1. Dualraum

1.1 Dualraum und Bidualraum

1.1.1 Def (Dualraum)

Sei V ein Vektorraum über K.
$V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ heißt der <u>Dualraum</u> von V. Seine Elemente heißen <u>Linearformen</u>.

Aus LA1: $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein Vektorraum, insbesondere ist $V^\vee$ ein Vektorraum.

<u>Bsp</u>

1) $V = \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}:$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$$
ist eine Linearform.

2) $V = K[x]_{\leq d}$, $a \in K$,
$$\phi: V \to K : f \mapsto f(a)$$
ist eine Linearform.

3) Sei $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig} \}$

$$\int_a^b : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist Linearform.

1.1.2 Lemma Sei V endlich-dimensional. Dann ist $V \cong V^\vee$.

Beweis: Aus der Theorie der linearen Abbildungen und Matrizen (LA 1) folgt $\mathrm{Hom}_K(V, K) \cong \mathrm{Mat}(1 \times n, K)$

$\cong K^n \cong V$. $\square$

1.1.3 Def (Duale Basis) Sei $\dim_K V < \infty$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

Wir setzen $v_i^\vee \in V^\vee$,

$$v_i^\vee(v_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Kronecker-Symbol)

und $B^\vee = \{v_1^\vee, \ldots, v_n^\vee\}$.

Bem: $v_i^\vee$ hängt von ganz B ab,

nicht nur von v_i.
Die Abbildung $v_i^\vee$ ist durch lineare Fortsetzung gegeben: $v_i^\vee\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) =$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \, v_i^\vee(v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i .$$

1.1.4 Lemma (Duale Basis) Sei $\dim_K V < \infty$, B eine Basis. Dann ist $B^\vee$ eine Basis.

Beweis:
Wir zeigen: 1. $B^\vee$ ist linear unabhängig.
2. $B^\vee$ erzeugt $V^\vee$.
Dann folgt die Behauptung.

1. Sei $\mu_1 v_1^\vee + \dots + \mu_n v_n^\vee = 0$
$\Rightarrow \forall v \in V: \mu_1 v_1^\vee + \dots + \mu_n v_n^\vee (v) = 0$
Insbesondere gilt $\forall i = 1, \dots, n$:
$0 = \mu_1 v_1^\vee + \dots + \mu_n v_n^\vee (v_i) =$
$\mu_1 v_1^\vee(v_i) + \dots + \mu_n v_n^\vee (v_i) =$
$\mu_1 \delta_{1i} + \dots + \mu_n \delta_{ni} = \mu_i$.

2. Sei $f \in V^\vee$. Wie jede lineare Abbildung ist f durch die

Werte auf einer Basis eindeutig festgelegt (LA 1). Sei $\mu_i = f(v_i)$.
Sei $v \in V$, seien $\lambda_i \in K$:
$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Dann gilt

$$f(v) = f\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i f(v_i) =$$

$$\sum \lambda_i \mu_i = \sum \lambda_i \left(\mu_1 v_1^\vee + \cdots + \mu_n v_n^\vee (v_i)\right)$$

$$= \mu_1 v_1^\vee + \cdots + \mu_n v_n^\vee \left(\sum \lambda_i v_i\right) =$$

$$\mu_1 v_1^\vee + \cdots + \mu_n v_n^\vee \, (v)$$

$$\Rightarrow f = \mu_1 v_1^\vee + \cdots + \mu_n v_n^\vee$$

$$\Rightarrow f \in \langle v_1^\vee, \ldots, v_n^\vee \rangle.$$

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Schreiben wir $v \in V$ als Linearkombination einer Basis $\mathcal{B} = (v_i)$, $v = \sum \lambda_i v_i$, und $f \in V^\vee$ als Linearkombination von $\mathcal{B}^\vee$, $f = \sum \mu_j v_j^\vee$, dann gilt

$$f(v) = \sum_j \mu_j v_j^\vee \left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_{i,j} \mu_j \lambda_i v_j^\vee(v_i)$$

$$= \sum_{i,j} \mu_j \lambda_i \delta_{ij} = \sum_i \mu_i \lambda_i = \mu_1 \lambda_1 + \cdots + \mu_n \lambda_n.$$

Dies entspricht dem Matrixprodukt, wenn wir v als Spaltenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ schreiben und f als Zeilenvektor $(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Es erinnert auch an das Skalarprodukt.

