Algebra Übungsblatt 12

Abgabe: Bis zum 15.07. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte).

Sei K der Zerfällungskörper von $X^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$.

- Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.
- Zeigen Sie, $K/\mathbb{Q}$ ist galoisch.
- Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$ und skizzieren Sie den Zwischenkörperverband von $K/\mathbb{Q}$ sowie den Untergruppenverband von $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Seien $K \subset L$, $L \subset F$ zwei galoische Körpererweiterungen.

Zeigen Sie: Falls für jedes $\varphi \in \text{Aut}_K(L)$ ein $\varphi_* \in \text{Aut}_K(F)$ existiert mit $\varphi_*|_L = \varphi$, dann ist auch $K \subset F$ galoisch.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte).

Welche der folgenden Körpererweiterungen ist galoisch, welche nicht? Begründen Sie!

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{3})/\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt{6})/\mathbb{Q}$.

Zusatzaufgabe 4 (4+4 Zusatzpunkte).

- Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})/\mathbb{Q}$ galoisch mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +)$ ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass das Polynom $\sum_{j=0}^{16} X^j$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.
- Zeigen Sie, dass das reguläre 17-Eck konstruierbar ist.
Hinweis: Es ist nicht notwendig eine Konstruktion anzugeben, um Konstruierbarkeit zu beweisen.