Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
06. Mai 2020

Algebra
Übungsblatt 4

Abgabe: Bis zum 13.05. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (4+4+2+2 Punkte).
Sei G eine Gruppe.

a) Bestimmen Sie mithilfe der Sylowsätze für
   i) $|G| = 40$
   ii) $|G| = 56$

   die Anzahl der p-Sylowgruppen für alle p Primteiler der Gruppenordnung.

b) Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $\{e_G\}$ und G enthält. Zeigen sie, unter Verwendung von Aufgabenteil a), dass Gruppen G der Ordnung
   i) $|G| = 40$
   ii) $|G| = 56$

   nicht einfach sind.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Weiter sei U_H eine p-Sylowgruppe von H. Zeigen Sie, dass es dann eine p-Sylowgruppe U von G gibt mit $U_H = U \cap H$.

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Die Gruppe G habe einen Normalteiler N der Ordnung p. Zeigen Sie, dass G ein nichttriviales Zentrum hat.

Aufgabe 4 (8 Punkte).
Sei p prim und N ein Normalteiler mit $|N| = p$ in einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass N in jeder p-Sylowgruppe von G enthalten ist.