__1.1.5 Def__ (Bidualraum)

$V^{\vee\vee} := (V^\vee)^\vee$ ist der __Bidualraum__ von V.

__1.1.6 Proposition__ (Bidualraum) Die Abbildung

$$i : V \longrightarrow V^{\vee\vee} : v \longmapsto i(v)$$

mit $i(v) : V^\vee \longrightarrow K : f \longmapsto i(v)(f) := f(v)$

ist ein Monomorphismus.

Ist $\dim_K V < \infty$, so ist i ein Isomorphismus.

__Beweis__:

Wohldefiniert: zz: $i(v) \in V^{\vee\vee}$, i.e.

$i(v) : V^\vee \longrightarrow K$ ist linear.

Seien $f, g \in V^\vee$, $\lambda \in K$. Dann gilt

$i(v)(f+g) = f+g(v) = f(v) + g(v)$

$= i(v)(f) + i(v)(g)$.

$i(v)(\lambda f) = \lambda f(v) = \lambda \cdot i(v)(f)$.

Morphismus: Seien $v, w \in V$, $\lambda \in K$. Dann:

$i(v+w)(f) = f(v+w) = f(v) + f(w) =$
$i(v)(f) + i(w)(f) \quad \forall f \in V^\vee$

$\Rightarrow i(v+w) = i(v) + i(w)$

$i(\lambda v)(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) =$
$\lambda \, i(v)(f) \quad \forall f \in V^\vee$

$\Rightarrow i(\lambda v) = \lambda \, i(v)$.

Injektiv: Sei $0 \neq v \in V$. Ergänze v zu einer Basis B von V.

Definiere $f \in V^\vee$ durch $f(w) = 1$ $\forall w \in B$. Insbesondere gilt $i(v)(f) = f(v) = 1 \Rightarrow i(v)$ ist nicht die Nullabbildung. Damit liegt v nicht im Kern von i

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(i) = \{0\} \Rightarrow i$ ist injektiv.

Ist V endlich-dimensional, so gilt wegen 1.1.2 $V \cong V^\vee \cong V^{\vee\vee}$, also ist i ein Isomorphismus. $\square$

1.2 Die duale Abbildung

1.2.1 Def (Duale Abbildung)

Seien V, W K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Wir definieren die duale Abbildung

$$f^t : W^\vee \to V^\vee :$$
$$g \mapsto f^t(g) := g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^t(g)"'] & W \arrow[r, "g"] & K \end{tikzcd}$$

1.2.2 Proposition: Seien U, V, W K-Vektorräume, $f, \tilde{f} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $f' \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$, $\lambda \in K$. Dann gilt:

1) f^t ist linear
2) $(\mathrm{id}_V)^t = \mathrm{id}_{V^\vee}$
3) $(f' \circ f)^t = f^t \circ f'^t$
4) f Isomorphismus $\Rightarrow$ f^t Isomorphismus
5) $(f + \tilde{f})^t = f^t + \tilde{f}^t$,
$(\lambda f)^t = \lambda \cdot f^t$.

Insbesondere ist

$$t: \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^\vee, V^\vee)$$
$$f \mapsto f^t$$
eine lineare Abbildung.

<u>Beweis:</u>

1) Seien $g, h \in W^\vee$, $\lambda \in K$. Dann ist

$$f^t(g+h) = (g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$
$$= f^t(g) + f^t(h),$$

$$f^t(\lambda g) = (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) =$$
$$\lambda f^t(g)$$

2) Sei $g \in V^\vee$, dann ist

$$(id_V)^t(g) = g \circ id_V = g \Rightarrow$$
$$(id_V)^t = id_{V^\vee}$$

3) $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f'} U$,

$f' \circ f \in \mathrm{Hom}(V, U)$.

Sei $g \in U^\vee$, dann ist

$$(f' \circ f)^t(g) = g \circ f' \circ f =$$
$$(g \circ f') \circ f = f^t(g \circ f') = f^t(f'^t(g))$$
$$\Rightarrow (f' \circ f)^t = f^t \circ f'^t$$

4) Ist f Isomorphismus, so existiert $f^{-1}: W \to V$. Mit 3) und 2) folgt

$$(f^{-1})^t \circ f^t = (f \circ f^{-1})^t = (id_W)^t = id_{W^\vee},$$

$$f^t \circ (f^{-1})^t = (f^{-1} \circ f)^t = (id_V)^t = id_{V^\vee},$$

also ist f^t invertierbar mit Inverser $(f^{-1})^t$.

