

3. Äußeres Produkt und äußere Algebra

3.1 Alternierende Abbildungen und äußeres Produkt

3.1.1 Def (Alternierende Abbildungen)

Eine bilineare Abbildung heißt alternierend, falls

$$f(x, x) = 0 \quad \forall x \in V.$$

Eine multilineare Abbildung

$f: V \times \dots \times V \rightarrow W$ heißt alternierend,

falls $\forall (x_1, \dots, x_r) : \exists i \neq j$ mit $x_i = x_j$ gilt $f(x_1, \dots, x_r) = 0$.

Bsp: Die Determinante $\det: K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ (betrachtet als Abbildung auf den Spalten der Matrix) ist multilinear und alternierend.

3.1.2 Def (Charakteristik eines Körpers)

Sei K ein Körper. Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot 1 := \sum_{i=1}^n 1 = 1 + \dots + 1 = 0$

heißt, falls sie existiert, die Charakteristik des Körpers, $\text{char}(K)$. Existiert kein solches n , sagen wir, K hat Charakteristik 0.

Bsp $\text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = \text{char}(\mathbb{C}) = 0,$
 $\text{char}(\mathbb{Z}_p) = p$

3.1.3 Lemma $\text{char}(K)$ ist eine Primzahl.

Beweis: Angenommen, $\text{char}(K) = n = m \cdot k$
 mit $1 < m, k < n$. Da n die kleinste
 Zahl ist mit $n \cdot 1 = 0$, ist $m \cdot 1 \neq 0, k \cdot 1 \neq 0$
 $\Rightarrow (m \cdot 1) \cdot (k \cdot 1) \neq 0 \Rightarrow n \cdot 1 \neq 0 \quad \text{z. B.} \quad \square$

3.1.4 Lemma Seien V, W Vektorräume über K .

Sei $f: V \times V \rightarrow W$ bilinear.

- 1) f alternierend $\Rightarrow f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V$
- 2) Sei $\text{char}(K) \neq 2$.
 f alternierend $\Leftrightarrow f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V$.

Beweis:

$$1) \quad 0 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

$$2) \quad f(x, x) = -f(x, x) \Rightarrow 2f(x, x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x, x) = 0 \quad \forall x \in V \quad \square$$

3.1.5 Proposition Sei $f: V \times V \rightarrow W$
 bilinear,
 $\tilde{f}$ die induzierte

lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt,
 $\tilde{f}: V \otimes V \rightarrow W$. Dann gilt
 f alternierend $\Leftrightarrow \langle x \otimes x \mid x \in V \rangle \subset \text{Ker } \tilde{f}$

Beweis: Sei $\varphi: V \times V \rightarrow V \otimes V$. Es gilt
 $\tilde{f} \circ \varphi = f$. Es gilt

$$\tilde{f}(x \otimes x) = \tilde{f}(\varphi(x, x)) = f(x, x).$$

Damit

$$x \otimes x \in \text{Ker } \tilde{f} \quad \forall x \Leftrightarrow f \text{ alternierend.} \quad \square$$

3.1.6 Def (Äußeres Produkt)

Sei V ein Vektorraum über K , $r \geq 1$.
Ein Paar (U, φ) , wobei U ein
Vektorraum über K ist und

$\varphi: V \times \dots \times V \rightarrow U$ multilinear und
alternierend, heißt r -faches äußeres

Produkt von V , wenn (U, φ) der
folgenden universellen Eigenschaft genügt:

$\forall (U', \varphi')$ (mit U' Vektorraum über K ,
 $\varphi': V \times \dots \times V \rightarrow U'$ multilinear und alternierend)

$\exists!$ lineare Abbildung $\psi: U \rightarrow U'$

mit $\psi \circ \varphi = \varphi'$:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times \dots \times V & \xrightarrow{\varphi} & U \\
 & \searrow \varphi' & \swarrow \exists! \Psi \\
 & & U'
 \end{array}$$

Wir schreiben $U = \wedge^r V = V \wedge \dots \wedge V$
und unterschlagen φ in der Notation.

