2. Multilinearformen und Tensorprodukte

2.1 Definition, Existenz, Beispiele

2.1.1 Def (Multilineare Abbildungen)

Seien $V, V_1, \dots, V_n$ Vektorräume über K.
$f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V$ heißt
<u>multilinear</u>, falls f linear in jedem Argument ist, also falls für $i = 1, \dots, n$, $x_i, y_i \in V_i$, $\lambda, \mu \in K$:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$\lambda f(x_1, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Die Menge der multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \dots \times V_n$ nach V heißt $L(V_1, \dots, V_n; V)$.

2.1.2 Notation Wir verwenden das Symbol $\wedge$ für Weglassen.

<u>Bsp</u>

$$(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$V_1 \times \dots \times \hat{V}_i \times \dots \times V_n = V_1 \times \dots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \dots \times V_n$$

<u>Bemerkung:</u> $f: V_1 \times \cdots \times V_n \to V$ multilinear

$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \; \forall (x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n) \in V_1 \times \cdots \times \hat{V_i} \times \cdots \times V_n$:

$$f|_{\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times V_i \times \{x_{i+1}\} \times \cdots \times \{x_n\}} : V_i \longrightarrow V:$$

$$x \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

ist linear.

<u>Beispiele</u>

1) Sei $\mathcal{U} = \{ f: V_1 \times \cdots \times V_n \to V, \; f \text{ Abbildung} \}$

Mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{U}$ ein K-Vektorraum. $L(V_1, \ldots, V_n; V)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{U}$, denn er ist nicht-leer (die Nullabbildung ist multilinear) und Summen und skalare Vielfache von multilinearen Abbildungen sind multilinear.

2) $V_1 = \cdots = V_n = K^n, \; V = K$

$$\det: K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \det(a_1 \cdots a_n)$$

ist multilinear.

3) Bilinearformen sind multilinear.

4) Skalarprodukte auf euklidischen Räumen sind multilinear.
(Nicht auf unitären, da gibt es nur Sesquilinearität, nicht Bilinearität.)

5) $V = K[x]_{\leq d}$, $U = K[x]_{\leq 2d}$

$f : V \times V \to U : (p, q) \mapsto p \cdot q$

ist multilinear.

Da $f(x^i, x^j) = x^{i+j}$ liegt eine Basis von U in $\operatorname{Im} f$.
Aber i.A. $\operatorname{Im} f \neq U$ (das Bild einer multilinearen Abbildung ist nicht notwendig ein Unterraum):
für $K = \mathbb{Q}$ ist z.B. $x^2 - 2 \notin \operatorname{Im} f$ für $d = 1$, für $K = \mathbb{R}$ ist z.B. $x^2 + 1 \notin \operatorname{Im} f$ für $d = 1$, (obwohl jeweils $x^2, -2$ bzw. $x^2, 1 \in \operatorname{Im} f$), da sich diese quadratischen Polynome nicht als Produkt von linearen Polynomen über K schreiben lassen.

6) Sei $K[x, y]$ der Polynomring in mehreren Veränderlichen.

$$K[t] \times K[t] \longrightarrow K[x,y]$$
$$(p, q) \longmapsto p(x)\cdot q(y)$$

ist bilinear.

2.1.3 Def (Tensorprodukt)

1) Seien V, W K-Vektorräume. Ein Paar (U, φ), wobei U ein K-Vektorraum ist und $\varphi: V \times W \to U$ eine bilineare Abbildung, heißt <u>Tensorprodukt</u> von V und W, wenn (U, φ) der folgenden <u>universellen Eigenschaft</u> genügt:

für jedes weitere Paar (U', φ') (mit U' K-Vektorraum, $\varphi': V \times W \to U'$ bilinear) $\exists!$ lineare Abbildung $\Psi: U \to U'$ mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & U \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\Psi"] \\
& U' &
\end{tikzcd}$$

Man schreibt $U = V \otimes W$ (und unterschlägt φ in der Notation).
Manchmal schreibt man $V \otimes_K W$, um den Grundkörper zu betonen.

2) Analog:
$V_1, \dots, V_n$ K-Vektorräume, (U, φ) mit U K-Vektorraum, $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to U$ multilinear heißt Tensorprodukt $U = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, wenn $\forall\, (U', \varphi')$ mit U' K-Vektorraum, $\varphi' : V_1 \times \dots \times V_n \to U'$ multilinear $\exists!\, \Psi : U \to U'$ linear mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists!\,\Psi"] \\
& U'
\end{tikzcd}
$$

3) Die Elemente des Tensorprodukts heißen **Tensoren**, die Elemente in $\operatorname{Im} \varphi$ **reine Tensoren**.

2.1.4 Satz (Eindeutigkeit des Tensorprodukts)

Seien (U, φ) und (U', φ') zwei Tensorprodukte von V, W (bzw. $V_1, \dots, V_n$).
Dann $\exists!$ Isomorphismus $\Psi : U \to U'$ mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$.

Beweis

Die universelle Eigenschaft für (U, φ) angewendet auf (U', φ') liefert ein eindeutiges $\Psi : U \to U'$. Die universelle Eigenschaft für (U', φ') angewendet auf (U, φ) liefert ein eindeutiges $\Psi' : U' \to U$.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & U \arrow[dl, dashed, bend left, "\exists!\,\Psi"] \\
U' \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\Psi'"] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\Psi' \circ (\Psi \circ \varphi) = \Psi' \circ \varphi' = \varphi$ $(*)$
und $\Psi \circ (\Psi' \circ \varphi') = \Psi \circ \varphi = \varphi'$.

Wegen der Eindeutigkeit kann nur Ψ die Bedingungen erfüllen.

Jetzt wenden wir die universelle Eigenschaft für (U, φ) auf (U, φ) an und erhalten genau ein $\pi : U \to U$ mit $\pi \circ \varphi = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists!\,\pi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

id_U ist eine lineare Abbildung $U \to U$, die $id_U \circ \varphi = \varphi$ erfüllt, also folgt aus der Eindeutigkeit oben $\pi = id_U$.

Andererseits ist $\Psi' \circ \Psi$ eine lineare Abbildung $U \to U' \to U$ und sie erfüllt $(\Psi' \circ \Psi) \circ \varphi = \varphi$ $(*)$

$\Rightarrow \pi = \Psi' \circ \Psi \Rightarrow \Psi' \circ \Psi = id_U$.

