UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Nachklausur: Algebra

Sommersemester 2020

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 15.9.2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Übungsleiters:

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8
von 8	von 6	von 7	von 6	von 9	von 8	von 8	von 8

erreichte Punkte (von 60): _____ **Note:** _____

Bitte beachten Sie:

- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie diese (Angabe der Nummer ist nicht notwendig). Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während des Tests beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht ist nur mit vorheriger Anmeldung über E-Mail bis 13 Uhr am 16.9.2020 Uhr unter Angabe triftiger Gründe möglich. Sollte sich Ihre Anfrage nicht per E-Mail klären lassen, werden Sie für Do, 17.9.2020 vormittags einen Termin zur elektronischen Einsicht zugeteilt bekommen.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ 18 & 12 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Z}).$$

Lösung: Mit dem Smith-Normalform-Algorithmus oder durch Berechnung von grössten gemeinsamen Teilern von Minoren erhält man:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Z}).$$

(Die Rechenschritte sind dabei auszuführen.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Welche der folgenden Gleichungen können eine Klassengleichung einer Gruppe der Ordnung 15 darstellen? Begründen Sie ihre Entscheidung.

- $15 = (1+1+1)+5+7$
- $15 = (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)$
- $15 = (1+1+1+1+1)+5+5$

Dabei kommen die aufaddierten Einsen in Klammern von den Elementen aus dem Zentrum.

Lösung:

Die zweite Möglichkeit erhält man für $G = \mathbb{Z}_{15}$. Da nach Vorlesung jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist, also isomorph zu $\mathbb{Z}_{15}$, können die erste und dritte Möglichkeit nicht auftreten. Die erste Möglichkeit kann man auch dadurch ausschließen, dass 7 kein Teiler von 15 ist, die Anzahl der Elemente einer Konjugationsklasse aber die Gruppenordnung teilen muss.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Beweisen Sie: Gruppen der Ordnung 84 sind nicht einfach.

Lösung:

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Wegen der Sylowsätze gilt $n_7 | 12$ und (n_7 kongruent 1 mod $7 \Rightarrow n_7 \in \{1, 8, \ldots\}$), wobei n_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen bezeichnet. Also $n_7 = 1$. Das heißt, es gibt genau eine 7-Sylowgruppe. Diese ist ein echter Normalteiler: echt, da sie weder trivial noch gleich der ganzen Gruppe ist, da ihre Ordnung $7 \neq 84$ ist, Normalteiler, da ihre Konjugationsklasse nur sie selbst enthält. Damit ist G nicht einfach.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_{175}$ eine Darstellung in der Form $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$ wobei die p_i für $i = 1, ..., n$ nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen sind.

b) Bestimmen Sie die Elementarteiler für $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{89} \times \mathbb{Z}_{89^3} \times \mathbb{Z}^2$. (Sie müssen das Produkt der Primfaktoren nicht ausrechnen.)

Lösung:

a) Wegen des chinesischen Restsatzes gilt $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{48} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{2^4}$, $\mathbb{Z}_{144} \cong \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_{2^4}$, $\mathbb{Z}_{175} \cong \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_7$, da die Faktoren rechts jeweils teilerfremd sind. Damit folgt

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3)^2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times (\mathbb{Z}_{2^4})^3 \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{5^2}.$$

b) Der Primfaktor, der für die meisten Faktoren auftaucht, ist 7. Da er dreimal auftaucht, muss es drei Elementarteiler geben, der erste enthält einen Faktor von 7, der zweite 7^2, der dritte 7^4. Da 11 und 89 zweimal vorkommen, muss d_2 einen Faktor 11 und 89 enthalten, und d_3 11 und 89^3. Da 3, 31 und 47^2 je nur einmal vorkommen, sind sie alle Faktoren von d_3. Damit erhalten wir für die Elementarteiler $d_1 = 7$, $d_2 = 7^2 \cdot 11 \cdot 89$, $d_3 = 3 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 47^2 \cdot 89^3$ und

$$G \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2 \cdot 11 \cdot 89} \times \mathbb{Z}_{3 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 47^2 \cdot 89^3} \times \mathbb{Z}^2.$$

(Einheiten als Elementarteiler können wir vernachlässigen, da sie nur zu trivialen Faktoren führen würden, die wir hier nicht auflisten müssen.)

