

Algebra Übungsblatt 9

Abgabe: Bis zum 24.06. um 10 Uhr über URM. Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen.

Aufgabe 1 (4+4 Punkte).

Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L sowie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ für folgende Polynome:

- a) $X^6 - 1$
- b) $X^6 + 1$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Sei L/K eine Körpererweiterung mit $[L : K] = 2$ und $\text{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass L eine Quadratwurzelerweiterung der Form $L = K(a)$ von K ist.

Eine solche Erweiterung nennt man auch *einfache Quadratwurzelerweiterung*.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad m ($L \subset \mathbb{C}$) und $f \in K[X]$ sei ein irreduzibles Polynom vom Grad n . Zeigen Sie: Sind m und n teilerfremd, dann ist auch $f \in L[X]$ irreduzibel.

Hinweis: Betrachte den Körper $L(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von f in \mathbb{C} ist.

Aufgabe 4 (3+4+3+1 Punkte).

Es sei K ein Körper.

- a) Zeigen Sie, dass Polynome vom Grad 2 und 3 in $K[X]$ genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine Nullstelle in K haben.
- b) Sind die Polynome $X^2 + X + 1$, $X^3 + X^2 + 1$, $X^3 + X^2 + X + 1$ und $X^4 + X^3 + X + 1$ über $\mathbb{Z}_2[X]$ irreduzibel? Bestimmen Sie ggf. ihre Zerlegung in irreduzible Polynome.
- c) Zeigen Sie, $f := X^5 + 2X^3 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}[X]$ und folgern Sie, dass f irreduzibel ist über $\mathbb{Q}[X]$.
- d) Geben Sie ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ von Grad 4 an, das keine Nullstellen in \mathbb{R} hat, aber reduzibel ist.

Zusatzaufgabe 5 (4 Zusatzpunkte).

Welchen Grad hat die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ für $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$?