Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
29. April 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Vor.: Sei G eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge X mit 18 Elementen operiere.

Beh.: Es gibt mindestens zwei Fixpunkte.

Bew.: Mit der Bahnengleichung gilt

$$|X| = \sum_{G.x \in G\backslash X} (G : \mathsf{Stab}(x)) = \sum_{G.x \in G\backslash X} |G.x|$$

Da $\mathsf{Stab}(x)$ eine Untergruppe von G ist, gilt $|\mathsf{Stab}(x)|\,\big|\,|G|$, also da $|G| = 55$ gilt

$$|G.x| \in \{1, 5, 11, 55\}.$$

Da $|X| = 18$ muss $|G.x| \in \{1, 5, 11\}$. $\Rightarrow$ Man betrachte nun alle Möglichkeiten 18 als Summe von Zahlen aus $\{1, 5, 11\}$ darzustellen:

$$18 = a \cdot 1 + b \cdot 5 + c \cdot 11, \;\; a, b, c, \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Ein Punkt $x \in X$ ist Fixpunkt, falls $G.x = \{x\}$. D.h. es treten mindestens 2 Fixpunkte auf, falls in (1) gilt $a \geq 2$.
Es gilt $c \in \{0, 1\}$, da $2 \cdot 11 > 18 = |X|$.

Fallunterscheidung:
1. Fall $a = 0$
Falls $c = 0$, gilt $18 = 0 \cdot 1 + b \cdot 5 + 0 \cdot 11$, also $5|18$.↯
Falls $c = 1$, gilt $18 = 0 \cdot 1 + b \cdot 5 + 1 \cdot 11$, also $5|7$.↯

2. Fall $a = 1$
Falls $c = 0$, gilt $18 = 1 \cdot 1 + b \cdot 5 + 0 \cdot 11$, also $5|17$.↯
Falls $c = 1$, gilt $18 = 1 \cdot 1 + b \cdot 5 + 1 \cdot 11$, also $5|6$.↯

$\Rightarrow a \geq 2$. Es gibt also mindestens 2 Fixpunkte. □

Aufgabe 2 (4+4 Punkte).

a) **Beh. 1:** Für alle $\sigma \in S_n$ und alle Zykel $\tau = (t_1, ..., t_k) \in S_n$ gilt: $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(t_1), ..., \sigma(t_k))$.

Bew.: Seien also $\sigma, \tau \in S_n$, τ ein Zykel $\tau = (t_1 \dots t_k)$.Sei nun $r \in \{1, ..., n\}$. Falls $\sigma^{-1}(r) \notin \{t_1, ..., t_k\}$ liegt, so ist $\tau\sigma^{-1}(r) = \sigma^{-1}(r)$ und also $\sigma\tau\sigma^{-1}(r) = r = (\sigma(t_1) \dots \sigma(t_k))(r)$. (Vorsicht Notation: das (r) bedeutet angewendet auf r nicht der Einzykel der nur aus r besteht!)
Andernfalls, gibt es ein $i \in \{1, ..., k\}$ sodass $\sigma^{-1}(r) = t_i$ (also $r = \sigma(t_i)$). Damit gilt: $\sigma\tau\sigma^{-1}(r) = \sigma\tau(t_i) = \sigma(t_{i+1}) = (\sigma(t_1) \dots \sigma(t_k))(\sigma(t_i)) = (\sigma(t_1) \dots \sigma(t_k))(r)$. Insgesamt folgt: $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(t_1) \dots \sigma(t_k))$.

Beh. 2: Die Menge der Konjugationsklassen der S_n steht in Bijektion mit der Menge der Partitionen von n.

Bew.: „$\Rightarrow$“: Seien σ, σ' konjugiert zu einander, d.h. es gibt $\rho \in S_n$ sodass $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$. Nach LinA1 können wir σ als Produkt disjunkter Zykel schreiben: $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, d.h. $\sigma' = \rho\sigma_1\rho^{-1} \cdots \rho\sigma_r\rho^{-1}$.

