UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 5

Abgabetermin: Mittwoch, 26.6.2019, 10:15 Uhr

Sei E ein regelmäßiges n-Eck in $\mathbb{R}^2$ und sei $\{1,\dots,n\}$ die Menge der Ecken von E. Eine *Symmetrie* von E ist eine affin-lineare Abbildung f, die E auf E so abbildet, dass Ecken auf Ecken abgebildet werden und Kanten auf Kanten, wobei das Bild einer Kante zwischen zwei Ecken i, j die Kante zwischen $f(i)$ und $f(j)$ ist. Die *Symmetriegruppe* von E ist die Menge aller Symmetrien von E. Die Verknüpfung dieser Gruppe ist die Verknüpfung von Abbildungen. Die Symmetriegruppe von E kann immer als Untergruppe von $\mathbb{S}_n$ aufgefasst werden. Beispielsweise wird eine Drehung eines gleichseitigen Dreiecks mit Ecken $1, 2, 3$ durch $(123) \in \mathbb{S}_3$ beschrieben.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Sei $D_4 := \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^4 = e\rangle$. Zeigen Sie, dass D_4 eine Präsentation der Symmetriegruppe des Quadrats ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei R ein Ring und $A := \{a_i \mid i \in I, a_i \in R\}$ eine Teilmenge, die ein Ideal $\langle A\rangle$ erzeugt. Zeigen Sie, dass

$$\langle A\rangle = \{\sum_{j\in J} r_j a_j \mid r_j \in R, J \subset I \text{ endlich}\}$$

gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_n$ genau dann ein Körper ist, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 4 (2+1+4+1=8 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A := \{c + xg(x, y) \mid c \in \mathbb{K}, g(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A ein Unterring von $\mathbb{K}[x, y]$ ist und dass A kein Ideal von $\mathbb{K}[x, y]$ ist.

(b) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ wird die Kette $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ von Idealen in $\mathbb{K}[x, y]$ mit $I_n := \langle x, xy, xy^2, \dots, xy^n\rangle$ stationär?

(c) Zeigen Sie, dass die Kette $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ von Idealen in A mit $I_n := \langle x, xy, xy^2, \dots, xy^n\rangle$ nicht stationär wird.

(d) Schlussfolgern Sie, dass Unterringe von noetherschen Ringen nicht noethersch sein müssen.

Aufgabe 5* (5* Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppe $G := \langle x, y \mid x^{-3}y^{-1}x^2y = y^{-3}x^{-1}y^2x = e\rangle$ trivial ist.

(*Hinweis: Zeigen Sie $x = e$ und begründen Sie, dass nun schon $y = e$ gilt.*)

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.