

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II
Sommersemester 2019

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 15.5.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^5$ durch $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von U° .

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Seien V, W zwei endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume. Zeigen Sie, dass $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_j \mid j \in J)$ genau dann Basen von V bzw. W sind, wenn $(x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J)$ eine Basis von $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ ist.

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Seien V, W zwei endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und sei $L(V, W; \mathbb{K})$ der \mathbb{K} -Vektorraum der Bilinearformen auf $V \times W$. Zeigen Sie, dass $V^\vee \otimes W^\vee \cong L(V, W; \mathbb{K})$ gilt.

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Seien V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $\vartheta : V \rightarrow V/U$ die Restklassenabbildung. Zeigen Sie, dass das Paar $(V/U, \vartheta)$ folgender universeller Eigenschaft genügt:

Für alle \mathbb{K} -Vektorräume W und lineare Abbildungen $f' : V \rightarrow W$ mit $f'|_U = 0$ existiert genau ein lineares $f : V/U \rightarrow W$ mit $f' = f \circ \vartheta$.

Aufgabe 5*

(3* Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ bilinear ist. Wie sieht der Graph G von f in \mathbb{R}^3 aus? Zeigen Sie, dass die Fläche $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Vereinigung von Geraden (d.h. affinen 1-dimensionalen Unterräumen von \mathbb{R}^3) ist.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.