Algebra Lösung Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte).

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a) **Beh:** Wenn R ein Körper ist, dann ist ein R -Modul dasselbe wie ein R -Vektorraum.

Bew: Sei $R = K$ ein Körper und M ein R -Modul. Dann gilt: M besitzt zwei Verknüpfungen:

$$+ : M \times M \rightarrow M$$

und

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

sodass

- 1) $(M, +)$ ist abelsche Gruppe
- 2) $k \cdot (m_1 + m_2) = k \cdot m_1 + r \cdot m_2$ und $(k_1 + k_2) \cdot m = k_1 \cdot m + k_2 \cdot m$ für alle $k, k_1, k_2 \in K = R, m, m_1, m_2 \in M$
- 3) $(k_1 \cdot k_2) \cdot m = k_1 \cdot (k_2 \cdot m)$ für alle $k_1, k_2 \in K = R, m \in M$
- 4) $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$.

Dies sind genau die Bedingungen für einen K -Vektorraum ($K = R$).

b) **Beh:** $(\mathbb{Z}_9, +)$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}$ -Modul. □

Bew: Da $\mathbb{Z}_9$ eine abelsche Gruppe ist, ist es ein $\mathbb{Z}$ -Modul. Außerdem ist $\mathbb{Z}_9$ endlich erzeugt durch $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_9$.

Aber: $\forall x \in \mathbb{Z}_9 : 9x = 0 = 0x$. Daraus folgt $\{x\}$ ist linear abhängig für jedes $x \in \mathbb{Z}_9$.

$\Rightarrow$ Die leere Menge ist die einzige linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}_9$.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_9$ hat keine Basis, ist also auch nicht frei. □

c) **Beh:** $(9\mathbb{Z}, +)$ ist frei als $\mathbb{Z}$ -Modul.

Bew: Da $9\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist, ist es ein $\mathbb{Z}$ -Modul. Außerdem ist $9\mathbb{Z}$ endlich erzeugt durch $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow 9\mathbb{Z}, x \mapsto 9x$. Dies ist ein injektiver und surjektiver $\mathbb{Z}$ -Modulhomomorphismus.

$\Rightarrow 9\mathbb{Z}$ ist frei mit Basis (9) □

d) **Beh:** $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ zusammen mit $+$ sind nicht frei als $\mathbb{Z}_6$ -Moduln.

Bew: In allen 3 Fällen handelt es sich um abelsche Gruppen. Durch die Surjektion $\mathbb{Z}_6 \twoheadrightarrow R$ mit $R \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2\}$ sind alle 3 Moduln endlich erzeugt.

Jedoch gilt ähnlich wie in b), dass $\{x\}$ linear abhängig ist für alle $x \in R, R \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}$. Damit sind die $\mathbb{Z}_6$ -Moduln $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$ nicht frei.

Aber: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$ mit dem Restsatz von Sun Zi. Also ist $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ frei als $\mathbb{Z}_6$ -Modul mit Basis $(1, 1)$ (nach 3.2.11).

e) **Beh:** Eine maximal linear unabhängige Teilmenge in einem R -Modul M muss keine Basis von M sein.

Bew: In Teilaufgabe b) haben wir gesehen, dass in $(\mathbb{Z}_9, +)$ die leere Menge $\emptyset$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge ist. Aber dies kann niemals eine Basis sein.

Anderes Beispiel: $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul: Hier ist 2 maximal linear unabhängig, aber keine Basis, da 1 nicht erzeugt werden kann. □

f) **Beh:** Ein minimales Erzeugendensystem eines R -Moduls M muss keine Basis von M sein.

Algebra Lösung Übungsblatt 7

Bew: In Teilaufgabe b) haben wir gesehen, dass $(\mathbb{Z}_9, +)$ keine Basis hat. Aber $\{1\}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von $(\mathbb{Z}_9, +)$.

Anderes Beispiel: Betrachte $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul. Hier ist $\{2, 3\}$ ein minimales Erzeugendensystem, aber keine Basis, da 2 und 3 linear abhängig sind: $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$. □

Aufgabe 2 (7 Punkte).

Vor: Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$ -Moduln, wobei φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Z}^n$ durch $A \in M_n(\mathbb{Z})$ mit $\det(A) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt wird.

Beh: Die Gruppenordnung von G ist gegeben durch $\#G = |\det(A)|$. Das Ergebnis hängt nicht von den gewählten Basen von $\mathbb{Z}^n$ ab.

Bew: Die Sequenz $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} 0$ ist exakt
 $\Rightarrow G = \text{Kern}(g) = \text{Bild}(f)$
 $\Rightarrow f$ surjektiv.

