UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 19.6.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A \in \operatorname{Mat}(n \times n', \mathbb{K}), B \in \operatorname{Mat}(m \times m', \mathbb{K}), C \in \operatorname{Mat}(n' \times n'', \mathbb{K}), D \in \operatorname{Mat}(m' \times m'', \mathbb{K})$ Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D)$,

(b) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Nehmen Sie an, dass A, B quadratisch sind und zeigen Sie:

(c) Wenn A, B symmetrisch sind, dann ist $A \otimes B$ symmetrisch.

(d) $\det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n$

(e) Wenn A und B invertierbar sind, dann gilt $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Dehninvariante eines gleichseitigen Tetraeders.

(b) Seien $A := (1,0,0), B := (0,0,1), C := (1,1,0)$ und $D := (0,0,0)$ die Eckpunkte eines Tetraeders. Bestimmen Sie die Dehninvariante dieses Tetraeders.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei ein Rechteck R in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlängen a, b gegeben, das in $n \in \mathbb{N}_{>0}$ kleinere Rechtecke mit Kantenlängen a_i, b_i mit $i = 1, \ldots, n$ rekursiv wie folgt zerlegt werden kann: Zerlege R durch einen Schnitt parallel zu zwei von dessen Seiten in kleinere Rechtecke und wiederhole diese Prozedur in den kleineren Rechtecken. Zeigen Sie, dass a oder b rational ist, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahl a_i oder b_i rational ist.

(*Hinweis: Ordnen Sie dem Rechteck ein Element in $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ zu. Betrachten Sie anschließend die komponentenweise Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.*)

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, wenn je zwei Punkte $x, y \in K$ durch ein Geradenstück verbunden werden können, das ganz in K liegt, d.h., wenn $\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset K$ für alle $x, y \in K$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $K := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge von Punkten. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{\substack{K' \subset \mathbb{R}^d, K \subset K' \\ K' \text{ konvex}}} K' = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$$

gilt und schlussfolgern Sie, dass Polytope beschränkt sind.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.