

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II
Sommersemester 2019

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 29.5.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien die \mathbb{K} -Vektorräume $U := \{(a_1, \dots, a_n) \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\} \subset \mathbb{K}^n$ und $V := \{(b, \dots, b) \mid b \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^m$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ für alle $n \geq 2, m \geq 1$.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Schreiben Sie den Tensor

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 31 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$$

als minimale Summe von reinen Tensoren.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$ gegeben. Seien $f \in \text{End}(V)$ und $g \in \text{End}(W)$ zwei Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t) \quad \text{und} \quad \chi_g(t) = \prod_{j=1}^m (\mu_j - t).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{f \otimes g}(t)$.

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Für zwei \mathbb{K} -Vektorräume V, W und $r \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $z := \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ ein nicht-trivialer Tensor in $V \otimes W$. Zeigen Sie, dass der Rang von z genau dann gleich r ist, wenn die Familien (x_1, \dots, x_r) und (y_1, \dots, y_r) in V bzw. W linear unabhängig sind.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.