5) folgt durch nachrechnen. $\square$

<u>**1.2.3 Satz**</u> (Duale Abbildung und Transponierte)

Seien V, W K-Vektorräume mit Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_m)$, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt

$$({}_B M_C(f))^T = {}_{C^\vee} M_{B^\vee}(f^t).$$

<u>Beweis:</u> Sei $x \in W$, $x = \sum_{i=1}^m \mu_i c_i$.

Dann gilt $c_i^\vee(x) = c_i^\vee(\sum_j \mu_j c_j) = \sum_j \mu_j c_i^\vee(c_j) = \sum_j \mu_j \delta_{ij} = \mu_i$, also

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i^\vee(x)\, c_i .$$

Für $f(b_j) \in W$ folgt damit

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i^\vee(f(b_j))\, c_i .$$

Damit gilt ${}_B M_C(f) = \left(c_i^\vee(f(b_j))\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$

Für $g \in V^\vee$ gilt $g = \sum_{i=1}^{n} g(b_i)\, b_i^\vee$,

denn die Werte dieser Abbildungen stimmen auf der Basis B überein.

Insbesondere

$$f^t(c_i^\vee) = \sum_{j=1}^{n} \left(f^t(c_i^\vee)(b_j)\right) b_j^\vee$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (c_i^\vee \circ f)(b_j)\, b_j^\vee =$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_i^\vee(f(b_j))\, b_j^\vee$$

$$\Rightarrow \quad {}_{C^\vee} M_{B^\vee}(f^t) = \left(c_i^\vee(f(b_j))\right)_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,m}}$$

$$\Rightarrow \quad {}_B M_C(f)^T = {}_{C^\vee} M_{B^\vee}(f^t). \qquad \square$$

Bemerkung

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_K(W^\vee, V^\vee) \arrow[d] & f^t \arrow[d, mapsto] \\
{}_B M_C(f) & \mathrm{Mat}(m \times n, K) \arrow[r, "T"] & \mathrm{Mat}(n \times m, K) & {}_{C^\vee} M_{B^\vee}(f^t) \\
& A \arrow[r, mapsto] & A^T &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere folgt

$$t: \mathrm{Hom}_K(V,W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(W^\vee, V^\vee)$$

ist Isomorphismus.

Beispiel: Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n, $E^\vee$ die duale Basis in $(K^n)^\vee$.

Wir schreiben die Vektoren in K^n als Spalten, die in $(K^n)^\vee$ als Zeilen.

Damit ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $g = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ $g(x)$ die Matrixmultiplikation $g(x) = (\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Daraus können wir ein Verfahren zum Bestimmen einer dualen Basis ableiten:

Sei $x_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Für $x_i^\vee = (b_{i1} \cdots b_{in}) \in (K^n)^\vee$

ist $(x_1^\vee, \dots, x_n^\vee)$ genau dann die zu $(x_1, \dots, x_n)$ duale Basis, wenn

$$\forall\, i, j \quad (b_{i1} \cdots b_{in}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = x_i^\vee(x_j) = \delta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \mathbb{1}_n$$

$$\Leftrightarrow \quad B = A^{-1}.$$

<u>1.2.4 Algorithmus</u> (zur Bestimmung einer dualen Basis in K^n)

Input: $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$, deren Spalten die Basis C von K^n bilden.

Output: $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$, deren Zeilen die Basis $C^\vee$ von $(K^n)^\vee$ bilden.

Verfahren: Berechne $B = A^{-1}$.

Bsp

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Basis des } \mathbb{R}^3.$$

$$\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}(-1\ \ -1\ \ -1),\ \tfrac{1}{2}(-1\ \ -1\ \ 1),\ \tfrac{1}{2}(1\ \ -1\ \ 1) \right)$$

$= C^\vee$ ist die duale Basis in $(\mathbb{R}^3)^\vee$.

1.3 Dualraum und Skalarprodukt

1.3.1 Def (Annulator)

Sei V ein K- Vektorraum.
Sei $U \subset V$ ein Unterraum.

$$U^\circ = \{ g \in V^\vee \mid g(u) = 0 \ \forall u \in U \}$$

$\subset V^\vee$ ist der <u>Orthogonalraum</u> oder <u>Annulator</u> von U.