Außerdem ist $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(\varphi)$, nach dem Isomorphiesatz ist also

$$\mathbb{Z}^n / \text{Bild}(\varphi) \cong G,$$

also auch

$$|\mathbb{Z}^n / \text{Bild}(\varphi)| = \#G.$$

Da $\det(A) \neq 0$ ist, hat die Smith-Normalform D zu A nur Einträge $\neq 0$ auf der Diagonalen und $\text{Bild}(A) \cong \text{Bild}(D)$. Seien $d_1, \dots, d_n$ die Elementarteiler zu A (also die Diagonaleinträge von D), dann gilt:

$$\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(A) \cong d_1\mathbb{Z} \times \dots \times d_n\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}^n / \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \#G = |\mathbb{Z}^n / \text{Bild}(\varphi)| = d_1 \cdots d_n = |\det(A)| \text{ (Letzte Gleichheit folgt aus der Smith-Normalform).}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Basis von $\mathbb{Z}^n$ bezüglich welcher A die Darstellungsmatrix zu φ ist, da die Elementarteiler von der Basis unabhängig sind. □

Aufgabe 3 (4+4 Punkte).

a) **Gegeben:** $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_{1008}$

Gesucht: Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ und $r_1, \dots, r_k > 0$ mit $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}} \times \mathbb{Z}^{m-r}$.

Lösung: Wir sehen, an der gegebenen Darstellung von G , dass $m = r$ sein muss, da es keinen freien Anteil gibt. Wir schreiben die Erzeuger der herausgeteilten Ideale in Primfaktorzerlegung.

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3} \times \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3^2} \times \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

Daraus ergibt sich mit dem Chinesischen Restsatz (Satz von Sun Zi)

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{2^4} \times (\mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_3) \times (\mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3^2}) \times (\mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_7)$$

b) **Gegeben:** $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{997} \times \mathbb{Z}_{997^3} \times \mathbb{Z}^2$

Gesucht: Natürliche Zahlen $d_1, \dots, d_r \geq 2$, $d_i | d_{i+1} \forall i = 1, \dots, r-1$ mit $G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_r} \times \mathbb{Z}^{m-r}$.

Algebra Lösung Übungsblatt 7

Lösung: Wir sehen den freien Anteil mit $\mathbb{Z}^2$. Wir müssen den Chinesischen Restsatz (Satz von Sin Zi) anwenden um die teilfremden herausgeteilten Ideale so zusammenzufassen, dass die entstehenden Ideale von Zahlen d_i erzeugt werden, die $d_i | d_{i+1}$ erfüllen:

$$\begin{aligned} G &= \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{997} \times \mathbb{Z}_{997^3} \times \mathbb{Z}^2 \\ &= \mathbb{Z}_7 \times (\mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{997}) \times (\mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{997^3} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}^2 \\ &= \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2 \cdot 11 \cdot 997} \times \mathbb{Z}_{7^4 \cdot 11 \cdot 997^3 \cdot 31 \cdot 47^2 \cdot 3} \times \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (3+3 Punkte).

Vor: Sei R ein euklidischer Ring und $U \subset R^n$ ein Untermodul von Rang n . Für einen beliebigen R -Modul M definieren wir den *Annihilator* von M als $\text{Ann}(M) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0_M \forall m \in M\}$.

Beh:

- a) $\text{Ann}(M)$ ist ein Ideal in R .
- b) Es gilt $\text{Ann}(R^n/U) \cong d_n R$, wobei d_n der bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmte größte Elementarteiler von R^n/U ist.

Bew:

- a) Seien $a, b \in \text{Ann}(M), r \in R$. Es gilt $\text{Ann}(M) \subset R$ und:
 - i) $0_R \in \text{Ann}(M)$, da $0_R \cdot m = 0_M \forall m \in M$.
 - ii) $(a - b) \cdot m = a \cdot m - b \cdot m = 0_M - 0_M = 0_M$, also ist $a - b \in \text{Ann}(M)$.

Also ist $\text{Ann}(M)$ eine Untergruppe von R . Zudem gilt

$$(r \cdot a) \cdot m = r \cdot (a \cdot m) = r \cdot 0_M = 0_M.$$

Damit ist $\text{Ann}(M)$ ein Ideal in R .

□

- b) Nach dem Elementarteilersatz (Satz 3.4.4.) gilt $R^n/U \cong \prod_{i=1}^n R/d_i R$, da U ein Untermodul von Rang n ist und somit ein Faktor der Form R^s im Produkt nicht existieren kann. Da die Elementarteiler von der Art sind, dass $d_i | d_{i+1}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \text{Ann}(R^n/U) &= \{r \in R \mid r \cdot m = 0 \forall m \in \prod_{i=1}^n R/d_i R\} \\ &= \{r \in R \mid d_1 | r \wedge \dots \wedge d_n | r\} \\ &= d_n R \end{aligned}$$

□