

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II
Sommersemester 2019

Blatt 1

Abgabetermin: Donnerstag, 2.5.2019, 10:15 Uhr

Bezeichne $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Standardbasis B_n des $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist $B_n := (1, x^1, \dots, x^n)$.

Aufgabe 1

(4+4=8 Punkte)

Die folgende Abbildung $\text{ev}_{a,n}$ heißt *Auswertung in $a \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \text{ev}_{a,n} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto p(a). \end{aligned}$$

- (a) Sei $B_n^\vee$ die zu B_n duale Basis. Schreiben Sie $\text{ev}_{a,4}$ für $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ als Linearkombination von Basisvektoren aus $B_4^\vee$.
- (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die folgende lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \int_a^b : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto \int_a^b p \, dx. \end{aligned}$$

Außerdem setzen wir $h := \frac{b-a}{3}$. Zeigen Sie, dass $\int_a^b, \text{ev}_{a,3}, \text{ev}_{a+h,3}, \text{ev}_{a+2h,3}, \text{ev}_{b,3} \in (\mathbb{R}[x]_{\leq 3})^\vee$ linear abhängig sind und bestimmen Sie eine nichttriviale Darstellung der Null für diese Elemente.

Aufgabe 2

(4+1=5 Punkte)

Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

- (a) Zeigen Sie, dass f^t genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass f^t genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist.

Sei V ein Vektorraum und sei $W \subset V^\vee$ ein Unterraum. Der Annulator $W^\odot$ von W ist definiert als

$$W^\odot := \{v \in V \mid g(v) = 0 \quad \forall g \in W\} \subset V.$$

Aufgabe 3

(2+4=6 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Seien $U_1, U_2 \subset V$ und $W_1, W_2 \subset V^\vee$ Untervektorräume. Beweisen Sie die folgenden Relationen für Annulatoren:

- (a) $(U_1 + U_2)^\odot = U_1^\odot \cap U_2^\odot$,
- (b) $(W_1 \cap W_2)^\odot = W_1^\odot + W_2^\odot$.

Aufgabe 4

(2+2+5=9 Punkte)

Sei $V := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0, 1]$ (vergewissern Sie sich, dass V unendlich dimensional ist). Für $f \in V$ definieren wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 f : V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ g &\mapsto \int_0^1 f(x)g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Dies induziert eine Abbildung

$$\int_0^1 : V \rightarrow V^\vee, \\ f \mapsto \int_0^1 f.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ eine lineare Abbildung ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ injektiv ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ nicht surjektiv ist.

(Hinweis: Folgendes Vorgehen könnte bei Teil (c) hilfreich sein: Wählen Sie $p \in (0, 1)$ und betrachten Sie die Abbildung $\delta_p : V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$. Zeigen Sie, dass δ_p nicht im Bild von $\int_0^1$ liegen kann.)

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.

Das Repetitorium zur Multilinearen Algebra als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt und beginnt am 26.4.2019.