<u>Bemerkung</u>: Annulatoren sind Unterräume.

1.3.2 Satz (Dimension Annulator)

Sei $U \subset V$ ein Unterraum. Es gilt

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Ist $(u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von U und $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ eine Basis B von V, so ist $(v_1^\vee, \dots, v_r^\vee)$ eine Basis von U°.

Beweis: $v_1^\vee, \dots, v_r^\vee$ sind linear unabhängig, da sie aus der dualen Basis zu B stammen.

Es bleibt zu zeigen:

$$\langle v_1^\vee, \dots, v_r^\vee \rangle = U^\circ.$$

„$\supset$": Sei $g \in U^\circ$,

$$g = \mu_1 u_1^\vee + \dots + \mu_k u_k^\vee + \lambda_1 v_1^\vee + \dots + \lambda_r v_r^\vee.$$

Es gilt

$$0 = g(u_i) = \mu_i \implies g \in \langle v_1^\vee, \dots, v_r^\vee \rangle.$$

„$\subset$" Da $v_j^\vee(u_i) = 0 \ \forall i, j$ ist $v_j^\vee \in U^\circ$.

$\square$

1.3.3 Satz (Annulator und duale Abbildung)

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

1) $\mathrm{Ker}(f^t) = (\mathrm{Im}(f))^\circ$

2) $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Ker}(f))^\circ$

Beweis: 1) $f^t \in \mathrm{Hom}_K(W^\vee, V^\vee)$, sei $g \in W^\vee$.

$g \in \mathrm{Ker}(f^t)$

$\iff 0 = f^t(g) = g \circ f \in V^\vee$

$\iff g \circ f(x) = 0 \quad \forall x \in V$

$\iff g(y) = 0 \quad \forall y \in \mathrm{Im} f \subset W$

$\iff g \in (\mathrm{Im} f)^\circ$.

2) „$\subset$" Sei $g \in \mathrm{Im}(f^t) \subset V^\vee$

$\Rightarrow \exists\, h \in W^\vee$ mit $g = f^t(h) = h \circ f$.

Sei $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow g(x) = h \circ f(x) = h(0) = 0$

$\Rightarrow g \in \mathrm{Ker}(f)^\circ$.

„$\supset$" Sei $g \in V^\vee$ mit $g|_{\mathrm{Ker}(f)} = 0$.

Wir müssen $h \in W^\vee$ konstruieren mit $g = f^t(h) = h \circ f$.

Wähle Basen $B = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k)$ von V, $C = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$ von W mit $\mathrm{Ker}(f) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $\mathrm{Im} f = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$, $f(u_i) = w_i$ $i = 1, \dots, r$.

Setze $h(w_i) = \begin{cases} g(u_i) & i = 1, \dots, r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann ist

$h \circ f(u_i) = h(f(u_i)) = h(w_i) = g(u_i)$ $i = 1, \dots, r$ und

$h \circ f(v_i) = h(0) = 0 = g(v_i)$ $i = 1, \dots, k$, da $g|_{\mathrm{Ker}(f)} = 0$.

$\Rightarrow h \circ f = g \Rightarrow f^t(h) = g \Rightarrow g \in \mathrm{Im}(f^t)$. $\square$

<u>1.3.4 Korollar</u> $\mathrm{rang}(f^t) = \mathrm{rang}(f)$

<u>Beweis</u> $\mathrm{rang}(f^t) = \dim(\mathrm{Im}(f^t)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)^0) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rang}(f)$. $\square$

1.3.5 Korollar Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.
Spaltenrang $(A) =$ Zeilenrang (A).

Beweis: $A = {}_E M_E(f_A)$ für die kanonische Basis E und
$f_A : K^n \longrightarrow K^n : x \longmapsto A \cdot x$.

Wegen Satz 1.2.3 gilt

$${}_{E^\vee} M_{E^\vee}(f_A{}^t) = \left({}_E M_E(f_A)\right)^T = A^T.$$

Spaltenrang $(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)) =$
$\mathrm{rang}(f_A) = \mathrm{rang}(f_A{}^t) = \dim(\mathrm{Im}(f_A{}^t)) =$
Spaltenrang $(A^T) =$ Zeilenrang (A). $\square$

1.3.6 Lemma (Dualität Annulator)

Sei $\dim_K V < \infty$. Sei $U \subset V$ ein Unterraum.