Zuletzt wenden wir die universelle Eigenschaft für (U', φ') auf (U', φ') an und erhalten genau ein $\pi' : U' \to U'$ mit $\pi' \circ \varphi' = \varphi'$:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U' \arrow[d, dashed, "\exists!\,\pi'"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

Wie vorher folgt $\pi' = id_{W'}$ und $\pi' = \Psi \circ \Psi'$ mit $(*)$ $\Longrightarrow$

$\Psi \circ \Psi' = id_{W'}$.

Damit ist Ψ ein Isomorphismus.

Der Beweis ist analog für das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, $n > 2$. $\square$

<u>Notation:</u> $\sum\limits_{i \in I}' \lambda_i x_i$ bezeichnet eine Linearkombination der x_i, das heißt, nur endlich viele Summanden sind ungleich 0. Ist die Indexmenge I selbst endlich, ist der Strich nicht relevant.

<u>2.1.5 Lemma</u> (Multilineare Fortsetzung)

Seien U, V, W Vektorräume über K,

sei $B = (x_i \mid i \in I)$ eine Basis von V,

$C = (y_j \mid j \in J)$ eine Basis von W,

$(z_{ij} \mid i \in I, j \in J)$ eine beliebige Familie in U.

Dann $\exists!$ bilineare Abbildung

$f: V \times W \longrightarrow U$ mit $f(x_i, y_j) = z_{ij}$

$\forall (i,j) \in I \times J$.

Ist $x = \sum' \lambda_i x_i \in V$, $y = \sum' \mu_j y_j \in W$, so ist $f(x,y) = \sum'_{i,j} \lambda_i \mu_j z_{ij}$.

<u>Beweis:</u> Für $x = \sum' \lambda_i x_i$, $y = \sum' \mu_j y_j$

definieren wir $f(x,y) = \sum'_{i,j} \lambda_i \mu_j z_{ij}$.

Dann ist f bilinear:

für $w = \sum' v_i x_i$ und $a, b \in K$

gilt $f(ax + bw, y) =$

$f(\sum' (a\lambda_i + bv_i) x_i, y) =$

$\sum' (a\lambda_i + bv_i) \mu_j z_{ij} =$

$a \sum' \lambda_i \mu_j z_{ij} + b \sum' v_i \mu_j z_{ij} =$

$a f(x,y) + b f(w,y)$,

die andere Komponente analog.

Damit ist die Existenz gezeigt.

Zur Eindeutigkeit:

Sei g eine weitere bilineare Abbildung mit $g(x_i, y_j) = z_{ij}$. Seien x, y wie vorher, dann folgt

$g(x,y) = g(\sum' \lambda_i x_i, \sum' \mu_j y_j) =$

$\sum' \lambda_i \mu_j \, g(x_i, y_j) = \sum' \lambda_i \mu_j \, z_{ij} =$
$f(x, y) \quad \Rightarrow \quad g = f. \qquad \square$

<u>Bemerkung:</u> Die Menge
$M = \{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ von
Tupeln von Basisvektoren (siehe 2.5)
ist i.A. weder linear unabhängig noch
ein Erzeugendensystem von $V \times W$.
Eine Basis von $V \times W$ ist
$D = \{(x_i, 0) \mid i \in I\} \cup \{(0, y_j) \mid j \in J\}$.
Auf D ist jede bilineare Abbildung 0,
denn $f(x_i, 0) = f(x_i, 0 \cdot 0) = 0 \cdot f(x_i, 0) = 0$
und genauso $f(0, y_j) = 0$.
Im endlich dimensionalen Fall ist
$\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W) = |I| + |J|$,
aber $|M| = |I| \cdot |J|$, also muß M
i.A. linear abhängig sein.
Wir konstruieren das Tensorprodukt
so, daß jedem (x_i, y_j) ein
Element $x_i \otimes y_j$ entspricht, so daß

$\{x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ eine Basis von $V \otimes W$ ist.

2.1.6 Def (Direkte Summe von Vektorräumen)
Sei I eine beliebige Indexmenge.
Seien V_i, $i \in I$, K- Vektorräume.
Das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} V_i =$
$\{(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in V_i\}$ wird mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation ein K- Vektorraum.

$\prod_{i \in I} V_i$ enthält den Unterraum

$\{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \neq 0_{V_i}$ für nur endlich viele $i \in I\} =: \bigoplus_{i \in I} V_i$,

die (äußere) <u>direkte Summe</u> der V_i.

<u>Bemerkung</u>:
Falls $|I| < \infty$, gilt $\prod V_i = \bigoplus V_i$.

<u>Bsp</u>: Sei $I = \mathbb{N}$, $V_i = K \ \forall i \in I$.
Wir schreiben $x^i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
$\quad\uparrow$ i-te Stelle.

Damit ist $(a_0, a_1, a_2, \dots) = \sum a_i x^i$.

$\prod_{i \in I} V_i = \prod_{i \in \mathbb{N}} K = K[[x]] =$ Körper der (formalen) Potenzreihen

$\bigoplus_{i \in I} V_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K = K[x] =$ Polynomring.

<u>2.1.7 Satz</u> (Existenz des Tensorprodukts)

Seien V, W Vektorräume über K, dann existiert ein Vektorraum $V \otimes W$ und eine bilineare Abbildung $\varphi: V \times W \to V \otimes W$, so daß $(V \otimes W, \varphi)$ Tensorprodukt ist.

Für $x \in V$, $y \in W$ setzen wir $x \otimes y := \varphi(x, y)$, das heißt, die reinen Tensoren sind genau die Tensoren der Form $x \otimes y$.

__Beweis__ Seien $\mathcal{B} = (x_i \mid i \in I)$, $\mathcal{C} = (y_j \mid j \in J)$ Basen von V bzw. W.

Wir bilden eine Menge $\mathfrak{B}$ mit $|I \times J|$ verschiedenen Symbolen

$\mathfrak{B} = \{ x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J \}$.

Wir setzen

$$V \otimes W = \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K = \bigoplus_{x_i \otimes y_j \in \mathfrak{B}} K$$

Wir schreiben $x_i \otimes y_j$ für den Basisvektor zur Komponente (i,j),

dann ist

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{(i,j) \in I \times J}' \lambda_{ij} \; x_i \otimes y_j \mid \lambda_{ij} \in K \right\}$$

$\mathfrak{B}$ ist per Definition eine Basis von $V \otimes W$.

