Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
27. Mai 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2+4+1 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a) Welches der folgenden Ausdrücke sind Polynome? Begründen Sie!
Lösung:

- $\prod_{k=0}^{25}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x^i)^k$, wobei $a_i \in R$.
  Sei $f := \prod_{k=0}^{25}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x^i)^k$.
  Sind fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) $a_i = 0$, so ist f ein Polynom über R in x, d.h. $f \in R[x]$.
  Sind aber unendlich viele $a_i \neq 0$, so ist f kein Polynom, da f in diesem Fall nicht von endlichem Grad ist.
- $\sum_{i=1}^{k} b_i \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, R)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$.
  Da $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ und die Summe endlich ist, also nur endlich viele Variablen vorkommen, ist der Ausdruck ein Polynom über $\mathrm{Mat}(2\times 2, R)$, d.h. ein Element im Polynomring $\mathrm{Mat}(2\times 2, R)[x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k]$.
- $\sum_{i=5}^{10} \prod_{k\geq i} c_i x_k^i$, wobei $c_i \in R[y_1, ..., y_n]$.
  Es ist $f := \sum_{i=5}^{10} \prod_{k\geq i} c_i x_k^i = \sum_{i=5}^{10} c_i (\prod_{k\geq i} x_k)^i$. Da die $c_i \in R[y_1, ..., y_n]$ und es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein x_k in f gibt, gilt: wäre f ein Polynom, so wäre $f \in R[y_1, ..., y_n][x_i | i \in \mathbb{N}]$.
  Allerdings: wäre eines der $c_i \neq 0$, so ist f kein Polynom, da f dann unendlich viele Variablen $x_k, k \geq i$ enthält, d.h. $f \notin R[y_1, ..., y_n][x_i | i \in \mathbb{N}]$.
  Also ist f nur genau dann ein Polynom (nämlich das Nullpolynom in $R[y_1, ..., y_n][x_i | i \in \mathbb{N}]$), wenn $c_i = 0 \; \forall i = 5, ..., 10$.
- Betrachten Sie für $\mathbf{m} = (1, 3, 4) \in \mathbb{N}^3$ den Ausdruck: $\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{m}} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3} \mathbf{x}^\mathbf{k} \mathbf{y}^{\mathbf{m}-\mathbf{k}}$, wobei $\mathbf{k} \geq \mathbf{m} \Leftrightarrow k_i \geq m_i \forall i$.
  Finden sie angelehnt an die Multiindexschreibweise aus der Vorlesung eine vereinfachte Darstellung des Ausdrucks. Handelt es sich dabei um ein Polynom über $\mathbb{C}$?

  Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{m}} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3} \mathbf{x}^\mathbf{k} \mathbf{y}^{\mathbf{m}-\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{m}} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{1-k_1} y_2^{3-k_2} y_3^{4-k_3} \\
&= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{3}\sum_{k_3=0}^{4} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{1-k_1} y_2^{3-k_2} y_3^{4-k_3} \\
&= (\sum_{k_1=0}^{1} \binom{1}{k_1} x_1^{k_1} y_1^{1-k_1})(\sum_{k_2=0}^{3} \binom{3}{k_2} x_2^{k_2} y_2^{3-k_2})(\sum_{k_3=0}^{4} \binom{4}{k_3} x_3^{k_3} y_3^{4-k_3}) \\
&= (x_1 + y_1)(x_2 + y_3)^3 (x_3 + y_3)^4 \\
&= (\mathbf{x} + \mathbf{y})^\mathbf{m}
\end{aligned}$$

  Wie wir an Zeile 3 sehen können, handelt es sich um ein Polynom über $\mathbb{C}$, denn die Koeffizienten kommen aus $\mathbb{C}$ und es handelt sich um endliche Produkte und Summen, die nur endlich viele Variablen enthalten.

b) **Beh.:** Das Ideal $I := \langle x_i^i \,|\, i \in \mathbb{N}\rangle$ in $R[x_i \,|\, i \in \mathbb{N}]$ ist nicht endlich erzeugt.