Unter dem Isomorphismus
$i : V \xrightarrow{\cong} V^{\vee\vee}$ aus 1.1.6 wird
U mit $(U^\circ)^\circ$ identifiziert.

Beweis:
Es gilt $\dim (U^\circ)^\circ = \dim V^\vee - \dim U^\circ$
$= \dim V - \dim U^\circ = \dim V - (\dim V - \dim U)$
$= \dim U$, daher reicht es zu zeigen,

$i(U) \subset (U^\circ)^\circ$. Dazu:

Sei $u \in U$, betrachte $i(u) \in V^{\vee\vee}$.

Sei $f \in U^\circ$, dann gilt $i(u)(f) = f(u) = 0$, da f U annulliert

$\Rightarrow i(u)$ annulliert f $\Rightarrow i(u) \in (U^\circ)^\circ$.

$\square$

<u>1.3.7 Lemma</u> (Dualität der dualen Abbildung)

Seien V, W endlich dimensional, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Unter der Identifikation $V \cong V^{\vee\vee}$, $W \cong W^{\vee\vee}$ aus 1.1.6 wird $(f^t)^t$ mit f identifiziert.

<u>Beweis</u>: Sei $v \in V$, betrachte $i(v) \in V^{\vee\vee}$.

$(f^t)^t(i(v)) = i(v) \circ f^t \in W^{\vee\vee}$.

$$W^\vee \xrightarrow{f^t} V^\vee \xrightarrow{i(v)} K$$

Sei $g \in W^\vee$, dann ist

$i(v) \circ f^t(g) = i(v)(g \circ f) = g(f(v))$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^t(g)"'] & W \arrow[r, "g"] & K \end{tikzcd}$$

Andererseits ist
$i(f(v)) \in W^{\vee\vee}$, $i(f(v)) : W^\vee \longrightarrow K$
$g \longmapsto g(f(v))$

$$\Rightarrow \quad i(f(v)) = (f^t)^t(i(v)) \qquad \square$$

Bemerkung: Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, $A \cdot x = 0$ ein lineares Gleichungssystem.
$W = \mathrm{Lös}(A, 0) = \mathrm{Ker}(A)$.
Die Zeilen a_i von A sind Linearformen in $(K^n)^\vee$, setze $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \subset (K^n)^\vee$,
dann gilt $\dim U = \operatorname{rang} A$.
Dann ist $W = U^0$. Durch das Lösen des LGS bestimmen wir also eine Basis von U^0.

Umgekehrt, sei $W \subset K^n$ gegeben und gesucht ist A mit $W = \mathrm{Lös}(A, 0)$.
Die Zeilen von A sind ein Erzeugendensystem von $U \subset (K^n)^\vee$ mit $U = W^0$.
Ist W gegeben durch die Spalten

$w_1, \dots, w_\ell$, dann suchen wir

$$U = \{ a \in (K^n)^\vee \mid a \cdot (w_1 \cdots w_\ell) = 0 \}$$
$$= \{ a \in (K^n)^\vee \mid (a \cdot (w_1 \cdots w_\ell))^T = 0 \}$$
$$= \{ a \in (K^n)^\vee \mid \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_\ell \end{pmatrix} \cdot a^T = 0 \}$$

Also schreiben wir die Erzeuger w_i als Zeilen in eine Matrix und lösen das LGS zur Bestimmung von U.

1.3.8 Def (Bilinearform)

Seien V, W K-Vektorräume.

$b : V \times W \to K : (v, w) \mapsto b(v, w)$

heißt Bilinearform, falls

$b_v : W \to K : w \mapsto b(v, w)$ und

$b_w : V \to K : v \mapsto b(v, w)$ linear

sind $\forall v \in V, w \in W$.

Wir erhalten dann lineare Abbildungen

$b' : V \to W^\vee : v \mapsto b_v$

$b'' : W \to V^\vee : w \mapsto b_w$

Eine Bilinearform heißt nicht

ausgeartet, falls b' und b'' injektiv sind.

Beispiele

1) $b : V \times V^\vee \longrightarrow K : (v, f) \longmapsto f(v)$

ist bilinear.

$b' = i : V \longrightarrow V^{\vee\vee} : v \longmapsto i(v)$

mit $i(v) : V^\vee \longrightarrow K : f \mapsto f(v)$

Wir wissen schon, b' ist injektiv.