Für $x_1, \dots, x_r \in V$ schreiben wir
 $x_1 \wedge \dots \wedge x_r := \varphi(x_1, \dots, x_r)$. Die Bilder von φ
 nennen wir reine Produkte oder zerlegbar.

3.1.7 Satz (Eindeutigkeit äußeres Produkt)

Sei V ein K -Vektorraum, $r \geq 1$. Seien
 (U, φ) und (U', φ') zwei r -fache
 äußere Produkte von V . Dann $\exists!$

Isomorphismus $\Psi: U \xrightarrow{\cong} U'$

mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$.

Beweis wie beim Tensorprodukt mit
 der universellen Eigenschaft.

3.1.8 Lemma (Universelle Eigenschaft
 für Faktorräume)

Sei V ein Vektorraum über K .

Sei $U \subset V$ ein Unterraum,
 $v: V \rightarrow V/U$ die Restklassenabbildung.
 Das Paar $(V/U, v)$ genügt folgender
 universeller Eigenschaft:

$\forall$ K -Vektorräume W und lineare Abbildungen

$$f': V \rightarrow W \quad \text{mit} \quad f'|_U = 0$$

$$\exists! \text{ lineares } f: V/U \rightarrow W \quad \text{mit}$$

$$f' = f \circ v:$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & V/U \\ & \searrow f' & \swarrow \exists! f \\ & & W \end{array}$$

Beweis:

Wir definieren $f([x]) = f(\bar{x}) := f'(x)$.

Wohldefiniert: Sei $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow$

$$\bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \overline{x-y} = \bar{0} \Rightarrow x-y \in U$$

$$\Rightarrow f'(x-y) = 0 \quad \forall \Rightarrow$$

$$f'(x) = f'(y)$$

Dann gilt $f' = f \circ v$. f ist
 eindeutig mit dieser Eigenschaft. Wie
 man leicht nachrechnet, ist f linear. $\square$

3.1.9 Def

Sei V ein K -Vektorraum, $r \geq 1$.

$$V_r :=$$

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_r \mid x_i \in V \ \forall i, \exists i \neq j : x_i = x_j \rangle$$

$$\subset V \otimes \dots \otimes V$$

3.1.10 Satz (Existenz äußeres Produkt)

Sei V ein K -Vektorraum, $r \geq 1$.

$$\text{Setze } \wedge^r V = V_1 \wedge \dots \wedge V_r = \frac{\bigotimes^r V}{V_r} = \frac{V \otimes \dots \otimes V}{V_r}$$

$$\text{und } \varphi: V^r \longrightarrow \wedge^r V: \\ (x_1, \dots, x_r) \longmapsto \frac{x_1 \wedge \dots \wedge x_r :=}{x_1 \otimes \dots \otimes x_r}$$

Dann ist $(\wedge^r V, \varphi)$ r -faches äußeres Produkt von V .

Beweis: Sei $\phi: V^r \longrightarrow V \otimes \dots \otimes V$
die multilineare Abbildung ins

Tensorprodukt und

$$\psi: V \otimes \dots \otimes V \longrightarrow \frac{V \otimes \dots \otimes V}{V_r}$$

die Restklassenabbildung.

Dann ist $\varphi = \nu \circ \phi$.

φ ist damit multilinear.

Seien $x_1, \dots, x_r \in V$, $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$.

Dann ist $x_1 \otimes \dots \otimes x_r \in V_r$ und daher

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \nu(\phi(x_1, \dots, x_r)) = \nu(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)$$
$$= \overline{x_1 \otimes \dots \otimes x_r} = \bar{0} \text{ in } V \otimes \dots \otimes V / V_r.$$

$\Rightarrow \varphi$ ist alternierend.

Wir müssen noch zeigen, daß $(\wedge^r V, \varphi)$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

Sei dazu $\varphi^1: V^r \rightarrow U$ eine multilineare alternierende Abbildung.

Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $\exists! \psi^1: \otimes^r V \rightarrow U$ mit $\psi^1 \circ \phi = \varphi^1$.

