Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
13. Mai 2020

Algebra
Übungsblatt 5

Abgabe: Bis zum 20.05. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte).

a) Die Symmetriegruppe D_n eines regelmäßigen n-Ecks nennt man auch die Diedergruppe mit $2n$ Elementen. Für welche n ist die folgende aufsteigende Kette von Untergruppen eine Kompositionsreihe oder Subnormalteilerkette?

$$\{id\} \subset \{\text{Drehungen eines regelmäßigen } n\text{-Ecks}\} \subset D_n$$

b) Zeigen Sie, dass D_n auflösbar ist.

c) Geben Sie eine Kompositionsreihe von D_{30} an (mit Begründung).

Aufgabe 2 (3+3 Punkte).
Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Jeder endliche nullteilerfreie Ring ist ein Körper.

b) Jeder endliche Ring lässt sich als Vereinigung der Menge seiner Nullteiler und der Menge seiner Einheiten schreiben.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei R ein Hauptidealring und $0 \neq a \in R \setminus R^{\times}$. Weiter sei I das von a erzeugte Hauptideal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1) I ist ein maximales Ideal in R.

2) I ist ein Primideal in R.

3) a ist irreduzibel.

Aufgabe 4 (3+4 Punkte).
Es sei $R = \mathbb{Z}[i]$.

a) Zeigen Sie, dass der Chinesische Restsatz einen Isomorphismus $\phi : R/(7-11i) \to R/(3+5i) \times R/(1+2i)$ liefert.

b) Bestimmen Sie das Urbild $x \in R/(7-11i)$ von $(\overline{1+i}, \overline{2+i}) \in R/(3+5i) \times R/(1+2i)$ unter ϕ.

Zusatzaufgabe 5 (3+3 Zusatzpunkte).
Finden Sie jeweils im Ring R ein Ideal $I = \langle f_1, ..., f_n \rangle, n \geq 2$, das kein Hauptideal ist (begründen Sie, dass ihr gewähltes Ideal kein Hauptideal ist) und berechnen Sie für die Erzeuger f_i des Ideals ggT und kgV (falls existent).

a) $R = \mathbb{Z}[X]$,

b) $R = \mathbb{R}[X, Y]$.