Aus 2.1.5 folgt, daß es genau eine bilineare Abbildung φ gibt mit

$$\varphi : V \times W \longrightarrow V \otimes W : (x_i, y_j) \longmapsto x_i \otimes y_j$$

Für $x = \sum' \lambda_i x_i$, $y = \sum' \mu_j y_j$ folgt

$$x \otimes y = \varphi(x,y) = \sum' \lambda_i \mu_j \; x_i \otimes y_j .$$

Wir müssen zeigen, daß $(V \otimes W, \varphi)$ der universellen Eigenschaft genügt.
Sei dazu U' ein K-Vektorraum und $\varphi' : V \times W \to U'$ eine bilineare Abbildung. Setze $z_{ij} := \varphi'(x_i, y_j) \in U'$ für $(i,j) \in I \times J$.
Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $V \otimes W$ ist, gibt es genau eine lineare Abbildung
$\Psi : V \otimes W \to U' : x_i \otimes y_j \mapsto z_{ij}$.
Dann gilt $\Psi \circ \varphi(x,y) = \Psi(\varphi(x,y))$
$= \Psi\left(\sum' \alpha_i \mu_j \, x_i \otimes y_j\right) =$
$\sum' \alpha_i \mu_j \, \Psi(x_i \otimes y_j) = \sum' \alpha_i \mu_j \, z_{ij}$
$= \sum' \alpha_i \mu_j \, \varphi'(x_i, y_j) = \varphi'\left(\sum' \alpha_i x_i, \sum' \mu_j y_j\right)$
$= \varphi'(x,y) \implies \Psi \circ \varphi = \varphi'$.

$\square$

2.1.8 Korollar

Sind $(x_i \mid i \in I)$, $(y_j \mid j \in J)$ Basen von V bzw. W, so ist $(x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J)$ Basis von $V \otimes W$.

Bemerkung: Ist $\dim V = n$, $\dim W = m$, so ist $\dim(V \otimes W) = n \cdot m$.

Bemerkung: Die Sätze zu Eindeutigkeit (2.1.4) und Existenz (2.1.7) des Tensorprodukts lassen sich auf mehrere Faktoren $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ verallgemeinern.

2.1.9 Lemma

Sind V, W K-Vektorräume, $x, x' \in V$, $y, y' \in W$, $\lambda \in K$, dann gilt:

1) $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

2) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$,

insbesondere $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$

3) Jeder Tensor in $V \otimes W$ besitzt eine (nicht eindeutige) Darstellung als endliche Summe von reinen Tensoren, das heißt, für $z \in V \otimes W$ $\exists$ $v_i \in V$, $w_i \in W$, $i = 1, \dots, r$:

$$z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$$

<u>Beweis:</u> 1), 2) folgen aus der Bilinearität von φ.

3) Seien $(x_i \mid i \in I)$, $(y_j \mid j \in J)$ Basen, dann besitzt z eine Darstellung in der Basis $(x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J)$ von $V \otimes W$:

$$z = \sum_{i,j}{}' \lambda_{ij} \, x_i \otimes y_j$$
$$= \sum_{i,j}{}' (\lambda_{ij} x_i) \otimes y_j$$
$$= \sum_{i,j} x_i \otimes (\lambda_{ij} y_j)$$

$\square$

<u>Bemerkung</u>

1) $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ ist i. A. weder injektiv noch surjektiv.

2) nicht jeder Tensor ist rein.

3) Eine lineare Abbildung auf $V \otimes W$ können wir durch die Bilder der reinen Tensoren

festlegen und linear in beiden Argumenten fortsetzen.
Anders gesagt liefert eine bilineare Abb. auf $V \times W$ eine lineare auf $V \otimes W$, dies ist genau die universelle Eigenschaft.

Beispiele

1) Sei V ein K-Vektorraum.

$$\Psi : V \otimes K \xrightarrow{\cong} V : x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$$

ist ein Vektorraumisomorphismus mit Inverser $\Psi^{-1} : V \to V \otimes K :$

$$x \mapsto x \otimes 1 .$$

Das Tensorprodukt $V \otimes K$ kommt mit der bilinearen Abbildung

$$\varphi : V \times K \to V \otimes K : (x, \lambda) \mapsto x \otimes \lambda$$

Für die bilineare Abbildung

$$\varphi' : V \times K \to V : (x, \lambda) \mapsto \lambda x$$

gilt $\varphi'^{-1}(0) = V \times \{0\} \cup \{0\} \times K$

(dies ist kein Unterraum von $V \times K$, φ' ist nur bilinear und nicht linear).

Ψ ist die von φ' induzierte Abbildung auf dem Tensorprodukt:

$$\begin{tikzcd} V \times K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & V \otimes K \arrow[d, "\Psi"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Ψ ist surjektiv, denn für $x \in V$ ist $x = \Psi(x \otimes 1) \in \operatorname{Im} \Psi$.

Jeder Tensor von $V \otimes K$ ist ein reiner Tensor:

sei $z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes d_i = \sum_{i=1}^{r} (d_i x_i \otimes 1)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} d_i x_i \right) \otimes 1.$$

Ψ ist injektiv, denn

$0 = \Psi(z) = \Psi(x \otimes 1) = x$ für geeignetes $x \Rightarrow \operatorname{Kern} \Psi =$

$\{0 \otimes 1\} = \{0\}$.

2) $V \otimes K^n$ (mit der bilinearen Abbildung $\varphi: V \times K^n \longrightarrow V \otimes K^n$
$(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \mapsto x \otimes (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$)

Wir zeigen: $V \otimes K^n \cong V^n$.

Betrachte dazu

$\Psi: V \otimes K^n \longrightarrow V^n$:
$x \otimes (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto (\lambda_1 x, \ldots, \lambda_n x)$

Sei φ' die bilineare Abbildung

$\varphi': V \times K^n \longrightarrow V^n$:
$(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \longmapsto (\lambda_1 x, \ldots, \lambda_n x)$

Sie induziert Ψ durch die universelle Eigenschaft.

<u>Beh</u> (V^n, φ') genügt der universellen Eigenschaft auch.

Daraus folgt dann, daß $V \otimes K^n \cong V^n$, und daß Ψ der eindeutige Isomorphismus ist.

