Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
13. Mai 2020

# Algebra
# Lösung Übungsblatt 4

---

**Aufgabe 1 (4+4+2+2 Punkte).**

a) Bestimmen Sie mithilfe der Sylowsätze für

i) **Vor:** Sie $G$ eine Gruppe mit $|G| = 40$.

**Beh:** Primteiler der Gruppenordnung sind $\{2, 5\}$. Für die Anzahl $n_p$ der $p$-Sylowgruppen für alle $p$ Primteiler der Gruppenordnung gilt $n_2 \in \{1, 5\}$, $n_5 = 1$.

**Bew:** Es gilt $|G| = 40 = 2^3 \cdot 5$, d.h. die Primteiler sind 2 und 5.
Nach Satz 1.5.10 3) gilt, die Anzahl $n_5$ der 5-Sylowgruppen erfüllt: $n_5 = 1 \mod 5$ und $n_5|40$.
Die Teiler von $|G|$ sind $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.
$\Rightarrow n_5 = 1$
Nach Satz 1.5.10 3) gilt, die Anzahl $n_2$ der 2-Sylowgruppen erfüllt: $n_2 = 1 \mod 2$ und $n_2|40$.
$\Rightarrow n_2 \in \{1, 5\}$
Beide Zahlen sind möglich, denn wenn es 5 2-Sylowgruppen gibt, dann gilt für die maximale Anzahl an Elementen, die in der Vereinigung aller 2-Sylowgruppen enthalten sind: $5 \cdot |P \setminus \{e_G\}| + 1 = 5 \cdot 7 + 1 = 36$. Da es nur eine 5-Sylowgruppe gibt und diese ohne $e_G$ genau 4 Elemente enthält (Def. 1.5.3 2)), kann diese Kombination nicht ausgeschlossen werden ($36 + 4 = 40$). □

ii) **Vor:** Sie $G$ eine Gruppe mit $|G| = 56$.

**Beh:** Primteiler der Gruppenordnung sind $\{2, 7\}$. Für die Anzahl $n_p$ der $p$-Sylowgruppen für alle $p$ Primteiler der Gruppenordnung gilt $n_2 = 1$ und $n_7 = 8$ oder $n_7 = 1$ und $n_2 \in \{1, 7\}$.

**Bew:** Es ist $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$, d.h. die Primteiler sind 2 und 7.
Nach Satz 1.5.10 3) gilt, die Anzahl $n_7$ der 7-Sylowgruppen erfüllt: $n_7|56$ und $n_7 = 1 \mod 7$
Die Teiler von $|G| = 56$ sind: $\{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$
$\Rightarrow n_7 \in \{1, 8\}$. Falls $n_7 = 8$: Eine 7-Sylowgruppe von $G$ muss Ordnung 7 haben (nach Def. 1.5.3.2)) Da 7 eine Primzahl ist, gilt für zwei verschiedene 7-Sylowgruppen $P_1$ und $P_2$, dass $P_1 \cap P_2 = \{e_G\}$. Jedes Element $x \in P_i \setminus \{e_G\}$ erzeugt $P_i$, d.h. es müsste $8 \cdot 6 = 48$ Elemente der Ordnung 7 in $G$ geben.
Da eine 2-Sylowgruppe Ordnung 8 hat, und es nach den Sylowsätzen mind. eine 2-Sylowgruppe gibt, müssen die verbleibenden

$$56 - 48 = 8 \tag{1}$$

Elemente in einer 2-Sylowgruppe liegen.
Für die Anzahl $n_2$ der 2-Sylowgruppen gilt nach 1.5.10 3): $n_2|56$ und $n_2 = 1 \mod 2$.
$\Rightarrow n_2 \in \{1, 7\}$.
Falls es mehr als eine 2-Sylowgruppe geben würde, wären bei diesen mindestens 2 Elemente verschieden. Wir bräuchten, also mindestens $8+1 = 9$ Elemente. Diese können nicht gleichzeitig in einer 7-Sylowgruppe enthalten sein, nach (1) muss also $n_2 = 1$ sein, wenn $n_7 = 8$.
Falls $n_7 = 1$, kann sowohl $n_2 = 1$ als auch $n_2 = 7$ eintreten. Falls nämlich $n_2 = 7$, dann gilt für die maximale Anzahl an Elementen, die in der Vereinigung aller 2-Sylowgruppen enthalten sind: $7 \cdot |P \setminus \{e_G\}| + 1 = 5 \cdot 7 + 1 = 50$. In der einen 7-Sylowgruppe sind ohne $e_G$ genau 6 Elemente enthalten. Es ist also $50 + 6 = 56 = |G|$. □

b) i) **Vor:** Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = 40$.

**Beh:** $G$ ist nicht einfach.

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
13. Mai 2020

# Algebra
# Lösung Übungsblatt 4

---

**Bew:** Eine Gruppe ist einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $G$ und $\{e_G\}$ hat.
**Hilfsbehauptung**: Ist $P$ eine $p$-Sylowgruppe mit $n_p = 1$, so ist $P$ ein Normalteiler.
**Denn:** für alle $g \in G$: $gPg^{-1}$ ist wieder eine Untergruppe der gleichen Ordnung, also auch eine $p$-Sylowgruppe.
$\Rightarrow P = gPg^{-1} \, \forall g \in G$.
$\Rightarrow P$ ist Normalteiler.

