Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
08. Juli 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte).
Vor: Sei K der Zerfällungskörper von $X^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$.

a) **Gesucht:** Der Isomorphietyp von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Lösung: Da K der Zerfällungskörper von $X^5 - 1$ ist, enthält K alle Nullstellen dieses Polynoms: $\{e^{\frac{2\pi i \cdot j}{5}} | j = 0, ..., 4\} \subset K$.
$\Rightarrow K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$.
Das Polynom $X^5 - 1$ zu dem K der Zerfällungskörper ist, ist reduzibel über $\mathbb{Q}$:

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

Die Nullstellen von $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sind $\{e^{\frac{2\pi i \cdot j}{5}} | j = 1, ..., 4\}$ welche nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. Ein Körperautomorphismus der $\mathbb{Q}$ fixiert, muss nun die Nullstellen von $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ auf die Nullstellen von $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ abbilden. Dabei ist der Automorphismus durch sein Bild von $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ festgelegt, auf Grund der Körperhomomorphismuseigenschaften und da $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}}) = \{a_0 + a_1 e^{\frac{2\pi i}{5}} + a_2 e^{\frac{4\pi i}{5}} + a_3 e^{\frac{6\pi i}{5}} + a_4 e^{\frac{8\pi i}{5}} | a_j \in \mathbb{Q},\ j = 0, ..., 4\}$. Damit erhalten wir die folgenden Möglichkeiten:

id
$\varphi_1 : e^{\frac{2\pi i}{5}} \mapsto e^{\frac{4\pi i}{5}}$
$\varphi_3 : e^{\frac{2\pi i}{5}} \mapsto e^{\frac{6\pi i}{5}}$
$\varphi_2 : e^{\frac{2\pi i}{5}} \mapsto e^{\frac{8\pi i}{5}}$

Es gilt: $\varphi_1 \circ \varphi_1 = \varphi_2$ (da $(e^{\frac{4\pi i}{5}})^2 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$) und $\varphi_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_1 = \varphi_3$ (da $(e^{\frac{8\pi i}{5}})^2 = e^{\frac{16\pi i}{5}} = e^{\frac{6\pi i}{5}}$).
Damit folgt: $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \cong \mathbb{Z}_4$.

b) **Beh:** $K/\mathbb{Q}$ ist galoisch.

Bew: Nach Voraussetzung ist K der Zerfällungskörper eines Polynoms über $\mathbb{Q}$. Damit ist die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ normal.
Da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ und $K/\mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung ist, folgt mit Propostion 4.5.10, dass $K/\mathbb{Q}$ separabel ist.
Mit Korollar 4.7.11 folgt: $K/\mathbb{Q}$ ist galoisch. $\square$

c) **Gesucht:** Alle Zwischenkörer von $K/\mathbb{Q}$ und den Zwischenkörperverband von $K/\mathbb{Q}$ sowie der Untergruppenverband von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Lösung: Der Hauptsatz der Galoistheorie besagt, dass es eine 1 zu 1 Korrespondenz zwischen den Untergruppen von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ und den Zwischenkörpern von $K/\mathbb{Q}$ gibt.
Nach a) wissen wir: $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) = \{id, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ und $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \cong \mathbb{Z}_4$ wobei $id \mapsto 0$, $\varphi_j \mapsto j$. Also hat $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ genau die Untergruppen $\{id\}, \{id, \varphi_2\}, \{id, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
Das heißt es gibt nur einen nicht trivialen Zwischenkörper L von $K/\mathbb{Q}$. Dieser korrespondiert nach dem Hauptsatz der Galoistheorie zu der nicht trivialen Untergruppe $\{id, \varphi_2\}$ und es gilt $L = \mathrm{Fix}(\{id, \varphi_2\})$. Es gilt: $\varphi_2(e^{\frac{2\pi i}{5}}) = e^{\frac{8\pi i}{5}}$ und $\varphi_2(e^{\frac{8\pi i}{5}}) = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ sowie $\varphi_2(e^{\frac{4\pi i}{5}}) = e^{\frac{6\pi i}{5}}$ und $\varphi_2(e^{\frac{6\pi i}{5}}) = e^{\frac{4\pi i}{5}}$. Damit fixiert φ_2 sowohl $e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{\frac{6\pi i}{5}}$ als auch $e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{\frac{8\pi i}{5}} = -e^{\frac{4\pi i}{5}} - e^{\frac{6\pi i}{5}} - 1$ wobei die Gleichheit aus dem Minimalpolynom $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ von $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ folgt.
D.h. $e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{\frac{6\pi i}{5}} \in \mathrm{Fix}(\{id, \varphi_2\})$.
Mit Teil 2) aus dem Hauptsatz der Galoistheorie wissen wir für den Grad des Zwischenkörpers $L = \mathrm{Fix}(\{id, \varphi_2\})$: $[K : L] = |\mathrm{Aut}_L(K)| = |\{id\varphi_2\}| = 2$.
Da $e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{\frac{6\pi i}{5}} \notin \mathbb{Q}$ folgt: $L = \mathrm{Fix}(\{id, \varphi_2\}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{\frac{6\pi i}{5}})$.

