UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 10.7.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Vergewissern Sie sich, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit $\sqrt{-5}^2 = -5$ und der Standardaddition und -multiplikation von $\mathbb{Z}$ einen Ring bildet.

(a) Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel aber nicht prim ist und schlussfolgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.

(b) Zeigen Sie noch einmal, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist, indem Sie zwei verschiedene Faktorisierungen (d.h. Produkte von irreduziblen Elementen, die bis auf Reihenfolge und Einheiten bestimmt sind) von $6 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ angeben.

(*Hinweis: Da $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$, induziert $\mathbb{C}$ eine Norm auf $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, nämlich $||a + b\sqrt{-5}|| = \sqrt{a^2 + 5b^2}$.*)

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring und seien $a, b \in R$. Seien $a = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ und $b = p_1^{r_k} \cdots p_k^{r_k}$ Darstellungen als Produkt paarweise verschiendener Primfaktoren. Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ existieren und dass

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(s_i, r_i)} \tag{1}$$

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(s_i, r_i)} \tag{2}$$

gilt.

Aufgabe 3 (5+1+2=8 Punkte)

(a) Sie $f := \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit $\text{ggT}(a_0, \ldots, a_m) = 1$ und sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit $p \mid a_k$ für $k = 0, \ldots, m - 1$ und $p^2 \nmid a_0$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f := x^4 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $m \geq 2$ und jede Primzahl p die Zahl $\sqrt[m]{p}$ irrational ist.

(*Hinweis: Nehmen Sie für (a) an, dass f reduzibel ist, d.h. $f = gh$ für geeignete $g, h \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie, dass p (ohne Einschränkung) den konstanten Koeffizienten von g, aber nicht den von h, teilt. Zeigen Sie dann, dass p nicht alle Koeffizienten von g teilen kann. Sei t der Index des kleinsten Koeffizienten von g, der nicht von p geteilt wird. Schauen Sie sich den Koeffizienten a_t an, um einen Widerspruch zu erhalten.*
Bei (c) dürfen Sie die folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Ist ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad ≥ 1 irreduzibel, dann ist f auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.)

Aufgabe 4 (3+2+2*=5+2* Punkte)

Sei R ein endlicher Ring.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R nullteilerfrei ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Primideale von R genau die maximalen Ideale von R sind.

(c*) Welche der Implikationen in (a) und (b) gelten allgemein, d.h. ohne die Voraussetzung, dass R endlich ist?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.