Da φ^1 alternierend ist, ist

$\psi^1|_{V_r} = 0$. Wegen der universellen Eigenschaft von Faktorräumen $\exists!$

$\psi: \otimes^r V / V_r \rightarrow U$ mit

$$\psi^1 = \psi \circ \nu.$$

$$V^r \xrightarrow{\phi} \bigotimes^r V$$

$$\searrow \varphi' \quad \swarrow \exists! \psi'$$

$$U'$$

$$\bigotimes^r V \xrightarrow{\nu} \bigotimes^r V / V_r$$

$$\searrow \psi' \quad \swarrow \exists! \psi$$

$$U'$$

Damit ist $\psi: \bigwedge^r V \rightarrow U'$ eine lineare Abbildung mit

$$\psi \circ \varphi = \psi \circ \nu \circ \phi = \psi' \circ \phi = \varphi'$$

$$\begin{array}{ccccc}
 V^r & \xrightarrow{\varphi} & \bigwedge^r V = \bigotimes^r V / V_r & & \\
 & \searrow \phi & \swarrow \nu & \nearrow \exists \psi & \\
 & & \bigotimes^r V & & \\
 & & \downarrow \psi' & & \\
 & & U' & & \\
 \searrow \varphi' & & & &
 \end{array}$$

Wir müssen noch zeigen, daß ψ eindeutig ist mit dieser Eigenschaft.

Sei dazu $\psi'': \bigwedge^r V \rightarrow U'$ mit

$$\psi'' \circ \varphi = \varphi'.$$

Setze $\Psi''' = \Psi'' \circ \nu$:

$$\otimes^r V \longrightarrow \otimes^r V / V_r = \wedge^r V \longrightarrow U$$

dann gilt $\Psi''' \circ \phi = \Psi'' \circ \nu \circ \phi =$
 $\Psi'' \circ \varphi = \varphi'$. Aus der Eindeutigkeit

in der universellen Eigenschaft beim
Tensorprodukt folgt dann $\Psi''' = \varphi'$.

Damit ist $\varphi' = \Psi'' \circ \nu$ und
aus der Eindeutigkeit von φ in
der universellen Eigenschaft von Faktorräumen
folgt $\varphi = \varphi'$. $\square$

3.1.11 Lemma (Rechenregeln in $V \wedge V$)

Sei V ein K -Vektorraum,

$x, x', y, y' \in V, \lambda \in K$.

Dann gilt in $V \wedge V$:

$$1) \quad x \wedge (y + y') = x \wedge y + x \wedge y' \quad \text{und}$$

$$(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y,$$

$$2) \quad \lambda (x \wedge y) = (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y),$$

$$\text{insbesondere } 0 \wedge y = x \wedge 0 = 0,$$

$$3) \quad x \wedge y = -y \wedge x.$$

Beweis: 1), 2) da $\varphi: V^r \rightarrow \wedge^r V$ multilinear ist, 3) da $\varphi: V^r \rightarrow \wedge^r V$ alternierend ist. genauer:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y \\ &= x \wedge y + y \wedge x. \end{aligned} \quad \square$$

3.1.12 Satz (Basis und Dimension des äußeren Produkts)

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis des endlich-dimensionalen K -Vektorraums V .

$$1) \quad \wedge^r V = \{0\} \quad \text{für} \quad r > n.$$

$$2) \quad (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$$

ist eine Basis von $\wedge^r V$ für

$1 \leq r \leq n$. Insbesondere gilt

$$\dim(\wedge^r V) = \binom{n}{r}.$$

Beweis:

2) Wegen 2.1.8 ist

$$(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n)$$

eine Basis von $\otimes^r V$.

Damit ist $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n)$
ein Erzeugendensystem von $\wedge^r V$.

Alle Produkte, in denen ein Faktor
mehrfach vorkommt, sind 0.

Daher ist auch

$(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ ein
Erzeugendensystem von $\wedge^r V$.

Wir müssen die lineare Unabhängigkeit
zeigen. Setze $N = \binom{n}{r}$ und betrachte
 K^N und die Basis $(e_{i_1, \dots, i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$.

