und $\sqrt{2}$ zusammen mit $\mathbb{Q}$ den Körper K erzeugen, legen die Werte, die φ auf i und $\sqrt{2}$ annimmt, zusammen mit der Bedingung $\varphi|_{\mathbb{Q}} = \text{id}$ den Körperautomorphismus φ eindeutig fest. Wir können die Zuordnungen der Werte zu $\varphi(i)$ und $\varphi(\sqrt{2})$ unabhängig von einander vornehmen, da i und $\sqrt{2}$ linear unabhängig sind.

Wir erhalten also: $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) = \{\text{id}, [i \mapsto -i, \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}], [i \mapsto i, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}], [i \mapsto -i, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}]\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 3 (8 Punkte).

Beh: Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ über $\mathbb{Q}$ ist normal.

Bew: Wir konstruieren ein Polynom, das $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ annulliert und zeigen, dass $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ der Zerfällungskörper dieses Polynoms ist.

Sei $f = (X^2 - 2)^2 - 2$. Dann gilt $f(\sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 0$.

Wir müssen nun zeigen, dass alle Nullstellen von f in K enthalten sind. Dazu bestimmen wir zu erst die 4 Nullstellen von f . Durch einsetzen verifizieren wir, dass

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha_2 &:= -\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha_3 &:= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \alpha_4 &:= -\sqrt{2 - \sqrt{2}}\end{aligned}$$

die 4 Nullstellen von f sind.

Es folgt $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Wir müssen noch zeigen: $\alpha_3 \in K$, denn dann folgt automatisch $\alpha_4 = -\alpha_3 \in K$.

Es ist $\sqrt{2} \in K$, denn:

$$\sqrt{2} = (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}}) = K.$$

Da

$$2 - \sqrt{2} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$$

Algebra Lösung Übungsblatt 11

gilt:

$$\alpha_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \in K.$$

$\Rightarrow \alpha_3, \alpha_4 \in K.$

$\Rightarrow K = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ ist der Zerfällungskörper von $(X^2 - 2)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und damit nach Proposition 4.5.3 normal. $\square$

Aufgabe 4 (8 Punkte).

Vor: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit $p \nmid [L : K]$.

Beh: L/K ist separabel.

Bew: Angenommen L/K ist nicht separabel. Dann existiert ein $\alpha \in L$ mit Minimalpolynom $m \in K[X]$, so dass α mehrfache Nullstelle von m ist (Definition 4.5.6). Nach Lemma 4.5.7 bedeutet das, dass $m'(\alpha) = 0$.

Da $\deg(m') < \deg(m)$ und m das Minimalpolynom von α ist, also normiert mit minimalen Grad und der Eigenschaft, dass es α annulliert, folgt: $m' = 0$ in $K[X]$.

$\Rightarrow \deg(m) \geq 2$ (da für $\deg(m) = 1$ folgt $m' = 1 \neq 0$).

Sei $n := \deg(m) \geq 2$. Dann ist der Leitterm von m' gegeben durch nX^{n-1} .

Da $0 = m'(X) = nX^{n-1} + \text{Terme von niedrigerem Grad}$, folgt $n = 0$ in K .

Da $\text{char}(K) = p$, gilt $p|n$, also $n = kp$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Es ist $K(\alpha)$ ein Zwischenkörper von L/K und somit folgt über das Turmgesetz:

$$\begin{aligned} [L : K] &= [L : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] \\ &= [L : K(\alpha)] \cdot \deg(m) \\ &= [L : K(\alpha)] \cdot kp \end{aligned}$$

$\Rightarrow p|[L : K]$ **Widerspruch** zur Voraussetzung $p \nmid [L : K]$.

Also war unsere Annahme falsch.

$\Rightarrow L/K$ ist separabel. $\square$