Bew.: Angenommen I ist endlich erzeugt, also $I = \langle f_1, ..., f_r\rangle$ mit $f_1, ..., f_r \in R[x_i \,|\, i \in \mathbb{N}]$. In jedem f_i kommen nur endlich viele Variablen x_j vor. Seien ohne Einschränkung $x_1, ..., x_n$ die Variablen, die in $f_1, ..., f_r$ vorkommen. Betrachte eine R-Linearkombination $a_1 f_1 + ... + a_r f_r$ mit $a_i \in R[x_i \,|\, i \in \mathbb{N}]$. Die f_i haben keinen konstanten Anteil, da $f_i \in \langle x_i^i \,|\, i \in \mathbb{N}\rangle = I$, d.h. jeder Term eines f_i enthält ein x_j, $j = 1, ..., n$. Damit enhält auch jeder Term von $a_1 f_1 + ... + a_r f_r$ ein x_j $j = 1, ..., n$.
Aber es ist $x_{n+1}^{n+1} \in I$ und x_{n+1}^{n+1} lässt sich nicht als Summe von Termen darstellen, von denen jeder ein x_j,

Algebra
Lösung Übungsblatt 6

$j = 1, ..., n$ aber kein x_{n+1} enthält.
$\Rightarrow I \neq \langle f_1, ..., f_r \rangle$.
$\Rightarrow I$ ist nicht endlich erzeugt. $\square$

c) **Beh.:** $\mathbb{Z}[x_n \mid n \in \mathbb{N}]$ ist nicht noethersch.

Bew.: In Aufgabe 1 b) haben wir gesehen, dass für einen beiliebigen kommutativen Ring mit Eins, das Ideal $\langle x_i^i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ in $R[x^i \mid i \in \mathbb{N}]$ nicht endlich erzeugt ist.
Da $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, ist auch in $\mathbb{Z}[x^n \mid n \in \mathbb{N}]$ das Ideal $\langle x_n^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ nicht endlich erzeugt.
Damit ist $\mathbb{Z}[x^n \mid n \in \mathbb{N}]$ nicht noethersch als Ring. $\square$

Aufgabe 2 (4+4 Punkte).
Gesucht: Die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(3 \times 5, \mathbb{Z})$$

und Kern und Bild der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^3$, die durch A bezüglich der Standardbasen dargestellt wird.

Lösung: Wir wenden den Smith-Normalform-Algorithmus an über $\mathbb{Z}$ (die Abbildung, die $\mathbb{Z}$ zum euklidischen Ring macht, ist $\nu : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto |x|$).

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{\text{Spalte 1 und 3 tauschen}} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Umschreiben von } a_{1i} \text{ und } a_{i1}} \begin{pmatrix} -2 & -6 & (-2)(-2)+1 & (-1)(-2)+1 & -4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 1. Spalte: (2.Spalte-3*1.Spalte, 3.Spalte + 2*1.Spalte, 4.Spalte +1.Spalte,5.Spalte-2*1.Spalte)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 11 & 11 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Spalte 1 und 3 tauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 2 & 11 & -6 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 1. Spalte: (3.Spalte+2*1.Spalte, 4.Spalte - 1.Spalte)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 24 & 0 & -6 \\ 7 & 4 & 14 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 1. Zeile: (2.Zeile-11*1.Zeile, 3.Zeile - 7*1.Zeile)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 14 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Zeile 2 und 3 tauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 14 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Umschreiben von } a_{1i} \text{ und } a_{i1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \cdot 4 + 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 2. Spalte: (3.Spalte-3*2.Spalte, 5.Spalte +2.Spalte)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
27. Mai 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 6

$$\rightsquigarrow^{\text{Spalte 2 und 3 tauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 2. Zeile: (3.Zeile-12*2.Zeile)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 2. Spalte: (3.Spalte-2*2.Spalte)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Spalte 3 und 5 tauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Reduziere mit 3. Spalte: (5.Spalte-8*3.Spalte)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{\text{Multipliziere 3.Zeile mit -1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Smith-Normalform von A.
Buchhalten der Zeilenumformungen liefert

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ -73 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Buchhalten der Spaltenumformungen liefert:

$$\begin{aligned} T = &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 14 & -5 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist $SAT = D$.
Um das Bild bzw den Kern von A zu bestimmen, darf man nicht einfach den Kern von D bestimmen, sondern man muss noch mit S und T zurücktransformieren: Bild$(A) =$ Bild$(S^{-1}DT^{-1})$. Da T eine invertierbare Abbildung ist auf $\mathbb{Z}^5$, können wir T^{-1} weglassen und bekommen so:

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
27. Mai 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 6

$$\text{Bild}(A) = \text{Bild}(S^{-1}DT^{-1}) = \text{Bild}(S^{-1}D) = \text{Bild}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 24 & -6 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$
$$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Für den Kern von A rechnen wir:

$$\text{Kern}(A) = \text{Kern}(S^{-1}DT^{-1}) = \langle T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul.