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome über den angegebenen Ringen irreduzibel sind. Geben Sie für reduzible Polynome die Zerlegung in irreduzible Polynome an.

a) $f_1 := X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$,
$f_2 := X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$,
$f_3 := X^3 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$

b) $g_1 := X^4 + 25X^3 + 15X^2 + 10 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$,
$g_2 := X^4 - 4 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

Lösung:

a) f_1 hat keine Nullstelle, da $0+0+0+2 = 2 \neq 0$, $1+1+1+2 = 2 \neq 0$, $8+4+2+2 = 16 = 1 \neq 0$. Daher ist f_1 irreduzibel (siehe Übung).

f_2 hat die Nullstelle 1, damit spaltet $X - 1 = X + 2$ ab und man berechnet $f_2 = f_1 \cdot (X + 2)$. Da f_1 irreduzibel ist, ist dies die Zerlegung in irreduzible Faktoren.

f_3 hat die Nullstelle 2, daher spaltet $X - 2 = X + 1$ ab und man berechnet $f_3 = (X + 1)^3$, dies ist die Zerlegung in irreduzible Faktoren.

b) g_1 ist normiert, also primitiv. $\mathbb{Z}$ ist faktoriell, 5 ist ein Primelement mit $5|10, 15, 25$ und 5^2 teilt 10 nicht. Damit greift Eisenstein und g_1 ist irreduzibel über $\mathbb{Z}$. Damit ist g_1 auch irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

$g_2 = (X^2-2)\cdot(X^2+2) = (X-\sqrt{2})\cdot(X+\sqrt{2})\cdot(X-i\sqrt{2})\cdot(X+i\sqrt{2})$ ist die Zerlegung in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$. Da die Koeffizienten der Linearfaktoren in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ liegen, ist $g_2 = (X^2 - 2) \cdot (X^2 + 2)$ die Zerlegung in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Z}$ und über $\mathbb{Q}$ (siehe Vorlesung und Übung).

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Zeigen Sie $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und bestimmen Sie für $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ die Galoisgruppe mit allen Untergruppen und das Fixkörperdiagramm.

Lösung:

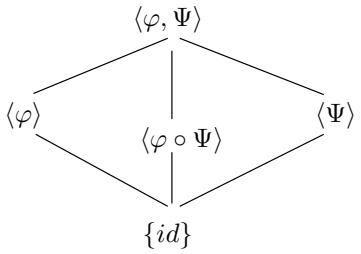
Es gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Ausserdem ist

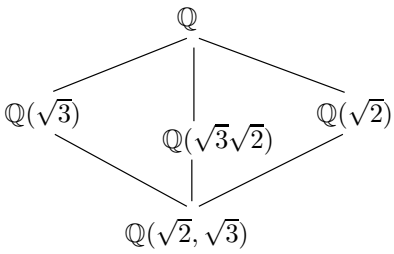
$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}\Big) \cdot (-1) \cdot \Big(-\frac{1}{2}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{2-3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \sqrt{2} - \sqrt{3}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot (-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Damit ist auch $\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ also $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Das Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, da es normiert ist, und $\sqrt{2}$ zu Null macht, und der Linearfaktor $x - \sqrt{2}$ nicht abspaltet, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

