Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Prof. Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Sommersemester 2020
17. Juni 2020

Algebra
Lösung Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4+4 Punkte).

a) **Gegeben:**

$$A = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(4, \mathbb{R}[X]).$$

Gesucht: Die Elementarteiler von A

Lösung: Wir wenden den Smith-Normalform-Algorithmus an ($\mathbb{R}[X]$ ist euklidischer Ring mit der Gradabbildung):

$$A = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{tausche Zeile 1 und 3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{reduziere mit Zeile 1: 3.Zeile-(X-1)1.Zeile, 4.Zeile-1.Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & -(X-1)(X-2) & X-2 \\ 0 & 0 & -(X-2) & X-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\substack{\text{reduziere mit Spalte 1: 2.Spalte+1.Spalte,} \\ \text{3.Spalte-(X-2)1.Spalte, 4.Spalte+1.Spalte}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & -(X-1)(X-2) & X-2 \\ 0 & 0 & -(X-2) & X-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{reduziere mit 2.Zeile: 3.Zeile-2.Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X-1)(X-2) & X-2 \\ 0 & 0 & -(X-2) & X-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{tausche 3. und 4. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X-2) & X-2 \\ 0 & 0 & -(X-1)(X-2) & X-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{4.Spalte+3.Spalte}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X-2) & 0 \\ 0 & 0 & -(X-1)(X-2) & (X-2)-(X-1)(X-2) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow_{\text{4.Zeile- (X-1)3.Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X-2)-(X-1)(X-2) \end{pmatrix}$$

Algebra
Lösung Übungsblatt 8

Die Smith-Normalform von A ist

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(X-2)^2 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Elementarteiler von A sind $d_1 = 1, d_2 = X-2, d_3 = -(X-2), d_4 = -(X-2)^2$.

b) **Gegeben:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Die Jordan-Normalform von B.

Lösung: Wir betrachten

$$X\mathbf{1} - B = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix} = A.$$

Nach dem Beweis von Satz 3.5.5 ist die Basis, die $X\mathbf{1} - B$ in Smith-Normalform darstellt, auch die Basis ist bezüglich der B in Jordan-Normalform ist.

Nach Teil a) ergibt sich für die Zerlegung von $\mathbb{R}^4$ nach den Elementarteilern der Smith-Normalform von $A = X\mathbf{1} - B$:

$$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}[X]/(X-2) \oplus \mathbb{R}[X]/(X-2) \oplus \mathbb{R}[X]/(X-2)^2.$$

Seien U_1, U_2, U_3 die Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sodass $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ und $U_1 \cong \mathbb{R}[X]/(X-2) \cong U_2, U_3 \cong \mathbb{R}[X]/(X-2)^2$ mit dem Isomorphismus ϕ_i aus der Vorlesung.
Nach dem Beweis von Satz 3.5.5 hat B in der Basis v_{i_j}, die zur Zerlegung in $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = \mathbb{R}^4$ gehört, die Form: $B_{|U_1} : (\lambda_1 = 2), B_{|U_2} : (\lambda_2 = 2), B_{|U_3} : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ also insgesamt:

$$JNF(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4+4 Punkte).

a) **Vor:** Sei $R = K[X]$ für einen Körper K, $A \in \mathsf{Mat}(n, K)$ eine Matrix und $U = (X\mathbf{1} - A))K[X]^n$ sind.

Beh: Der größte Elementarteiler von R^n/U ist gerade das Minimalpolynom von A.

Beweis: Wir wollen Blatt 7 Aufgabe 4b) benutzen: Für einen euklidischen Ring R und $U \subset R^n$ ein Untermodul von Rang n ist $\mathsf{Ann}(R^n/U) \cong d_n R$, wobei d_n der bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmt größte Elementarteiler von R^n/U ist.

Hier ist $R = K[X]$ und $U = (X\mathbf{1} - A)K[X]^n \subset K[X]^n$.
Wir müssen nun also zeigen, dass $\mathsf{Ann}(K[X]^n/(X\mathbf{1} - A)K[X]^n)$ vom Minimalpolynom von A erzeugt wird.
Betrachte dazu $g \in K[X]^n/(X\mathbf{1} - A)K[X]^n$:

$$(X\mathbf{1} - A)g = 0 \Leftrightarrow Xg = Ag \Leftrightarrow pg = p(A)g \forall p \in K[X]. \tag{1}$$

Algebra
Lösung Übungsblatt 8

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}(K[X]^n/(X\mathbf{1}-A)K[X]^n) &= \{p \in K[X] \mid p \cdot g = 0 \ \forall g \in K[X]^n/(X\mathbf{1}-A)K[X]^n\} \\ &= \{p \in K[X] \mid p(A)g = 0 \ \forall g \in K[X]^n/(X\mathbf{1}-A)K[X]^n\} \text{ (nach 1)} \\ &= \{p \in K[X] \mid p(A) = 0\} = \langle \text{Minimalpolynom von } A\rangle.\end{aligned}$$

Es folgt also mit Blatt 7 Aufgabe 4b): $\mathrm{Ann}(K[X]^n/(X\mathbf{1}-A)K[X]^n) \cong d_nK[X] = (\text{Minimalpolynom von } A)K[X]$.

b) **Vor:** Sei K ein Körper.

Beh: $K[X]/\langle (X-a)^2(X-b)\rangle \cong K^3$ für $a \neq b$.

