Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
20. Mai 2020

Algebra
Übungsblatt 6

Abgabe: Bis zum 27.05. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (2+4+1 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a) Welches der folgenden Ausdrücke sind Polynome? Begründen Sie!
   - $\prod_{k=0}^{25}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x^i)^k$, wobei $a_i \in R$.
   - $\sum_{i=1}^{k} b_i \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, R)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$.
   - $\sum_{i=5}^{10} \prod_{k \geq i} c_i x_k^i$, wobei $c_i \in R[y_1, ..., y_n]$.
   - Betrachten Sie für $\mathbf{m} = (1, 3, 4) \in \mathbb{N}^3$ den Ausdruck: $\sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{m}} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3}\mathbf{x}^\mathbf{k}\mathbf{y}^{\mathbf{m}-\mathbf{k}}$, wobei $\mathbf{k} \geq \mathbf{m} \Leftrightarrow k_i \geq m_i \forall i$.
     Finden sie angelehnt an die Multiindexschreibweise aus der Vorlesung eine vereinfachte Darstellung des Ausdrucks. Handelt es sich dabei um ein Polynom über $\mathbb{C}$?

b) Zeigen Sie, das Ideal $\langle x_i^i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ in $R[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$ ist nicht endlich erzeugt.

c) Ist $\mathbb{Z}[x_n \mid n \in \mathbb{N}]$ noethersch? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte).
Bestimmen Sie die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(3 \times 5, \mathbb{Z})$$

und bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^3$, die durch A bezüglich der Standardbasen dargestellt wird.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul. Für eine Teilmenge $U \subset M$ ist das Modulerzeugnis definiert als der kleinste R-Untermodul von M der U enthält: $\langle U \rangle_R := \bigcap_{N \leq M, U \subset N} N$. Hierbei verwenden wir analog zur Ringen und Gruppen die Schreibweise $N \leq M$ dafür, dass N ein Untermodul von M ist.
Zeigen Sie: $\langle U \rangle_R = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in R, u_i \in U \ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein R-Modul M heißt *noethersch*, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

a) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

b) Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.

c) Jede Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

Zeigen Sie die Äquivalenz der 3 Bedingungen.

Hinweis: Wir nennen einen Untermodul U von M *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge von M gibt, die U erzeugt. Sie dürfen Aufgabe 3 verwenden.