Algebra
Lösung Übungsblatt 2

Nun sind, da ρ injektiv ist, auch die Zykel $\rho\sigma_i\rho^{-1}$ disjunkt. D.h. auch σ' besteht aus r disjunkten Zykeln. Außerdem gilt nach Behauptung 1: Zykellänge(σ_i)=Zykellänge($\rho\sigma_i\rho^{-1}$). Also definiert die Konjugationsklasse von σ eine Partition von n via $n =$ Zykellänge$(\sigma_1) + \ldots +$ Zykellänge(σ_r).

„$\Leftarrow$": Seien nun $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, $\sigma' = \sigma'_1 \cdots \sigma'_r$ mit σ_i und σ'_i jeweils disjunkt.
Ohne Einschränkung sei Zykellänge(σ_i)=Zykellänge(σ'_i) (sonst Reihenfolge der Zykel ändern).
Gesucht ist $\rho \in S_n$ mit $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$.
Es gilt $\forall j \in \{1, .., r\} : \sigma_j = (i_{j_1} \ldots i_{j_{|\sigma_j|}})$ und $\sigma'_j = (i'_{j_1} \ldots i'_{j_{|\sigma_j'|}})$ für $i_{j_l}, i'_{j_l} \in \{1, ..., n\}$ und $|\sigma_j| = |\sigma'_j|$ die Zykellänge von σ_j, σ'_j.
Definiere ρ durch $\rho(i_{j_l}) = i_{j'_l}$ für alle i, l. Dann ist ρ eine Permutation, weil die Zykel jeweils für σ und σ' disjunkt sind. Nach Behauptung 1 gilt dann $\rho\sigma_i\rho^{-1} = \sigma'_i$ also $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma'$. □

b) **Aufgabe:** Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der S_4.

Lösung: Nach Teil a) reicht es, die Partitionen von $n = 4$ zu bestimmen:

$4 = 4$ (Vertreter: $(1\,2\,3\,4)$),
$4 = 3 + 1$ (Vertreter: $(1\,2\,3)(4)$),
$4 = 2 + 2$ (Vertreter: $(1\,2)(3\,4)$),
$4 = 2 + 1 + 1$ (Vertreter: $(1\,2)$)
$4 = 1 + 1 + 1 + 1$ (vertreter: id)

Aufgabe 3 (4+4 Punkte).
Vor.: Es sei G eine Gruppe mit Automorphismenmenge Aut(G) und Menge der inneren Automorphismen Inn(G).

a) **Beh.:** Aut(G) ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen und Inn(G) ist Normalteiler in Aut(G).

Bew.: (Aut$(G), \circ$) is Gruppe:

Assoziativität ist klar

Neutrales: $\mathrm{id} \in$ Aut(G)

Inverses: Sei $f \in$ Aut$(G) \Rightarrow$ Das Inverse f^{-1} existiert als bijektive Abbildung und da f ein Gruppenhomorphismus ist, folgt nach LinA1, dass auch f^{-1} Gruppenhomomorphismus ist.

Inn(G) ist Normalteiler:

Es gilt $id \in$ Inn$(G) \subset$ Aut(G)

Untergruppenkriterium: Seien $f_1, f_2 \in$ Inn(G), d.h. $f_1 = i_{g_1}$ und $f_2 = i_{g_2}$. Dann ist $f_1 \circ f_2^{-1} = i_{g_1} \circ i_{g_2^{-1}}$, d.h. es gilt

$$i_{g_1} \circ i_{g_2^{-1}}(x) = i_{g_1}(g_2^{-1} x g_2) = g_1 g_2^{-1} x g_2 g_1^{-1} = i_{g_1 g_2^{-1}}(x) \tag{2}$$

$\Rightarrow f_1 \circ f_2^{-1} \in$ Inn(G).

Sei $f \in$ Aut(G) beliebig, $i_g \in$ Inn(G) beliebig. Es gilt für jedes $x \in G$:

$$f \circ i_g \circ f^{-1}(x) = f(g f^{-1}(x) g^{-1}) = f(g) x f(g)^{-1} = i_{f(g)}(x)$$

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
29. April 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 2

$\Rightarrow f \circ i_g \circ f^{-1} \in \mathsf{Inn}(G)\ \forall f \in \mathsf{Aut}(G), i_g \in \mathsf{Inn}(G)$
$\Rightarrow \forall f \in \mathsf{Aut}(G) :\ f \circ \mathsf{Inn}(G) \circ f^{-1} \subset \mathsf{Inn}(G)$
Da alle $f \in \mathsf{Aut}(G)$ bijektiv sind, folgt über Anwendung von f^{-1} auch die Umkehrung. $\Rightarrow \mathsf{Inn}(G)$ ist Normalteiler. $\square$

b) **Aufgabe:** Bestimmen Sie für $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $G = \mathbb{Z}_4$ jeweils die Gruppen der inneren Autormorphsimen $\mathsf{Inn}(G)$ und der Automorphismen $\mathsf{Aut}(G)$ und die Quotientengruppe $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$.