Wir konstruieren eine alternierende
multilineare Abbildung $\alpha: V^r \rightarrow K^N$:

Sei $(y_1, \dots, y_r) \in V^r$ mit

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \forall i=1, \dots, r.$$

Sei $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(r \times n, K)$

Für $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ sei

$A(j_1, \dots, j_r)$ die Determinante der
Matrix, die aus den Spalten
 $j_1, \dots, j_r$ von A besteht.

Setze

$$\alpha: V^r \longrightarrow K^N: (y_1, \dots, y_r) \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} A(i_1, \dots, i_r) e_{i_1 \dots i_r}$$

Da $\det$ alternierend und multilinear ist,
ist α alternierend und multilinear.

$$\text{Es gilt } \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) = e_{i_1 \dots i_r}$$

Aus der universellen Eigenschaft des
äußeren Produkts folgt die Existenz
einer linearen Abbildung

$$\wedge^r V \longrightarrow K^N: X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_r} \mapsto e_{i_1 \dots i_r}$$

Da $(e_{i_1 \dots i_r})$ eine Basis von K^N ist,
ist diese Abbildung surjektiv, also
folgt $\dim \wedge^r V \geq N$.

Da $(X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$

$\wedge^r V$ erzeugt, gilt $\dim \wedge^r V \leq N$.

Damit ist $\dim \wedge^r V = N = \binom{n}{r}$ und

$(X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ ist

Basis.

1) Wie in 2) ist

$B = (X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ eine
 Basis. Da $r > n$ ist $B = \emptyset$ und
 daher $\wedge^r V = \{0\}$. $\square$

3.1.13 Korollar:

Sei $\dim_K V < \infty$, dann ist
 $\dim V = \max \{ r \mid \wedge^r V \neq \{0\} \}$

Beweis:

Sei $\dim V = n$. Sei $r \leq n$, dann
 ist $\dim \wedge^r V = \binom{n}{r} \neq 0$.

Sei $r > n$, nach Festlegung der
 Binomialkoeffizienten ist $\binom{n}{r} = 0 =$
 $\dim \wedge^r V$. Damit folgt

$$\dim V = n = \max \{ r \mid \binom{n}{r} \neq 0 \}$$

$$= \max \{ r \mid \dim_K \wedge^r V \neq 0 \}$$

$$= \max \{ r \mid \wedge^r V \neq \{0\} \}.$$

$\square$

3.1.14 Lemma

Sei V ein K -Vektorraum, $r \geq 1$, $x_1, \dots, x_r \in V$.

Dann gilt:

$0 = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \in \wedge^r V \iff x_1, \dots, x_r$ linear abhängig.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Sei $x_1, \dots, x_r$ linear abhängig $\Rightarrow$
 $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = 0$.

Sei $\exists \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = - \sum_{i=2}^r \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i$

$\Rightarrow x_1 \wedge \dots \wedge x_r =$

$$\left(- \sum_{i=2}^r \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i \right) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r =$$

$$\sum_{i=2}^r \left(- \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) x_i \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r = 0$$

" $\Rightarrow$ " Sei $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig.

Ergänze $x_1, \dots, x_r$ zu einer Basis

$x_1, \dots, x_n$ von V . Dann ist

$x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ in einer Basis von $\wedge^r V$

und kann daher nicht 0 sein.

□

3.1.15 Def

Seien V, W K -Vektorräume.

$\text{Bil}(V, W) = \{ \varphi: V \times V \rightarrow W, \varphi \text{ bilinear} \}$
ist der Raum der bilinearen Abbildungen.

$\text{Alt}(V, W) = \{ \varphi \in \text{Bil}(V, W), \varphi \text{ alternierend} \}$
der Raum der alternierenden bilinearen Abbildungen.

Beide sind mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation K -Vektorräume.