Nach Teil a) gilt $n_5 = 1$. Sei $P$ die eine 5-Sylowgruppe. Da $\{e_G\} \neq P \neq G$ gilt mit der Hilfsbehauptung
$\Rightarrow P$ ist nicht trivialer Normalteiler in $G$
$\Rightarrow G$ ist nicht einfach. □

ii) **Vor:** Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = 56$.

**Beh:** $G$ ist nicht einfach.

**Bew:** Eine Gruppe ist einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $G$ und $\{e_G\}$ hat. Nach Teil a) gilt entweder $n_2 = 1$ oder $n_7 = 1$.
$\Rightarrow$ In jedem Fall gibt es eine $p$-Sylowgruppe mit $n_p = 1$, $p \in \{2, 7\}$.
Da $G$ mit keiner seiner $p$-Sylowgruppen über einstimmt und diese nicht trivial sind, folgt mit der Hilfsbehauptug aus i):
$\Rightarrow$ Es gibt einen nicht trivialen Normalteiler in $G$
$\Rightarrow G$ ist nicht einfach. □

**Aufgabe 2 (8 Punkte).**
**Vor:** Sei $G$ eine endliche Gruppe und $H$ eine Untergruppe von $G$. Sei $U_H$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$.

**Beh:** Es gibt eine $p$-Sylowgruppe $U$ von $G$ mit $U_H = U \cap H$.

**Bew:** Da $U_H$ eine $p$-Sylowuntergruppe von $H$ ist und $H$ eine Untergruppe von $G$ ist, gilt $p \,|\, |G|$. OE $|U_H| = p^n$ und $H = p^n m$ mit $p \nmid m$.
$\Rightarrow \; |G| = p^n m \cdot p^{n'} k$ mit $p \nmid k$.
Da $p$ ein Primteiler der Gruppenordnung von $|G|$ ist und $U_H$ eine Untergruppe von $G$ der Ordnung $p^n$, folgt mit Satz 1.5.10 1) (Sylowsätze), dass $U_H$ in einer $p$-Sylowgruppe $U$ enthalten ist: $|U| = p^{n+n'}$.
Da $U_H \leqslant U, U_H \leqslant H \;\Rightarrow\; U_H \subset U \cap H$.

Bleibt zu zeigen „$\supset$“: Der Schnitt zweier Untergruppen von $G$ ist wieder eine Untergrupe (algebraische Strukturen).
$\Rightarrow U \cap H$ ist Untergruppe von $H$ und $U$. Da $|U| = p^{n+n'}$, $|H| = p^n m$ folgt mit Lagrange $|U \cap H| \,|\, p^n$, da $U_H \subset U \cap H$ und $|U_H| = p^n$ folgt $|U \cap H| = p^n$.
$\Rightarrow U \cap H$ ist in einer $p$-Sylowgruppe von $H$ enthalten.
Da $U_H \subset U$, $U_H$ eine $p$-Sylowgruppe von $H \Rightarrow U \cap H \subset U_H$. □

**Aufgabe 3 (8 Punkte).**
**Vor:** Sei $G$ eine endliche Gruppe und $p$ der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Die Gruppe $G$ habe einen Normalteiler $N$ der Ordnung $p$.

**Beh:** $G$ hat nichttriviales Zentrum.

**Bew:** $G$ operiert auf $N$ via Konjugation:

$$\begin{aligned} G \times N &\to N \\ (g, n) &\mapsto gng^{-1} \end{aligned}$$

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
13. Mai 2020

# Algebra
# Lösung Übungsblatt 4

---

Die obige Abbildung ist wohldefiniert, da $N$ ein Normalteiler ist. Sei $\{r_1, ..., r_k\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Bahnengleichung: } p = |N| &= |G.r_1| + \ldots + |G.r_k| \\ &= (G : \mathsf{Stab}(r_1)) + \ldots + (G : \mathsf{Stab}(r_k)) \\ &= |N \cap Z(G)| + \sum_{i=1, |G:\mathsf{Stab}(r_i)| \geq 2}^{k} (G : \mathsf{Stab}(r_i)) \end{aligned}$$

Wissen $(G : \mathsf{Stab}(r_i))| \, |G|$ und $(G : \mathsf{Stab}(r_i)) \leq p$.
Da $p$ kleinster Primteiler von $|G|$
$\Rightarrow \nexists G.r_i : (G : \mathsf{Stab}(r_i)) \geq 2$ mit $r_i \notin Z(G)$.
$\Rightarrow p = |N \cap Z(G)|$
$\Rightarrow N \leqslant Z(G)$. Da $N$ nicht trivial ist (da von Ordnung $p$), ist $Z(G)$ nicht trivial. $\square$

**Aufgabe 4 (8 Punkte).**
**Vor:** Sei $p$ prim und $N$ ein Normalteiler mit $|N| = p$ in einer endlichen Gruppe $G$.

**Beh:** $N$ ist in jeder $p$-Sylowgruppe von $G$ enthalten.

**Bew:** $N$ ist eine $p$-Untergruppe von $G$.
Satz 1.5.10 1) $\Rightarrow \exists$ $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit $N \subset P$
Sei nun $Q$ eine beliebige $p$-Sylowgruppe von $G$.
Satz 1.5.10 2) $\Rightarrow \exists g \in G \, : Q = gPg^{-1}$.
$\Rightarrow Q = gPg^{-1} \supset gNg^{-1}$. Da $N$ Normalteiler: $gNg^{-1} = N$
$\Rightarrow Q \supset N$
Da $Q$ beliebig war, ist $N$ in jeder $p$-Sylowgruppe von $G$ enthalten. $\square$