Lösung: $\mathsf{Aut}(G)$: wegen $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_4| = 4$ gibt es bei beiden Gruppen bis zu $4!$ Automorphismen. Tatsächlich gilt aber:

$\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_4)$: Jeder Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ ist durch die Angabe des Bildes eines Erzeugers von $\mathbb{Z}_4$ eindeutig festgelegt. Da $\phi \in \mathsf{Aut}(G)$ bijektiv ist, gilt $\phi^{-1}(0) = 0$, d.h. unter jedem Automorphismus gilt $0 \mapsto 0$. Für den Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}_4$ gibt es dann noch 2 Möglichkeiten der Abbildung, da der durch $1 \mapsto 2$ erzeugte Gruppenhomomorphismus nicht bijektiv ist.
$\Rightarrow \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2 = \{id, \text{Multiplikation mit } 3 \in \mathbb{Z}_4\}$.

$\mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_4)$: Da $\mathbb{Z}_4$ abelsch ist, gilt für jede Konjugation i_g mit $g \in \mathbb{Z}_4$: $i_g(h) = ghg^{-1} = h\ \forall h \in \mathbb{Z}_4$.
$\Rightarrow \mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_4) = \{id\}$.

$\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_4)/\mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_{\not\simeq}$

$\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\not\simeq})$: Analog zu oben ist jeder Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ durch die Angabe des Bildes von 1 eindeutig bestimmt. Da $\phi \in \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2)$ bijektiv ist folgt: $\phi = id$. Außer der Identiät $\phi_0 = id$ auf $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ gibt es aber noch weitere Automorphismen, da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht zyklisch ist.

$$\begin{gathered}\phi_1 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) \mapsto (1,0) \\ (1,0) \mapsto (0,1) \\ (1,1) \mapsto (1,1) \\ (0,0) \mapsto (0,0)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\phi_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) \mapsto (1,0) \\ (1,0) \mapsto (1,1) \\ (1,1) \mapsto (0,1) \\ (0,0) \mapsto (0,0)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\phi_3 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) \mapsto (1,1) \\ (1,0) \mapsto (1,0) \\ (1,1) \mapsto (0,1) \\ (0,0) \mapsto (0,0)\end{gathered}$$

Algebra
Lösung Übungsblatt 2

$$\begin{aligned} \phi_4 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) &\mapsto (0,1) \\ (1,0) &\mapsto (1,1) \\ (1,1) &\mapsto (1,0) \\ (0,0) &\mapsto (0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_5 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) &\mapsto (1,1) \\ (1,0) &\mapsto (0,1) \\ (1,1) &\mapsto (1,0) \\ (0,0) &\mapsto (0,0) \end{aligned}$$

Man sieht, dass man die Automorphismen durch Permutationen der Elemente $(1,0),(0,1),(1,1)$ erhält. $\Rightarrow$ $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

$\mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$: Da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ abelsch ist, gilt für jede Konjugation i_g mit $g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$i_g(h) = ghg^{-1} = h \ \forall h \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

$\Rightarrow \mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{id\}$.

$\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)/\mathsf{Inn}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$ $\square$

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Aufgabe: Stellen Sie die Klassengleichung für $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$ auf (mit Begründung!).

Lösung: Es ist $G = GL_2(\mathbb{F}_2) = \{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\}$.
Dabei gilt:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Man rechnet nach: $Z(G) = \{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$.

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
29. April 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 2

Die Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$. Denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$. Denn:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da wir für die Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alle Konjugationen geprüft haben, und Konjugationsklassen entweder gleich oder disjunkt sind, ergibt sich die folgende Klassengleichung für $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$:

$$6 = 1 + 2 + 3$$