Beweis der Beh.:

Sei $\varphi'' : V \times K^n \longrightarrow U$ eine bilineare Abbildung. Definiere

$$\Psi' : V^n \longrightarrow U : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi''(x_i, e_i)$$

Da φ'' bilinear ist, ist Ψ' linear und es folgt $\varphi'' = \Psi' \circ \varphi'$, denn

$$\begin{tikzcd}
V \times K^n \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & V^n \arrow[d, "\Psi'"] \\
 & U
\end{tikzcd}$$

$$\Psi' \circ \varphi'(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) =$$

$$\Psi'(\lambda_1 x, \dots, \lambda_n x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi''(\lambda_i x, e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi''(x, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi''(x, \lambda_i e_i)$$

$$= \varphi''(x, \sum \lambda_i e_i) = \varphi''(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)).$$

3) Nicht jedes Element ist ein reiner Tensor. Angenommen,

$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in K^2 \otimes K^2$

wäre ein reiner Tensor. Dann gäbe es Vektoren $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in K^2$, $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \in K^2$ mit

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = x \otimes y =$$
$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \otimes (\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) =$$
$$\lambda_1 \mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1 \mu_2 e_1 \otimes e_2 + \lambda_2 \mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2 \mu_2 e_2 \otimes e_2 .$$

Da $(e_i \otimes e_j \mid i,j \in \{1,2\})$ eine Basis von $K^2 \otimes K^2$ ist, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda_1 \mu_1 = 0, \quad \lambda_1 \mu_2 = 1, \quad \lambda_2 \mu_1 = 1, \quad \lambda_2 \mu_2 = 0 .$$

Aus $\lambda_1 \mu_1 = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ oder $\mu_1 = 0$, damit aber $\lambda_1 \mu_2 = 0$ oder $\lambda_2 \mu_1 = 0$ $\lightning$.

4) $\varphi : K[t] \times K[t] \longrightarrow K[x,y]$:
$$(f, g) \longmapsto f(x) \cdot g(y)$$

ist bilinear. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $\exists!$ lineare Abbildung

$$\Psi : K[t] \otimes K[t] \longrightarrow K[x,y]$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, denn sie bildet die Basis $(t^i \otimes t^j)$ ab auf die Basis $(x^i y^j)$.

5) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Bilde $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, die <u>Komplexifizierung</u> von V.
Wir können die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (v \otimes \mu) = v \otimes (\lambda \mu)$ auf $\lambda \in \mathbb{C}$ ausweiten und $V_{\mathbb{C}}$ so zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum machen.
Ist $B = (x_j \mid j \in J)$ eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist $(x_j \otimes 1, x_j \otimes i \mid j \in J)$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Für $x \in V_{\mathbb{C}}$ existieren also eindeutige $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, so daß

$$x = \sum (a_j (x_j \otimes 1) + b_j (x_j \otimes i))$$
$$= \sum (x_j \otimes a_j + x_j \otimes b_j i) =$$

$$\sum x_j \otimes (a_j + b_j i)$$

Für $V_\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum läßt sich jedes Element eindeutig darstellen als

$$x = \sum x_j \otimes (a_j + b_j \cdot i) = \sum (a_j + b_j \cdot i) \cdot (x_j \otimes 1)$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Erweiterung der Skalarmultiplikation definiert ist.

Damit ist $(x_j \otimes 1 \mid j \in J)$ eine Basis von $V_\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Ist $J = \{1, \dots, n\}$, so liefert die Basis B einen Isomorphismus $\phi_B : V \cong \mathbb{R}^n$.

Dieser induziert

$$\phi_B \otimes id_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$$

$$x_j \otimes \lambda \longmapsto e_j \otimes \lambda$$

Wegen Bsp 2) gilt $\mathbb{R}^n \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$, so daß wir den Isomorphismus

$$V_\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n : x_j \otimes 1 \longmapsto e_j$$

erhalten. Dieser ist nach Konstruktion $\mathbb{R}$-linear, man rechnet nach, daß es auch $\mathbb{C}$-linear ist.

2.1.10 Lemma

Seien U, V, W K-Vektorräume. Dann existieren eindeutig bestimmte Isomorphismen

1) $V \otimes W \xrightarrow{\cong} W \otimes V : x \otimes y \mapsto y \otimes x$

2) $(V \otimes W) \otimes U \xrightarrow{\cong} V \otimes (W \otimes U) \to V \otimes W \otimes U$

$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

3) $K \otimes V \xrightarrow{\cong} V : \lambda \otimes x \mapsto \lambda x$

Es genügt, die Abbildungen jeweils auf den reinen Tensoren anzugeben.

Beweis:

1) Betrachte die bilineare Abbildung

$\varphi' : V \times W \to W \otimes V : (x, y) \mapsto y \otimes x.$

Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $\exists!$ lineare Abbildung $\Psi : V \otimes W \to W \otimes V :$

$x \otimes y \mapsto y \otimes x$

Durch Vertauschen der Rollen erhalten wir analog $\Psi' : W \otimes V \to V \otimes W$

$y \otimes x \mapsto x \otimes y$

Dabei gilt $\Psi' \circ \Psi = \mathrm{id}_{V\otimes W}$,
$\Psi \circ \Psi' = \mathrm{id}_{W \otimes V}$, da die Abbildungen jeweils auf den reinen Tensoren übereinstimmen $\Rightarrow \Psi$ ist Isomorphismus.

2), 3) analog. $\square$

2.2 Tensoren, Abbildungen, Matrizen

2.2.1 Proposition (Tensorprodukt von Abbildungen)

Seien V, V', V'', W, W', W'' Vektorräume$/K$,
$f \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$, $f' \in \mathrm{Hom}_K(V', V'')$,
$g \in \mathrm{Hom}_K(W, W')$, $g' \in \mathrm{Hom}_K(W', W'')$.

1) $\exists!$ lineare Abbildung

$$f \otimes g : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$$
$$x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

2) $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$
$\in \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V'' \otimes W'')$

Beweis: 1) Da
$$\varphi' : V \times W \longrightarrow V' \otimes W'$$
$$(x, y) \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

bilinear ist, induziert sie eine eindeutige lineare Abbildung $f \otimes g$.

2) Die beiden Abbildungen stimmen auf den reinen Tensoren überein, also sind sie gleich.

