UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 22.5.2019, 10:15 Uhr

Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir $n\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} \mid n|z\}$. Außerdem definieren wir für zwei Untergruppen $U_1, U_2 \subset \mathbb{Z}$ ihre *Summe* $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$.

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist und dass

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(a, b)\mathbb{Z}$$

gilt.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist und dass

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(a, b)\mathbb{Z}$$

gilt.

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung n.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \phi : G &\to \mathbb{S}_n \\ g &\mapsto L_g, \end{aligned}$$

wobei $L_g : G \to G$ die Linkstranslation bezüglich $g \in G$ ist, ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Schlussfolgern Sie, dass jede endliche Gruppe H isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_m$ mit passendem $m \in \mathbb{N}_{>0}$ ist.

Eine Untergruppe N einer Gruppe G heißt *Normalteiler* von G, wenn für alle $g \in G$ und alle $n \in N$ gilt, dass $gng^{-1} \in N$.

Aufgabe 3 (2+2+1=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass N genau dann ein Normalteiler von G ist, wenn $gN = Ng$ für alle $g \in G$ gilt. Hierbei ist $gN = \{gn \mid n \in N\}$ und $Ng = \{ng \mid n \in N\}$.

(b) Zeigen Sie, dass Bilder von Normalteilern unter Gruppenhomomorphismen im allgemeinen keine Normalteiler sind, aber Urbilder von Normalteilern unter Gruppenhomomorphismen sind wieder Normalteiler.

(c) Schlussfolgern Sie, dass Kerne von Gruppenhomomorphismen Normalteiler sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist, wenn G/U aus 2 Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 5 (1+2=3 Punkte)

Vergewissern Sie sich, dass die folgende Funktion ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \exp : (\mathbb{R}, +) &\to (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot) \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(\exp)$.

(b) Zu welcher Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist $\mathbb{R}/\operatorname{Ker}(\exp)$ isomorph und warum?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.