3.1.16 Satz

$$1) \text{Bil}(V, W) \cong \text{Hom}(V \otimes V, W)$$

Insbesondere $\text{Bil}(V, K) \cong (V \otimes V)^\vee$

$$2) \text{Alt}(V, W) \cong \text{Hom}(V \wedge V, W)$$

Insbesondere $\text{Alt}(V, K) \cong (V \wedge V)^\vee$

Beweis:

1) Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert

$$\alpha: \text{Bil}(V, W) \xrightarrow{\quad} \text{Hom}(V \otimes V, W)$$

$$\varphi \xmapsto{\quad} \Psi$$

$$V \times V \longrightarrow V \otimes V$$

$$\begin{array}{ccc} & & \Psi \\ & \swarrow & \searrow \\ \varphi & & W \end{array}$$

α ist linear:

$$\alpha(\varphi_1)(x \otimes y) = \Psi_1(x \otimes y) = \varphi_1(x, y)$$

$$\alpha(\varphi_2)(x \otimes y) = \Psi_2(x \otimes y) = \varphi_2(x, y)$$

$$\alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(x \otimes y) = \varphi_1 + \varphi_2(x, y) =$$

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) = \Psi_1(x \otimes y) + \Psi_2(x \otimes y)$$

$$= \Psi_1 + \Psi_2(x \otimes y)$$

Skalare Vielfache analog.

α ist injektiv:

$$\text{Sei } \Psi_1 = \alpha(\varphi_1), \quad \Psi_2 = \alpha(\varphi_2),$$

$$\Psi_1 = \Psi_2. \quad \text{Dann gilt}$$

$$\Psi_1(x \otimes y) = \Psi_2(x \otimes y) \quad \forall x, y \in V$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

α ist surjektiv:

Für $\Psi \in \text{Hom}(V \otimes V, W)$ setze
 $\varphi(x, y) := \Psi(x \otimes y)$, damit ist
 $\varphi \in \text{Bil}(V, W)$ und $\alpha(\varphi) = \Psi$.

2) analog.

□

3.1.17 Proposition

Sei $\dim_K V < \infty$.

Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$V^\vee \wedge V^\vee \xrightarrow{\cong} \text{Alt}(V, K).$$

3.1.18 Korollar

Sei $\dim_K V < \infty$.

$$V^\vee \wedge V^\vee \cong (V \wedge V)^\vee$$

Beweis:

$$V^\vee \wedge V^\vee \xrightarrow[3.1.17]{\cong} \text{Alt}(V, K) \xrightarrow[3.1.16(2)]{\cong} (V \wedge V)^\vee \quad \square$$

Beweis von 3.1.17:

Seien $f, g \in V^V$.

$$\text{Setze } \alpha(f, g): V \times V \longrightarrow K \\ (x, y) \longmapsto \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$

Beh: $\alpha(f, g)$ ist bilinear und alternierend.

$$\alpha(f, g)(x+x', y) = \det \begin{pmatrix} f(x+x') & f(y) \\ g(x+x') & g(y) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} f(x) + f(x') & f(y) \\ g(x) + g(x') & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f(x') & f(y) \\ g(x') & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\alpha(f, g)(x, y) + \alpha(f, g)(x', y).$$

Skalare Vielfache und zweite Komponente analog.

$$\alpha(f, g)(x, x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(x) \\ g(x) & g(x) \end{pmatrix} = 0$$

Damit definiert α eine Abbildung

$$\alpha: V^V \times V^V \longrightarrow \text{Alt}(V, K)$$

Beh: α ist bilinear und alternierend.

$$\alpha(f + f', g)(x, y) = \det \begin{pmatrix} f + f'(x) & f + f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} f(x) + f'(x) & f(y) + f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f'(x) & f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\alpha(f, g)(x, y) + \alpha(f', g)(x, y)$$

Skalare Vielfache und zweite Komponente analog.

$$\alpha(f, f)(x, y) = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ f(x) & f(y) \end{pmatrix} = 0.$$

Mit der universellen Eigenschaft erhalten wir für $\alpha: V^v \times V^v \rightarrow \text{Alt}(V, K)$ ein lineares $\alpha^1: V^v \wedge V^v \rightarrow \text{Alt}(V, K)$.

Beh: α^1 ist Isomorphismus.

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V und $(x_1^v, \dots, x_n^v)$ die duale Basis von V^v . Dann ist

$(x_i^v \wedge x_j^v \mid 1 \leq i < j \leq n)$ eine Basis
von $V^v \wedge V^v$.