Gesucht: Die Elementarteiler von $K[X]^3/U$ für $U = (X\mathbf{1}-A)K[X]^3$ mit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ und $a \neq b$.

Beweis/Lösung: Da $a \neq b$ können wir schreiben $K[X]/\langle (X-a)^2(X-b)\rangle \cong K[X]/\langle (X-a)^2\rangle \times K[X]/\langle (X-b)\rangle \cong K^3$, wobei $K[X]/(X-a)^2 \cong K^2$ via $\overline{f} = f_0\overline{1} + f_1\overline{X} \mapsto (f_0, f_1)$ (surjektiv & injektiv).

Es hat $U = (X\mathbf{1}-A)K[X]^3$ Rang 3 in $K[X]^3$. Daher hat $K[X]^3/U$ drei Elementarteiler, also $K[X]^3/U \cong \prod_{i=1}^3 K[X]/d_iK[X]$. Nach a) ist der größte Elementarteiler d_3 das Minimalpolynom von A. Das Minimalpolynom von A ist $(X-a)^2(X-b)$ (da $a \neq b$), also $d_3 = (X-a)^2(X-b)$. Es ist aber $K[X]/\langle (X-a)^2(X-b)\rangle \cong K^3$, also hat der Faktor $K[X]/d_3K[X]$ schon Dimension 3.
$\Rightarrow d_2$ und d_1 sind Einheiten von $K[X]$, also $d_1, d_2 \in K \Rightarrow d_1 = d_2 = 1$. □

Aufgabe 3 (2+4 Punkte).
Vor: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Element, das die Gleichung $\alpha^5 + 2\alpha^3 + 2 = 0$ erfüllt und es sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Das Polynom $f := x^5 + 2x^3 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel (nach *Hinweis*).

a) **Gesucht:** Eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Lösung: $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt $f(\alpha) = \alpha^5 + 2\alpha^3 + 2 = 0$. Da nachdem Hinweis f über $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, ist $f(\alpha)$ das Minimalpolynom der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ (Satz 4.1.10). d.h. $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist eine Körpererweiterung vom Grad 5 über $\mathbb{Q}$, also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum von Dimension 5.
Ebenfalls mit Satz 4.1.10 folgt dann, dass $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.

b) **Gesucht:** $\frac{1}{\alpha^2+2}$ und $(\alpha^2+2)^3$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination der Basiselemente.

Lösung: Wir betrachten die Basis aus a): $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$. Es gilt

$$\alpha^3(\alpha^2+2) = \alpha^5 + 2\alpha^3 = -2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2+2} = -\frac{\alpha^3}{2} = -\frac{1}{2}\alpha^3$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}(\alpha^2+2)^3 &= \alpha^6 + 6\alpha^4 + 12\alpha^2 + 8 \\ &= \alpha(\alpha^5) + 6\alpha^4 + 12\alpha^2 + 8 \\ &= \alpha(-2\alpha^3 - 2) + 6\alpha^4 + 12\alpha^2 + 8 \\ &= -2\alpha^4 + 6\alpha^4 + 12\alpha^2 - 2\alpha + 8 \\ &= 4\alpha^4 + 12\alpha^2 - 2\alpha + 8\end{aligned}$$

Algebra
Lösung Übungsblatt 8

Aufgabe 4 (4+4 Punkte). a) **Vor:** Es sei L/K eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$ vom Grad 7 über K.

Beh: $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Bew: Klar ist $K \subset K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$. Nach Voraussetzung ist $\alpha \in L$ vom Grad 7 über K, d.h. $K(\alpha)$ ist ein K-Vektorraum von Dimension 7. Nach Satz 4.1.3 gilt:

$$[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K(\alpha^2)] \cdot [K(\alpha^2) : K].$$

$\Rightarrow [K(\alpha) : K(\alpha^2)], [K(\alpha^2) : K]$ teilt 7
Da α über K Grad 7 hat, gilt $K(\alpha^2) \neq K$, also insbesondere $[K(\alpha^2) : K] \neq 1$.
$\Rightarrow [K(\alpha^2) : K] = 7, [K(\alpha) : K(\alpha^2)] = 1$
D.h. $K(\alpha)$ ist ein 1-dimensionaler $K(\alpha^2)$-Vektorraum, also $K(\alpha) = K(\alpha^2)$. □

b) **Vor:** Es sei L/K eine Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$ vom Grad m bzw. n über K sodass $\text{ggT}(m, n) = 1$.

Beh: $[K(\alpha, \beta) : K] = mn$.

Bew: Nach Satz 4.1.3 gilt

$$\begin{array}{c} [K(\alpha,\beta) : K] = [K(\alpha,\beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] = [K(\alpha,\beta) : K(\alpha)] \cdot m \\ \parallel \\ [K(\alpha,\beta) : K] = [K(\alpha,\beta) : K(\beta)] \cdot [K(\beta) : K] = [K(\alpha,\beta) : K(\beta)] \cdot n \end{array}$$

$\Rightarrow m, n \mid [K(\alpha, \beta) : K]$
$\Rightarrow \text{kgV}(m, n) \mid [K(\alpha, \beta) : K]$
Da $\text{ggT}(m, n) = 1$ gilt: $m \cdot n \mid [K(\alpha, \beta) : K]$.
Da $K(\alpha, \beta)$ die kleinste Körpererweiterung ist, die α, β enthält, folgt: $[K(\alpha, \beta) : K] = m \cdot n$. □