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)(x \otimes y) =$$

$$(f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(y) =$$

$$f'(f(x)) \otimes g'(g(y)) =$$

$$f' \otimes g' (f(x) \otimes g(y)) =$$

$$f' \otimes g' (f \otimes g (x \otimes y)) =$$

$$(f' \otimes g' \circ f \otimes g)(x \otimes y).$$

$\square$

<u>2.2.2 Proposition</u> (Tensorprodukt und Dualraum)

Sind V, W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, so existieren eindeutig bestimmte Isomorphismen

1) $\alpha : V^\vee \otimes W^\vee \longrightarrow (V \otimes W)^\vee$

mit $\alpha(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \cdot g(y)$,

2) $\beta : V^\vee \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

mit $\beta(f \otimes y)(x) = f(x) \cdot y$.

Beweis: 1) Sei $f \in V^\vee$, $g \in W^\vee$.

Die Abbildung
$$\begin{aligned} V \times W &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto f(x)\cdot g(y) \end{aligned}$$

ist bilinear und induziert daher eine eindeutige lineare Abbildung

$$V \otimes W \longrightarrow K : x \otimes y \mapsto f(x)\cdot g(y),$$

die wir $\alpha'(f,g) \in (V \otimes W)^\vee$ nennen.

So erhalten wir

$$\alpha' : V^\vee \times W^\vee \longrightarrow (V \otimes W)^\vee.$$

Beh: α' ist bilinear.

Seien $f, f' \in V^\vee$, $g \in W^\vee$, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha'(f+f', g) : V \otimes W &\longrightarrow K \\ x \otimes y &\longmapsto (f+f')(x)\cdot g(y) \\ &= (f(x)+f'(x))\cdot g(y) \\ &= f(x)\cdot g(y) + f'(x)\cdot g(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(f,g) + \alpha'(f',g) : V \otimes W &\longrightarrow K \\ x \otimes y &\longmapsto f(x)\cdot g(y) + f'(x)\cdot g(y) \end{aligned}$$

Die Abbildungen stimmen auf den reinen

Tensoren überein, sind also gleich.
Genauso zeigt man die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation und die Linearität in der zweiten Komponente.

Für das bilineare α' $\exists!$ lineares

$$\alpha : V^\vee \otimes W^\vee \longrightarrow (V \otimes W)^\vee$$

mit $\alpha(f \otimes g) = \alpha'(f, g)$.

<u>Beh.:</u> α ist Isomorphismus.

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V,
$C = (y_1, \dots, y_m)$ von W.
Dann ist $D = \left(x_i^\vee \otimes y_j^\vee \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \right)$

eine Basis von $V^\vee \otimes W^\vee$.

Für die Bilder der Basiselemente gilt

$$\alpha(x_i^\vee \otimes y_j^\vee)\,(x_k \otimes y_l) =$$
$$x_i^\vee(x_k) \cdot y_j^\vee(y_l) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}.$$

Für die Basis $\left((x_i \otimes y_j)^\vee\right)$ von $(V \otimes W)^\vee$ gilt

$(x_i \otimes y_j)^\vee (x_k \otimes y_l) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$

$\Rightarrow$ α bildet eine Basis auf eine Basis ab.

2) Sei $f \in V^\vee$, $y \in W$.

Setze $\beta': V^\vee \times W \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$
$$(f, y) \mapsto (x \mapsto f(x) \cdot y)$$

<u>Beh</u>: β' ist bilinear.

Wir zeigen die Verträglichkeit mit Summen, die Skalarmultiplikation verhält sich jeweils analog.

$$\beta'(f+g, y): x \mapsto (f+g)(x) \cdot y = (f(x)+g(x)) \cdot y = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y$$

$$\beta'(f,y) + \beta'(g,y): x \mapsto f(x) \cdot y + g(x) \cdot y.$$

$$\beta'(f, y+y'): x \mapsto f(x) \cdot (y+y') = f(x) \cdot y + f(x) \cdot y'$$

$$\beta'(f,y) + \beta'(f,y'): x \mapsto f(x) \cdot y + f(x) \cdot y'$$

Damit existiert ein lineares

$\beta: V^\vee \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

<u>Beh</u> β ist Isomorphismus.

Eine Basis von $V^\vee \otimes W$ ist

$(x_i^\vee \otimes y_j)$.

$\mathrm{Hom}_K(V,W) \cong \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, wobei wir die Isomorphismen ϕ_B, ϕ_C verwenden:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_B"'] & W \arrow[d, "\phi_C"] \\ K^n \arrow[r, "{}_B M_C(f)"'] & K^m \end{tikzcd}$$

Eine Basis von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist (ε_{ij}), mit $(\varepsilon_{ij})_{kl} = \delta_{jk} \cdot \delta_{il}$ –

eine Matrix mit einer 1 bei Eintrag ji und sonst Nullen.

Die Abbildung $f_{ij}: V \longrightarrow W$

$x_k \longmapsto \delta_{ik} \cdot y_j$

wird unter dem Isomorphismus auf E_{ij} abgebildet, denn

$E_{ij} \cdot e_k = e_j \cdot \delta_{ik}$ und

$\phi_C \circ f_{ij} \circ \phi_B^{-1}(e_k) = \phi_C \circ f_{ij}(x_k) =$

$\phi_C(\delta_{ik} \cdot y_j) = \delta_{ik} \cdot e_j$.

Damit ist $F = (f_{ij})$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Unter β wird $(x_i^\vee \otimes y_j)$ auf f_{ij} abgebildet:

$$\beta(x_i^\vee \otimes y_j)(x_k) = x_i^\vee(x_k) \cdot y_j$$
$$= \delta_{ik} \cdot y_j$$
$$= f_{ij}(x_k).$$

$\square$

<u>Bsp:</u> Ist $\dim V = n$, $\dim W = m$, so ist $\dim(V \otimes W) = m \cdot n$, $V \otimes W \cong K^{nm}$.

Ist $V = K^n$, $W = K^m$, so ist es naheliegend wegen der Doppelindizierung der Basis $(e_i \otimes e_j)$ $V \otimes W \cong K^{nm}$

mit $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ zu identifizieren.

Dabei gilt: reine Tensoren sind Matrizen, die als Produkt zweier Vektoren entstehen.