Es gilt

$$\alpha'(x_i^v \wedge x_j^v)(x_k, x_l) = \alpha(x_i^v, x_j^v)(x_k, x_l) \\ = \det \begin{pmatrix} x_i^v(x_k) & x_i^v(x_l) \\ x_j^v(x_k) & x_j^v(x_l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 1 & i=k, j=l \\ -1 & i=l, j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\varphi \in \text{Aut}(V, K)$ beliebig.

Setze $\beta := \sum_{i < j} \varphi(x_i, x_j) (x_i^v \wedge x_j^v)$.

Es gilt $\beta \in V^v \wedge V^v$ und

$$\alpha'(\beta)(x_k, x_l) =$$

$$\alpha' \left(\sum_{i < j} \varphi(x_i, x_j) (x_i^v \wedge x_j^v) \right) (x_k, x_l) =$$

$$\sum_{i < j} \varphi(x_i, x_j) \alpha'(x_i^v \wedge x_j^v)(x_k, x_l) =$$

$$\begin{cases} \varphi(x_i, x_j) & \text{falls } i=k, j=l \\ -\varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_j, x_i) & \text{falls } i=l, j=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha'(\beta) = \varphi$$

und die Wahl dieses Urbilds von φ unter α' ist eindeutig. $\square$

3.2 äußere Produkte von Abbildungen und Koordinaten

3.2.1 Lemma (äußeres Produkt von Abbildungen)

Seien U, V, W K -Vektorräume,
 $f \in \text{Hom}_K(U, V)$, $g \in \text{Hom}_K(V, W)$,
 $r \geq 1$.

1) $\exists!$ lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge^r f: \wedge^r U &\rightarrow \wedge^r V: \\ x_1 \wedge \dots \wedge x_r &\mapsto f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r) \end{aligned}$$

$$2) \wedge^r(g \circ f) = \wedge^r g \circ \wedge^r f$$

Beweis:

Wegen 2.2.1 $\exists! f \otimes \dots \otimes f: \bigotimes^r U \rightarrow \bigotimes^r V$
mit $x_1 \otimes \dots \otimes x_r \mapsto f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_r)$

Dabei gilt $f \otimes \dots \otimes f(U_r) \subset V_r$.

Betrachte $\nu \circ f \otimes \dots \otimes f:$

$$\bigotimes^r U \rightarrow \bigotimes^r V \xrightarrow{\nu} \bigotimes^r V / V_r = \wedge^r V.$$

Es gilt $\nu \circ f \otimes \dots \otimes f|_{U_r} = 0$.

Mit der universellen Eigenschaft des
Faktorraums $\bigotimes^r U / U_r$ erhalten wir
daraus das eindeutige

$$\wedge^r f: \wedge^r U \rightarrow \wedge^r V.$$

2) Folgt aus 2.2.1 (2). $\square$

3.2.2 Lemma (Koordinaten des $\wedge^r K^n$)

Sei $(e_i \mid i=1, \dots, n)$ die kanonische
Basis des K^n ,

$(e_{i_1 \dots i_r} := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$

die Basis des $\wedge^r K^n$.

Seien $y_1, \dots, y_r \in K^n$ mit

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \quad i=1, \dots, r, \quad \text{sei}$$

$A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(r \times n, K)$ und
 $A(j_1, \dots, j_r)$ die Determinante der Matrix
 der Spalten $j_1, \dots, j_r$ von A .

Dann gilt

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} A(i_1, \dots, i_r) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$$

Insbesondere ist

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_n = \det(A) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Beweis: Für $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ setze

$p: K^n \rightarrow K^r$ die Projektion auf
 die Koordinaten $i_1, \dots, i_r$.

Dann gilt

$$\wedge^r p: \wedge^r K^n \rightarrow \wedge^r K^r \cong K$$

$$\begin{aligned} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r} &\mapsto p(e_{j_1}) \wedge \dots \wedge p(e_{j_r}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } (j_1, \dots, j_r) \neq (i_1, \dots, i_r) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Abbildung $\wedge^r p$ ist also
 die Projektion auf die Koordinate
 $(i_1, \dots, i_r)$.