Beh.: $\langle U \rangle_R := \bigcap_{N \leq M, U \subset N} N = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in R,\, u_i \in U\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

Bew.: Es ist $K := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in R,\, u_i \in U\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$ ein Untermodul von M.
Denn: $K \neq \emptyset$, $K \subset M$ und für $x, y \in K, \lambda \in R$ gilt: $\exists n, m \in \mathbb{N}, \lambda_i, \mu_j \in R, u_i, v_j \in U\ \forall i = 1..., n, j = 1, ..., m$: $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^m \mu_j v_j$ und damit folgt: $x + \lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \lambda \mu_j v_j$.
Dann gilt: $x + \lambda y \in K$. Also ist K ein Untermodul.

Außerdem ist der Schnitt von Untermoduln wieder ein Untermodul (Gruppeneigenschaft bleibt unter Schnitt erhalten, und Abgeschlossenheit unter Multiplikation mit Elementen aus R ebenfalls.), d.h. $\langle U \rangle_R$ ist ebenfalls ein Untermodul von M.

„$\subset$“: Es gilt: $U \subset K = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in R,\, u_i \in U\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$ via $n = 1, \lambda_1 = 1$. Da K ein Untermodul ist, der U enthält, gilt: $\bigcap_{N \leq M, U \subset N} N \subset K$
$\Rightarrow \langle U \rangle_R \subset K$.

„$\supset$“: Da $\langle U \rangle_R$ ein Untermodul von M ist, gilt für alle $x, y \in \langle U \rangle_R$ und $\lambda \in R$ wieder $x + \lambda y \in \langle U \rangle_R$. Insbesondere gilt $U \subset \langle U \rangle_R$.
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in R, u_i \in U \forall i = 1, ..., n : \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in \langle U \rangle_R$.
$\Rightarrow K \subset \langle U \rangle_R$ $\square$

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Beh.: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

a) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

b) Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.

c) Jede Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

Bew.: „a) $\Rightarrow$ b)“: Sei $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln. Sei $U = \cup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ die Vereinigung der aufsteigenden Untermoduln. Dann ist U ebenfalls ein Untermodul, **Denn:** für $x, y \in U$ gilt: $\exists k, l \in \mathbb{N} : x \in U_k, y \in U_l$. Sei ohne Einschränkung $k \geq l$. Da die Kette der U_i aufsteigend ist, gilt $U_k \supset U_l$, also gilt

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
27. Mai 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 6

$x, y \in U_k$. $\Rightarrow x + \lambda y \in U_k \ \forall \lambda \in R$.
Also ist U nach Voraussetzung endlich erzeugt. D.h. es gibt $u_1, ..., u_n \in U$ sodass $U = \langle u_1, ..., u_n \rangle_R$. Da n endlich ist und die Kette der U_i aufsteigend.
$\Rightarrow \exists k : u_1, ..., u_n \in U_k$
$\Rightarrow \forall\, l \geq k$: $U_l = U_k$
Die Kette wird also stationär.

„b) $\Rightarrow$ c)“: Sei T eine beliebige Teilmenge von Untermoduln von M.
Angenommen T hat kein maximales Element. D.h. $\forall\, U \in T\ \exists V \in T : V \supset U$.
Iterativ bekommen wir daraus eine aufsteigende Kette von Untermoduln, die nicht stationär wird. Widerspruch!

„c) $\Rightarrow$ a)“: Sei U ein Untermodul von M.
Sei $T := \{V \mid V \subset U$ endlich erzeugter Untermodul von $U\}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von U.
Nach Voraussetzung hat T ein maximales Element $V_0 \in T$. Da $V_0 \in T$ gibt es $u_1, ..., u_r \in U$ sodass $V_0 = \langle u_1, .., u_r \rangle_R$.
Angenommen $U \supsetneq V_0$, dann gibt es ein $u \in U \setminus V_0$. Dann ist aber $V_1 := \langle u_1, ..., u_r, u \rangle_R$ auch ein endlich erzeugter Untermodul von U, also $V_0 \subsetneq V_1 \in T$. Widerspruch, da $V_0 \in T$ maximal.
$\Rightarrow U = V_0$, also endlich erzeugt.

$\square$