Ist $x = \sum \lambda_i e_i$, $y = \sum \mu_j e_j$, so ist

$$x \otimes y = \left(\sum \lambda_i e_i\right) \otimes \left(\sum \mu_j e_j\right) =$$

$$\sum \lambda_i \mu_j \, e_i \otimes e_j.$$

Dies identifizieren wir mit der Matrix $(\lambda_i \mu_j)_{ij}$, also $x \otimes y =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \cdot (\mu_1 \cdots \mu_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & \cdots & \lambda_1 \mu_m \\ \vdots & & \\ \lambda_n \mu_1 & \cdots & \lambda_n \mu_m \end{pmatrix}$$

Ein reiner Tensor $(\neq 0)$ hat als Matrix rang 1, denn $\dim_K \langle \mu_1 \cdot x, \dots, \mu_m \cdot x \rangle$ $= \dim_K (x) = 1$.

<u>2.2.3 Def</u> (Rang von Tensoren)

Seien V, W K-Vektorräume.
Sei $z \in V \otimes W$, $z \neq 0$.
Sei r minimal, so daß man z als Summe von r reinen Tensoren schreiben kann: $z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$.

Dann ist r der <u>Rang</u> von z.

<u>2.2.4 Satz</u> (Tensorrang = Matrixrang)

Sei $A \in Mat(n \times m, K) \cong K^n \otimes K^m$. Dann ist der Tensorrang von A gleich dem Matrixrang. Dh, für $r = \text{rang}\, A$ kann man A als Summe von r (und nicht weniger) rang-1-Matrizen schreiben.

<u>Beweis</u>: Seien $M, N \in Mat(n \times m, K)$.

Beh: Falls $\text{rang}(M) = k$ und $\text{rang}\, N = 1$, so ist $\text{rang}(M+N) \leq k+1$.

$Mat(n \times m, K) \cong \text{Hom}_K(K^m, K^n)$ und durch Basiswechsel in K^n und K^m kann man Matrizen in Normalform $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen (LA 1).

Damit ist ~~OE~~ $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Seien $a_1, \ldots, a_m$ die Spalten von M. Dann sind die Spalten von $M+N$ $a_1 + e_1, a_2, \ldots, a_m$.

Es gilt $\text{rang}(M+N) =$

$\dim_K \langle a_1 + e_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ und

$\langle a_1 + e_1, a_2, \dots, a_m \rangle \subset \langle a_1, \dots, a_m, e_1 \rangle$

$= \langle a_1, \dots, a_m \rangle + \langle e_1 \rangle$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(M+N) \leq \dim_K \langle a_1, \dots, a_m \rangle + 1$

$= \operatorname{rang}(M) + 1.$

Per Induktion folgt:
Eine Summe von r rang-1-Matrizen hat höchstens rang r.

Sei A eine Matrix vom Rang r.
Wieder gilt OE $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\sum_{i=1}^{r} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} + \cdots$$

und $E_{ii} = e_i \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \cdots 1 \cdots 0)$

ist eine Matrix vom Rang 1.

Damit haben wir A als Summe von r rang-1-Matrizen geschrieben und wir können sie nicht als Summe von weniger schreiben.

Also ist der Tensorrang von A gleich r. $\square$

2.2.5 Algorithmus (Tensor in $K^n \otimes K^m$ als Summe von reinen Tensoren / Matrix als Summe von rang-1-Matrizen)

Input: $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$.

Output: $r = \mathrm{rang}(A)$ Matrizen A_i vom Rang 1 mit $A = \sum_{i=1}^{r} A_i$

1. Schritt: Berechne mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilen und Spalten eine Normalform $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A.

Dh, wir erhalten Elementarmatrizen $P_1, \dots, P_s$, $Q_1, \dots, Q_t$ mit

$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_s \cdot A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_t = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt:

Setze $A_i = P_s^{-1} \cdot \ldots \cdot P_1^{-1} \cdot E_{ii} \cdot Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ für $i = 1, \dots, r$.

Bsp $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

Zeilen

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 4\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 3\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalten

$$\xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -4 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & -2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad BAC = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = B^{-1} \mathcal{E}_{11} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 0\ 2) = (B^{-1} \cdot e_1) \cdot (e_1 \cdot C^{-1})$$

$$A_2 = B^{-1} \mathcal{E}_{22} C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (0\ 1\ 1\ -1) = (B^{-1} \cdot e_2) \cdot (e_2 \cdot C^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.6 Beispiel (Tensorprodukte von Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n' \times n, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(m' \times m, K)$

$f = f_A : K^n \longrightarrow K^{n'}$

$g = f_B : K^m \longrightarrow K^{m'}$

Wir erhalten $f \otimes g : K^n \otimes K^m \longrightarrow K^{n'} \otimes K^{m'}$

$$x \otimes y \longmapsto Ax \otimes By$$

Wir identifizieren $K^n \otimes K^m$ mit $K^{n\cdot m}$

durch $e_i \otimes e_j \mapsto e_{(i-1)\cdot m+j}$

und analog $K^{n'} \otimes K^{m'} \cong K^{n'm'}$

$e_i \otimes e_j \mapsto e_{(i-1)m'+j}$

Seien $C = (e_i \otimes e_j)$, $C' = (e_i \otimes e_j)$

jeweils Basen von $K^n \otimes K^m$ bzw. $K^{n'} \otimes K^{m'}$.

Wir wollen ${}_C M_{C'}(f \otimes g)$ bestimmen.

Setze

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \cdots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & & \\ a_{n'1} \cdot B & \cdots & a_{n'n} \cdot B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n'm' \times nm, K)$$

__Beh__ $A \otimes B = {}_C M_{C'}(f \otimes g)$

$$f \otimes g\,(e_i \otimes e_j) = Ae_i \otimes Be_j =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n'} a_{ki} e_k\right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{m'} b_{lj}\, e_l\right) =$$

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,n' \\ l=1,\dots,m'}} a_{ki}\, b_{lj}\, e_k \otimes e_l \longmapsto$$

$\sum a_{ki}\, b_{lj}\, e_{(k-1)m'+l}$, das heißt wir erhalten den Spaltenvektor

$(a_{1i}\, b_{1j}\,,\ a_{1i}\, b_{2j}\,, \dots, a_{1i}\, b_{m'j}\,,$
$a_{2i}\, b_{1j}\,, \dots, a_{2i}\, b_{m'j}\,, \dots,$
$a_{n'i}\, b_{1j}\,, \dots, a_{n'i}\, b_{m'j})$,

das ist genau die $(i-1)\cdot m+j$-te Spalte von $A \otimes B$.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, K)$,
$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, K)$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 6, K)$$

Damit können wir Tensorprodukte von Unterräumen in $K^{n'}$ bzw. $K^{m'}$ bestimmen, wenn sie durch Erzeugendensysteme gegeben sind:

Sei $U_1 = \langle x_1, \dots, x_s \rangle \subset K^{n'}$
$U_2 = \langle y_1, \dots, y_t \rangle \subset K^{m'}$

Sei A die Matrix mit den x_i als

Spalten, B mit den y_i. Dann ist
$U_1 = \operatorname{Im} f_A$ = Spaltenraum (A),
$U_2 = \operatorname{Im} f_B$ = Spaltenraum (B).