ist x^2-3, da es normiert ist, und $\sqrt{3}$ zu Null macht, und der Linearfaktor $x-\sqrt{3}$ nicht abspaltet, da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. (Wäre $\sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, so gäbe es $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. Wäre dabei $b = 0$, so wäre $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, Widerspruch. Wäre $a = 0$, so wäre $\sqrt{\frac{3}{2}} = b \in \mathbb{Q}$, Widerspruch. Sonst wäre $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$, und damit $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$, Widerspruch.) Die weiteren Nullstellen dieser Polynome sind $-\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Daher ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ der Zerfällungskörper von $(x^2-2)\cdot(x^2-3)$. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ galoisch (siehe Vorlesung), und die Galoisgruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, erzeugt von φ und Ψ mit $\varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\varphi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ bzw. $\Psi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, $\Psi(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Das Untergruppendiagramm und das zugehörige Unterkörperdiagramm sind wie abgebildet. Dabei gilt $\varphi\circ\Psi(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \varphi(\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{3}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$, daher liegt $\sqrt{2}\sqrt{3}$ im Zwischenkörper F zur Untergruppe erzeugt von $\varphi \circ \Psi$. Da $[K(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : F] = |\mathrm{Aut}_F(K(\sqrt{2}, \sqrt{3}))| = |\langle \varphi \circ \Psi \rangle| = 2$ und $[K(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : K] = 4$ folgt $[F : K] = 2$. Da $K \subset K(\sqrt{2}\sqrt{3}) \subset F$ folgt $[K(\sqrt{2}\sqrt{3}) : K] = 1$ oder $[F : K(\sqrt{2}\sqrt{3})] = 1$, und da $\sqrt{2}\sqrt{3} \notin K$ folgt $[F : K(\sqrt{2}\sqrt{3})] = 1$ also $F = K(\sqrt{2}\sqrt{3})$. Analog für die beiden übrigen Zwischenkörper.





Aufgabe 7 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl und Isomorphietypen der 5-Sylowuntergruppen von $\mathbb{S}_5$.

Lösung:

$|\mathbb{S}_5| = 120 = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, also gilt 5 teilt $|\mathbb{S}_5|$ und 5^2 teilt nicht $|\mathbb{S}_5|$. Die 5-Sylowuntergruppen haben damit Ordnung 5, sind also zyklisch (da von Primzahlordnung, siehe Vorlesung). Damit ist jede 5-Sylowgruppe in $\mathbb{S}_5$ isomorph zu $\mathbb{Z}_5$. Elemente der Ordnung 5 (die in den 5-Sylowgruppen vorkommen müssen, jeweils 4 in einer) in der $\mathbb{S}_5$ sind genau die 5-Zykel (siehe Vorlesung), es gibt $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5} = 24$ von ihnen. Da in jeder 5-Sylowgruppe 4 vorkommen, und da diese jeweils verschieden sind, da aufgrund der Primzahlordnung verschiedene 5-Sylowgruppen Schnitt {id} haben, gibt es $\frac{24}{4} = 6$ 5-Sylowuntergruppen der $\mathbb{S}_5$. Mit den Sylowsätzen kann man berechnen, dass die Anzahl n_5 der 5-Sylowgruppen 24 teilen muss und kongruent 1 mod 5 sein muss, woraus folgt, dass $n_5 = 1$ oder $n_5 = 6$. Um die genaue Anzahl zu bestimmen, benötigt man die Überlegung mit den 5-Zykeln.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung. Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in L$ mit $\sigma(a) \neq a$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L) \setminus \{id\}$, so ist $L = K(a)$.

Lösung:

Da $K \subset L$ galoisch, ist auch $K(a) \subset L$ galoisch (siehe Vorlesung). Die Gruppe $\mathrm{Aut}_{K(a)}(L)$ ist eine Untergruppe der Galoisgruppe $\mathrm{Aut}_K(L)$, sie enthält alle σ mit $\sigma(x) = x$ für alle $x \in K(a)$. Da nach Voraussetzung $\sigma(a) \neq a$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L) \setminus \{\mathrm{id}\}$, und $a \in K(a)$, folgt $\mathrm{Aut}_{K(a)}(L) = \{\mathrm{id}\}$. Da $K(a) \subset L$ galoisch ist, gilt $[L : K(a)] = |\mathrm{Aut}_{K(a)}(L)| = 1$ (siehe Vorlesung), und damit $K(a) = L$.