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
08. Juli 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 12

Alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$ und die Untergruppen von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ sind in untestehenden Diagrammen angegeben:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[d, dash] & \{id, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}(e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{\frac{6\pi i}{5}}) \arrow[d, dash] & \{id, \varphi_2\} \arrow[d, dash] \\
K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}}) & \{id\}
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Vor: Seien $K \subset L$, $L \subset F$ zwei galoische Körpererweiterungen.
Für jedes $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(L)$ existiert ein $\varphi_* \in \mathrm{Aut}_K(F)$ mit $\varphi_*|_L = \varphi$.

Beh: $K \subset F$ galoisch.

Bew: Nach Korollar 4.7.8 ist der Fixkörper $\mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(F)) = K$ genau dann wenn F/K galoisch ist.
Sei $x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(F))$. Dann gilt: $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}_K(F) : \sigma(x) = x$
$\Rightarrow \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_L(F) \leqslant \mathrm{Aut}_K(F)$.
$\Rightarrow x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_L(F)) = L$, da F/L galoisch.

Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$. Dann folgt: $\exists \sigma_* \in \mathrm{Aut}_K(F) : \sigma_*|_L = \sigma$.
$\Rightarrow \sigma(x) = \sigma_*|_L = \sigma_*(x)$.
Aber $\sigma_* \in \mathrm{Aut}_K(F)$ und $x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(F))$
$\Rightarrow \sigma(x) = x$
$\Rightarrow \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_K(L) : \sigma(x) = x$
$\Rightarrow x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(L)) = K$ (Gleichheit folgt, da L/K galoisch nach Vor.)

$\Rightarrow \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(F)) \subset K$
$\Rightarrow \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}_K(F)) = K$ □

Aufgabe 3 (5+5 Punkte).

a) **Beh:** $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ist galoisch.

Bew: Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}))$. Dann gilt $\sigma(\sqrt[3]{2})$ ist Nullstelle von $X^3 - 2$.
$\Rightarrow \sigma(\sqrt[3]{2}) \in \{\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{2}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\sqrt[3]{2}\}$.
Außerdem ist $\sigma(i\sqrt{3})$ Nullstelle von $x^2 + 3$ also $\sigma(i\sqrt{3}) \in \{\pm i\sqrt{3}\}$.

Zeige: $e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{3})$.
Es ist $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(120°) + i\sin(120°) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$.
Zudem gilt: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot 3$.
$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] > 1$, da $i\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Aber $X^2 + 3$ annulliert $i\sqrt{3}$, d.h. $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 2$.
Insgesamt folgt: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 6$.

Damit ist $\{1, i\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2, i\sqrt{3}\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
An der Basis sieht man, dass ein Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$, der $\mathbb{Q}$ durch seine Bilder auf $i\sqrt{3}$

und $\sqrt[3]{2}$ festgelegt wird. Damit gibt es 6 mögliche Körperautomorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow |\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}))| = 6 = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ist galoisch.

□

b) **Beh:** $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$ ist nicht galoisch.

Bew: Zuerst bestimmen wir den Körpergrad von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\cdot\sqrt{6})/\mathbb{Q}$. Es ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ und da $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{6}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] > 1$, und $X^2 + 6$ ein annullierendes Polynom zu $i\sqrt{6}$ ist, folgt analog zu a): $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{6}) : \mathbb{Q}] = 6$. Eine Basis zu $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$ ist also gegeben durch $\{1, i\sqrt{6}, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2, i\sqrt{6}\sqrt[3]{2}, i\sqrt{6}(\sqrt[3]{2})^2\}$.

