Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
29. April 2020

Algebra
Übungsblatt 3

Abgabe: Bis zum 06.05. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Zeigen Sie, dass die Kleinsche Vierergruppe $K_4 := \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist. Finden Sie alle Untergruppen der S_4, die isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Der 2. Isomorphiesatz für Gruppen aus der Vorlesung besagt, dass für die Klein'sche Vierergruppe $K_4 := \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$, die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_4$ und die symmetrische Grupe S_4 folgende Isomorphie gilt:

$$(S_4/K_4)/(\mathbb{A}_4/K_4) \cong S_4/\mathbb{A}_4.$$

Rechnen Sie das „zu Fuß“ nach, d.h. bestimmen Sie für jedes Element in S_4 die Restklasse in S_4/K_4 und davon wiederum die Restklasse in $\mathbb{A}_4/K_4$ um es dann mit einer Restklasse von $S_4/\mathbb{A}_4$ in Beziehung zu setzen.

Aufgabe 3 (3+2+3 Punkte).
Es sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und K. Beweisen Sie:

a) Die Menge $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $HK = KH$ gilt.

b) HK ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G.

c) Wenn H oder K ein Normalteiler in G ist, dann ist HK eine Untergruppe von G.

Aufgabe 4 (6+6 Punkte + 6 Zusatzpunkte).

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_4 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$ isomorph zur Symmetriegruppe des Quadrats ist, wobei φ die Abbildung $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4), 1 \mapsto (x \mapsto -x)$ ist.

b) Es sei D_5 die Symmetriegruppe eines (regelmäßigen) Fünfecks. Finden Sie eine Darstellung der D_5 als Untergruppe der S_5 und beweisen Sie die analoge Aussage zu a).

c)* Wozu ist $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ isomorph?