Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
27. Mai 2020

Algebra
Übungsblatt 7

Abgabe: Bis zum 10.06. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2+2 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn R ein Körper ist, dann ist ein R-Modul dasselbe wie ein R-Vektorraum.

b) $(\mathbb{Z}_9, +)$ ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

c) $(9\mathbb{Z}, +)$ ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

d) $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ zusammen mit $+$ sind frei als $\mathbb{Z}_6$-Moduln.

e) Eine maximal linear unabhängige Teilmenge in einem R-Modul M ist eine Basis von M.

f) Ein minimales Erzeugendensystem eines R-Moduls M ist eine Basis von M.

Aufgabe 2 (7 Punkte).
Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln, wobei φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Z}^n$ durch $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Z})$ mit $\det(A) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt wird. Zeigen Sie, dass die Gruppenordnung von G gegeben ist durch $\#G = |\det(A)|$. Hängt das Ergebnis von den gewählten Basen von $\mathbb{Z}^n$ ab? (und warum?)

Aufgabe 3 (4+4 Punkte).

a) Finden Sie für $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_{1008}$ eine Darstellung wie in Satz 3.4.10. 3).

b) Bestimmen Sie andersherum für $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{997} \times \mathbb{Z}_{997^3} \times \mathbb{Z}^2$ eine Darstellung wie in Satz 3.4.10. 2).

Aufgabe 4 (3+3 Punkte).
Sei R ein euklidischer Ring und $U \subset R^n$ ein Untermodul von Rang n. Für einen beliebigen R-Modul M definieren wir den *Annihilator von* M als $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R | \, r \cdot m = 0 \, \forall m \in M\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Ann}(M)$ ist ein Ideal in R.

b) Es gilt $\mathrm{Ann}(R^n/U) \cong d_n R$, wobei d_n der bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmt größte Elementarteiler von R^n/U ist.