Angenommen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$ ist galoisch, dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$ insbesondere normal. Unteranderem zerfällt also $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})$ in Linearfaktoren.
$\Rightarrow e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})$
Da $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt: $i\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})$.
$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{i\sqrt{6}}{i\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})$.
$\Rightarrow \exists a_0, ..., a_5 \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= a_0 + a_1 i\sqrt{6} + a_2\sqrt[3]{2} + a_3(\sqrt[3]{2})^2 + a_4(i\sqrt{6}\sqrt[3]{2}) + a_5(ß\sqrt{6}(\sqrt[3]{2})^2)\\ &= a_0 + a_2\sqrt[3]{2} + a_3(\sqrt[3]{2})^2 + i\sqrt{6}(a_1 + a_4\sqrt[3]{2} + a_5(\sqrt[3]{2})^2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 = a_4 = a_5 = 0$ (Da $\sqrt{2}$ reell und $1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2$ linear unabhängig.
$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Widerspruch, da $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \nmid 3 = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$ ist nicht galoisch. □

Zusatzaufgabe 4 (4+4 Zusatzpunkte).

a) **Beh:** $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})/\mathbb{Q}$ ist galoisch mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +)$.

Bew: Nach Vorlesung ist die Gruppe der 17-ten Einheitswurzeln zyklisch und wird erzeugt von jedem $e^{\frac{2\pi i j}{17}}$ mit ggT$(j, 17) = 1$, also insbesondere von $e^{\frac{2\pi i}{17}}$. Damit zerfällt das separable Polynom $X^{17} - 1$ über $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})$ in Linearfaktoren. Zudem ist das Minimalpolynom von $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ ein Teiler von $X^{17} - 1$ und somit ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})/\mathbb{Q}$ endlich. Mit Korollar 4.7.11. folgt somit das $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})/\mathbb{Q}$ galoisch ist.

Mit Polynomdivision erhalten wir

$$X^{17} - 1 = (X - 1)(\sum_{j=0}^{16} X^j).$$

Laut Hinweis ist $\sum_{j=0}^{16} X^j$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel. Außerdem muss es die restlichen 16 Nullstellen des Polynoms $X^{17} - 1$ besitzen $e^{\frac{2\pi i j}{17}}$ mit $j = 1, ..., 16$. Damit ist $\sum_{j=0}^{16} X^j$ Minimalpolynom von $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ über $\mathbb{Q}$ und es folgt $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}}) : \mathbb{Q}] = 16$.

Ein Körperautomorpmismus von $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})$ über $\mathbb{Q}$ muss die Nullstellen von $\sum_{j=0}^{16} X^j$, die den $e^{\frac{2\pi i j}{17}}$ mit $j = 1, ..., 16$ entsprechen, auf einander abbilden: Alle Möglichkeiten hierfür sind gegeben durch $\{\sigma_1, ..., \sigma_{16}\}$, wobei σ_j ein Körperhomomorphismus ist der $\mathbb{Q}$ fixiert und $\sigma_j(e^{\frac{2\pi i}{17}}) = e^{\frac{2\pi i j}{17}}$ erfüllt.
Dies sind 16 Möglichkeiten und da $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})/\mathbb{Q}$ galoisch mit $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}}) : \mathbb{Q}] = 16$ bilden diese $G := \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})$.
Es gilt: $\sigma_j \circ \sigma_k(e^{\frac{2\pi i}{17}}) = ((e^{\frac{2\pi i}{17}})^k)^j = (e^{\frac{2\pi i}{17}})^{k \cdot j}$.
$\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_{16}, +)$ (denn: $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist zyklisch, erzeugt von 3.) □

Algebra
Lösung Übungsblatt 12

---

b) **Beh:** Das reguläre 17-Eck ist konstruierbar.

Bew: Eine Untergruppe der Ordnung 8 von $\mathbb{Z}_{16}$ ist: $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$. Eine Untergruppe der Ordnung 4 von $\mathbb{Z}_{16}$ ist: $\{0,4,8,12\}$. Eine Untergruppe der Ordnung 2 von $\mathbb{Z}_{16}$ ist: $\{0,8\}$.
Diese Untergruppenkette:

$$\mathbb{Z}_{16} \supset \{0,2,4,6,8,10,12,14\} \supset \{0,4,8,12\} \supset \{0,8\} \supset \{0\}.$$

liefert über die Galoiskorrespondenz eine Zwischenkörperkette

$$\mathbb{Q} \subset \mathsf{Fix}(\{0,2,4,6,8,10,12,14\}) \subset \mathsf{Fix}(\{0,4,8,12\}) \subset \mathsf{Fix}(\{0,8\}) \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})$$

wobei die Erweiterungsschritte stets vom Grad 2 sind.
Wende Satz 4.3.6 iterativ an. $\Rightarrow e^{\frac{2\pi i}{17}}$ konstruierbar.
$\Rightarrow$ 17-Eck ist konstruierbar. $\square$