Damit ist $U_1 \otimes U_2 =$
$\operatorname{Im} f_A \otimes \operatorname{Im} f_B = \operatorname{Im}(f_A \otimes f_B) =$
$\operatorname{Im}(A \otimes B)$ = Spaltenraum $(A \otimes B)$,
wobei sich die zweite Gleichheit aus folgendem Lemma ergibt:

<u>2.2.7 Lemma</u> Sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V')$, $g \in \operatorname{Hom}_K(W, W')$, dann gilt
$$\operatorname{Im} f \otimes \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(f \otimes g)$$

<u>Beweis</u>: Sei $(x_i \mid i \in I)$ Basis von V, $(y_j \mid j \in J)$ von W.
Dann ist $(f(x_i) \mid i \in I)$ Erzeugendensystem von $\operatorname{Im} f$, $(g(y_j) \mid j \in J)$ von $\operatorname{Im} g$
$\Rightarrow (f(x_i) \otimes g(y_j) \mid i \in I, j \in J)$ ist Erzeugendensystem von $\operatorname{Im} f \otimes \operatorname{Im} g$.

Andererseits ist $(x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J)$ Basis von $V \otimes W$ und ihr Bild unter $f \otimes g$ ist
$(f(x_i) \otimes g(y_j) \mid i \in I, j \in J)$. $\square$

2.3 Die Dehninvariante

Eine geometrische Anwendung von Tensorprodukten.

ICM 1900: Hilbert trug 23 Probleme vor.
(ICM 1893, 1897, 1900, alle 4 Jahre (mit Pause), letzter 2018 in Rio)

Hilberts 3. Problem

Kann man für zwei Polytope P, Q gleichen Volumens P in kleine Polytope zerschneiden und so wieder zusammensetzen, daß man Q erhält?

Gelöst von Dehn 1902, das erste gelöste von Hilberts Problemen.

2.3.1 Def (Polytop)

Ein Polytop $P \subset \mathbb{R}^3$ ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^3$,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Wir wollen Polytope mit Ebenen zerschneiden, ohne daß dabei Ecken auf der Ebene liegen.

Dehns Beweisstrategie:

1. Definiere die Dehn-Invariante $D(P)$
2. Zeige, beim Zerschneiden von P in P_1, P_2 gilt $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$
3. Finde Polytope P, Q mit $D(P) = 0$, $D(Q) \neq 0$.

2.3.2 Def (Dehn-Invariante)

Sei P ein Polytop, K eine Kante.

K hat die Länge $l_K \in \mathbb{R}$.

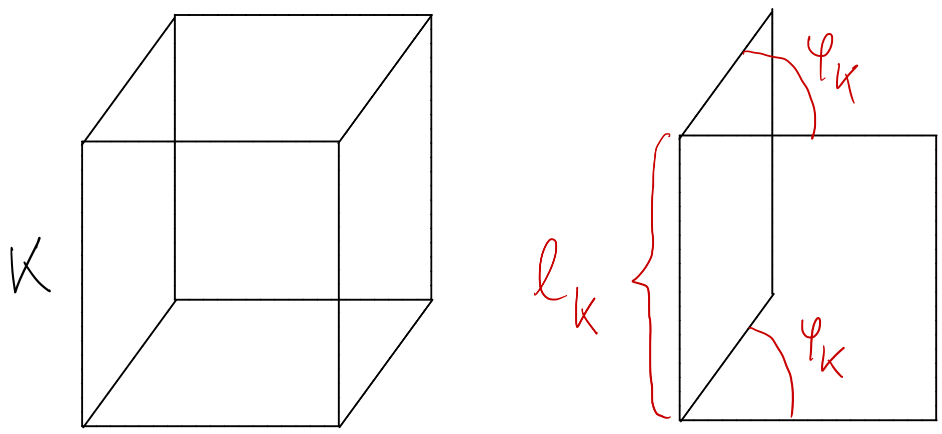
K ist benachbart zu zwei Seiten, die den Winkel φ_K einschließen.

Wir betrachten $\overline{\varphi}_K \in \mathbb{R}/\langle \pi \rangle_{\mathbb{Q}}$, wobei wir $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen.

Die Dehninvariante von P ist

$$D(P) = \sum_{\text{Kanten } K} \overline{\varphi}_K \otimes l_K \in \mathbb{R}/\langle \pi \rangle_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$$

Bsp



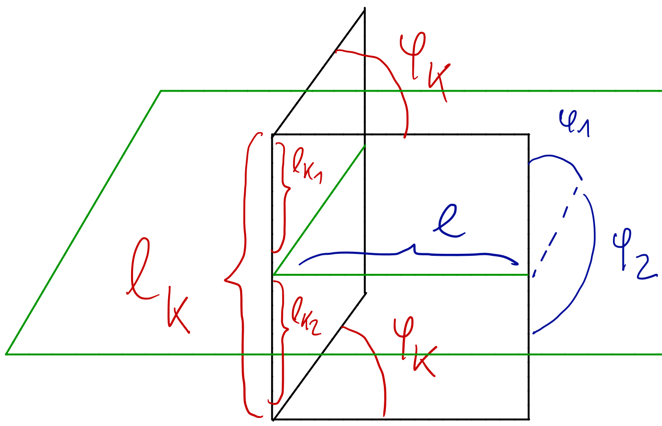
2.3.3 Satz (Dehn-Invariante)

Die Dehninvariante ist zerschneidungsinvariant. Das heißt, wenn $P = P_1 \cup P_2$ durch Zerschneiden mit einer Ebene, die keine Ecken trifft, entsteht, dann gilt $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.

Beweis:

Werden Kanten der Länge l_K zerschnitten in K_1 und K_2, so bleibt der Winkel jeweils gleich.

