UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 5.6.2019, 10:15 Uhr

Für einen Körper $\mathbb{K}$ und ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir die *spezielle lineare Gruppe* $SL_n(\mathbb{K})$ als Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ durch $SL_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$.

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}^* := (\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot)$ dessen multiplikative Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$$

gilt.

Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe, dann definiert jedes Element $g \in G$ einen Automorphimus $i_g \in \mathrm{Aut}(G)$ durch $i_g(h) := ghg^{-1}$ für alle $h \in G$. Die von den i_g erzeugte Untergruppe in $\mathrm{Aut}(G)$ heißt *innere Automorphismengruppe* $\mathrm{Inn}(G) := \langle\{i_g \mid g \in G\}\rangle$. Außerdem definieren wir das *Zentrum* $Z(G)$ von G als $Z(G) := \{g \in G \mid xg = gx \ \forall x \in G\}$, d.h. $Z(G)$ ist die Menge aller $g \in G$, die mit allen anderen Elementen in G kommutieren.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Vergewissern Sie sich, dass die Menge der Automorphismen $\mathrm{Aut}(G)$ von G mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist und dass

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$$

gilt.

Aufgabe 3 (3+1=4 Punkte)

Sie G eine Gruppe und $Z(G)$ ihr Zentrum.

(a) Zeigen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.

(b) Schlussfolgern Sie, dass die Faktorgruppe $G/Z(G)$ nur dann zyklisch sein kann, wenn sie trivial ist.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei F_2 die von x, y frei erzeugte Gruppe und sei $[F_2, F_2]$ ihr Kommutator. Zeigen Sie, dass

$$F_2/[F_2, F_2] \cong \mathbb{Z}^2$$

gilt.

(*Hinweis: Definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus* $f : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ *mit* $x \mapsto (1,0), y \mapsto (0,1)$. *Zeigen Sie, dass* $\mathrm{Ker}(f) = [F_2, F_2]$ *gilt und schlussfolgern Sie, dass* f *einen Isomorphismus* $F_2/[F_2, F_2] \to \mathbb{Z}^2$ *induziert.*)

Aufgabe 5* (2* Punkte)

Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathbb{Z}_{45}$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.