UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 8.5.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 **(3+3+2=8 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a = p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ und $b = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$, wobei $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschiedene Primzahlen sind.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(s_i, r_i)}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt

$$\operatorname{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(s_i, r_i)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$ab = \operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{kgV}(a, b)$$

gilt und schlussfolgern Sie, dass $\operatorname{kgV}(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ immer existiert und bis auf Vorzeichen eindeutig ist.

Aufgabe 2 **(6+3=9 Punkte)**

(a) Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod n_1 \\ x &\equiv a_2 \mod n_2 \end{aligned}$$

genau dann lösbar ist, wenn

$$a_1 - a_2 \equiv 0 \mod \operatorname{ggT}(n_1, n_2)$$

gilt. Zeigen Sie außerdem, dass eine Lösung eindeutig ist modulo $\operatorname{kgV}(n_1, n_2)$.

(b) Schlussfolgern Sie aus Teil (a) den Chinesischen Restsatz aus der Vorlesung.

(*Hinweis: Überlegen Sie sich für Teil (a) zunächst, dass für teilerfremde $x, y \in \mathbb{Z}$ die Kongruenzgleichung $a \equiv b \mod x \cdot y$ genau dann gilt, wenn $a \equiv b \mod x$ und $a \equiv b \mod y$ gelten.*)

Aufgabe 3 **(2+3=5 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie für $n \geq 2$ die Anzahl $N_{n,k}$ der k-Zykel in $\mathbb{S}_n$.

(b) Sei $c_{n,k}$ die Anzahl aller Permutationen in $\mathbb{S}_n$, deren Zykelzerlegung genau k Zykel enthält. Geben Sie eine Rekursion zur Bestimmung von $c_{n,k}$ an.

Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Die *Ordnung* $\operatorname{ord}(g)$ von $g \in G$ ist definiert als das Minimum aller $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $g^m = \mathrm{id}_G$, wobei id_G das Neutrale von G bezeichnet.

Aufgabe 4 (2+3=5 Punkte)

(a) Es sei $\sigma \in \mathbb{S}_{15}$ gegeben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ als Produkt von Zykeln, sodass je zwei Zykel dieser Darstellung kein gemeinsames Element besitzen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $\sigma \in \mathbb{S}_n$ mit Zykelzerlegung $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\sigma_1), \ldots, \operatorname{ord}(\sigma_k))$$

gilt, wobei das kgV von mehreren Zahlen analog zum kgV von zwei Zahlen definiert ist.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.