Da $\overline{\varphi_K} \otimes l_{K_1} + \overline{\varphi_K} \otimes l_{K_2} = \overline{\varphi_K} \otimes (l_{K_1} + l_{K_2}) = \overline{\varphi_K} \otimes l_K$ ist dieser Beitrag invariant.



Werden Seiten zerschnitten, wodurch neue Kanten entstehen, die Winkel φ_1 bzw. φ_2 mit der neuen Seite einschließen, so ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Die neu entstehenden Kanten haben die Länge l. Insgesamt ist der Beitrag dieser neuen Kanten

$$\overline{\varphi_1} \otimes l + \overline{\varphi_2} \otimes l = \overline{\varphi_1 + \varphi_2} \otimes l = \overline{\pi} \otimes l = 0.$$

$\square$

2.3.4 Satz $\frac{1}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist irrational für ungerade $n \geq 3$.

2.3.5 Korollar Für $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ist $\overline{\varphi} \neq 0$ in $\mathbb{R}/\langle \pi \rangle_{\mathbb{Q}}$.

Dieser Winkel taucht in einem Tetraeder auf.

<u>Beweis von 2.3.4:</u>

Wir verwenden das Additionstheorem

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Setze $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $0 \le \varphi_n \le \pi$.

Mit $\alpha = (k+1)\varphi_n$, $\beta = (k-1)\varphi_n$ erhalten wir

$$\cos((k+1)\varphi_n) = 2\cos\varphi_n \cos k\varphi_n - \cos((k-1)\varphi_n) \quad (*).$$

<u>Beh</u> $\forall\ k \geq 0$ hat $\cos(k\varphi_n)$ eine Darstellung $\cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{(\sqrt{n})^k}$, wobei

$A_k \in \mathbb{Z}$ und $n \nmid A_k$.

Induktion:

IA: $k=0$ liefert $\cos(0) = 1$

$k=1$ liefert $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

IS: Setze $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$.

Dann ist

$$\cos((k+1)\varphi_n) \overset{(*)}{=} 2\cos\varphi_n \cos(k\varphi_n) - \cos((k-1)\varphi_n) \overset{IV}{=} 2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}}$$

$$= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}} = \frac{A_{k+1}}{\sqrt{n}^{k+1}}.$$

Da $n \nmid A_k$ und n ungerade gilt $n \nmid 2A_k$ und damit $n \nmid A_{k+1}$.

Setze $B_n = \frac{1}{\pi}\varphi_n$.

Angenommen, $B_n \in \mathbb{Q}$.

Dann gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $B_n = \frac{k}{l}$.

Da $0 < \varphi_n < \pi$ ist $0 < k/l < 1$ und daher muß der Nenner $l \geq 2$ sein. Dann ist

$$l \cdot \varphi_n = k \cdot \pi$$ und

$$\cos(l \cdot \varphi_n) = \cos(k\pi) = \pm 1$$

$$= \frac{A_l}{(\sqrt{n})^l}$$

Damit ist $A_l = \pm(\sqrt{n})^l$, $l \geq 2$

$$\Rightarrow A_l = \pm\, n \cdot \sqrt{n}^{\,l-2}.$$

Wenn l gerade oder n Quadratzahl, ist $\sqrt{n}^{\,l-2} \in \mathbb{Z}$, damit gilt $n \mid A_l$ ↯ zur Behauptung.

Wenn nicht, so ist $\sqrt{n}^{\,l-2} \notin \mathbb{Z}$ und $A_l \notin \mathbb{Z}$ ↯.

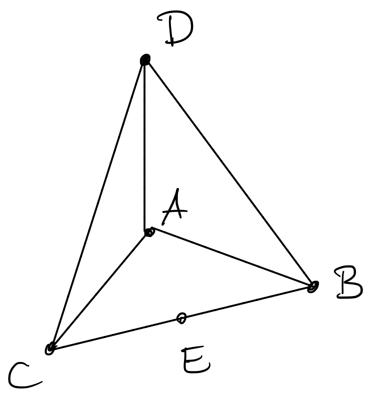
$\square$

<u>Proposition 2.3.6</u> (Dehn-Invariante des Tetraeders)

Sei P ein Tetraeder mit den Ecken $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$.

Dann gilt $D(P) \neq 0$.

<u>Beweis</u>: E sei der Mittelpunkt von $\overline{CB}$.



Die drei Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ haben jeweils Länge 1 und schließen den Winkel $\pi/2$ ein.

Die drei Kanten $\overline{BD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ haben jeweils Länge $\sqrt{2}$ und schließen einen Winkel φ ein.

Dabei gilt $\cos\varphi = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{CE}^2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3/2}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\Rightarrow D(P) = 3 \cdot \left(\overline{\pi/2} \otimes 1\right) + 3 \cdot \left(\overline{\varphi} \otimes \sqrt{2}\right)$$

$$= 3 \cdot 0 + \overline{\varphi} \otimes 3 \cdot \sqrt{2} \neq 0,$$

da $\varphi \notin \langle \pi \rangle_{\mathbb{Q}}$ wegen 2.3.4. $\square$

<u>Prop. 2.3.7</u> (Dehn Invariante eines Quaders)

Sei Q ein Quader.

Unabhängig von den Seitenlängen gilt $D(Q) = 0$.

<u>Beweis</u>: $D(Q) = 4 \cdot \left(\overline{\pi/2} \otimes (a+b+c)\right)$

$= 0$, wobei die Seitenlängen a, b, c sind. $\square$

2.3.8 Satz (Hilberts 3. Problem gelöst)

$\exists$ P, Q gleichen Volumens, die nicht durch Zerschneiden und neu Zusammenlegen ineinander überführt werden können.
Die Antwort auf Hilberts 3. Problem ist nein.

Beweis: Sei P der Tetraeder aus 2.3.6, es gilt $D(P) \neq 0$.
Wähle einen Quader Q mit Seitenlängen so, daß er das gleiche Volumen wie P hat. Es gilt $D(Q) = 0$.
Wenn man P bzw. Q zerschneidet, bleiben die Dehn Invarianten aber invariant, also können P und Q nicht durch Zerschneiden und neu Zusammenlegen ineinander überführt werden. $\square$

Satz (Sydler, 1965)
Wenn $\mathrm{vol}(P) = \mathrm{vol}(Q)$ und $D(P) = D(Q)$, dann können

P und Q durch Zerschneiden und neu Zusammenlegen ineinander überführt werden.