$b'' : V^\vee \longrightarrow V^\vee : f \longmapsto b_f$

mit $b_f : V \longrightarrow K : v \longmapsto f(v)$,

also $b_f = f$ und $b'' = id_{V^\vee}$, also ist b'' injektiv.

Damit ist b nicht ausgeartet.

2) Skalarprodukte sind nicht ausgeartet: Sei $b : V \times V \longrightarrow K$ ein Skalarprodukt.

$b' : V \longrightarrow V^\vee : v \longmapsto b_v$ mit

$$b_v : V \longrightarrow K : w \mapsto b(v, w)$$

Sei $v \in Ker(b') \Rightarrow b_v = 0$

$\Rightarrow b_v(w) = 0 \ \forall \ w \in V$, insbesondere

$b_v(v) = b(v,v) = 0$.

Dann folgt aus der positiven Definitheit $v = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(b') = \{0\}$.

Genauso zeigt man b'' injektiv (Symmetrie).

1.3.9 Satz Seien V, W endlich dimensional, $b : V \times W \to K$ sei eine nicht ausgeartete Bilinearform. Dann sind

$$b' : V \xrightarrow{\cong} W^\vee, \quad b'' : W \xrightarrow{\cong} V^\vee$$

Isomorphismen.

Insbesondere gilt $\dim V = \dim W$.

Beweis: Da b' injektiv ist, gilt $\dim V \leq \dim W^\vee = \dim W$, da b'' injektiv ist, $\dim W \leq \dim V^\vee = \dim V \Rightarrow$ $\dim V = \dim W$ und die Abbildungen sind Isomorphismen. $\square$

1.3.10 Korollar (Skalarprodukt und Dualraum I)

In einem endlich dimensionalen euklidischen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ sind die Abb $V \to V^\vee : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$

und $V \to V^\vee : v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$

Isomorphismen.

<u>Bsp</u> Betrachte $\mathbb{R}^n$, das Standardskalarprodukt und die kanonische Basis.

Dann stimmen die Isomorphismen

$V \to V^\vee : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ und

$V \to V^\vee : e_i \mapsto e_i^\vee$ überein.

<u>1.3.11 Satz</u> (Skalarprodukt und Dualraum II)

Sei V euklidisch, $\dim_\mathbb{K} V < \infty$.

$\Psi : V \to V^\vee : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ der

Isomorphismus aus 1.3.10.

1) Sei $U \subset V$ ein Unterraum.

Dann gilt $\Psi(U^\perp) = U^\circ$.

2) Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{B}^\vee = (b_1^\vee, \dots, b_n^\vee)$ die duale Basis. Dann gilt $\Psi(b_i) = b_i^\vee$.

<u>Beweis:</u>

1) $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = \dim U^\circ$,

daher genügt es zu zeigen $\Psi(U^\perp) \subset U^\circ$.

Sei $v \in U^\perp \Rightarrow \langle v, u\rangle = 0 \ \forall$
$u \in U \Rightarrow \langle v, \cdot \rangle \in U^\circ$.

2) $\Psi(b_i) = \langle b_i, \cdot\rangle$ und
$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$, da $\mathcal{B}$ ONB.
Also ist $\langle b_i, \cdot \rangle = b_i^\vee$. $\square$

<u>1.3.12 Def</u> (Adjungierte Abbildung)
Seien V, W euklidisch und endlich dimensional, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.
Die Abbildung $f^*: W \to V$, für die gilt $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$ $\forall v \in V, w \in W$ heißt die <u>adjungierte</u> Abbildung.

<u>1.3.13 Lemma</u> (Adjungierte und duale Abbildung)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[l, shift left, "f^*"] \arrow[d, "\Psi"] \\
V^\vee & W^\vee \arrow[l, "f^t"]
\end{tikzcd}$$

$v \mapsto \langle\ , v\rangle$ $\qquad$ $w \mapsto \langle\ , w\rangle$

$g \circ f \leftarrow\!\shortmid\ g$

Es gilt $f^* = \phi^{-1} \circ f^t \circ \Psi$.

Beweis: $f^t(\Psi(w)) = f^t(\langle \cdot, w\rangle)$
$= \langle f(\cdot), w\rangle = \langle \cdot, f^*(w)\rangle =$
$\Phi(f^*(w))$. $\square$

Bemerkung:
Aus 1.3.3 folgt mit dieser Identifizierung
$\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$, $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.