Betrachte

$$\wedge^r p(y_1 \wedge \dots \wedge y_r) = p(y_1) \wedge \dots \wedge p(y_r) \\ = \left(\sum_{k=1}^r a_{1ik} e_{ik} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k=1}^r a_{rik} e_{ik} \right)$$

$$= \sum_{b \in \mathbb{S}_r} \operatorname{sgn}(b) a_{1b(1)} \dots a_{rb(r)} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$$

$$b: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{i_1, \dots, i_r\}$$

$$= A(i_1, \dots, i_r) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}.$$

□

3.2.3 Lemma (Matrixdarstellung von $\wedge^r f$)

Sei $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$, $r \leq \min\{n, m\}$

Sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$.

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V ,

$C = (y_1, \dots, y_m)$ von W .

Sei $A = (a_{ij}) = {}_B M_C(f) \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$

Sei $B' = (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$

Basis von $\wedge^r V$,

$$C^1 = (y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m)$$

von $\wedge^r W$.

Sei $A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r)$ die Determinante der Matrix aus den Zeilen $j_1, \dots, j_r$ und Spalten $i_1, \dots, i_r$.

Dann gilt

$${}_B M_C(\wedge^r f) = \left(A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r) \right)_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}}$$

Beweis:

$$\wedge^r f(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}) = f(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(x_{i_r})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m a_{ji_1} y_j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^m a_{ji_r} y_j \right)$$

$$= \sum_{1 \leq j_k \leq m} a_{j_1 i_1} \dots a_{j_r i_r} y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} \sum_{b \in S_r} \operatorname{sgn}(b) a_{j_{b(1)} i_1} \dots a_{j_{b(r)} i_r} \cdot$$

$$y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r) y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} \quad \square$$

Bsp: Sei $\dim V = \dim W = n = r$,
 ${}_B M_C(f) = (a_{ij}) = A$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \Lambda^n f: \Lambda^n V \cong K &\longrightarrow \Lambda^n V \cong K \\ x &\longmapsto \det(A) \cdot x \end{aligned}$$

Bsp 6

Das Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = V$$

liefert einen Vektor, der bezüglich des Standard Skalarprodukts senkrecht auf den beiden anderen steht.

Durch

$$\begin{aligned} V \times \Lambda^2 V &\longrightarrow \Lambda^3 V = K \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \cong K \\ (v, a \wedge b) &\longmapsto v \wedge a \wedge b \end{aligned}$$

wird ein Isomorphismus

$$\wedge^2 V \xrightarrow{\cong} V^\vee :$$

$$a \wedge b \mapsto (v \mapsto v \wedge a \wedge b)$$

definiert.

Das Skalarprodukt liefert einen

$$\text{Isomorphismus } V^\vee \xrightarrow{\cong} V$$

$$\langle \cdot, v \rangle \mapsto v$$

Die Komposition

$$V \times V \longrightarrow \wedge^2 V \xrightarrow{\cong} V^\vee \xrightarrow{\cong} V$$

$$(a, b) \mapsto a \wedge b \mapsto (v \mapsto v \wedge a \wedge b)$$

ist das Kreuzprodukt:

Die Abbildung $(v \mapsto v \wedge a \wedge b) \in V^\vee$
liefert in Koordinaten:

$$v \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$= v_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - v_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + v_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + v_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + v_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Die Identifikation $V^\vee \cong V$ bildet

die Abbildung ab auf

$$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

3.3 Äußere Algebra

3.3.1 Def K -Algebra

Ein K -Vektorraum $(A, +, \cdot)$, auf dem zusätzlich eine Multiplikation

$$\circ: A \times A \rightarrow A : (x, y) \mapsto x \circ y$$

definiert ist, so daß $(A, +, \circ)$ ein Ring mit 1 ist, heißt K -Algebra,

falls die Skalarmultiplikation mit der Ringmultiplikation verträglich ist, d.h. für $\lambda \in K$, $x, y \in A$ gilt

$$\lambda \cdot (x \circ y) = (\lambda \cdot x) \circ y = x \circ (\lambda y)$$

Bsp

$\text{Mat}(n, K)$, $\text{End}_K(V)$.

Jede Basis B von V liefert einen

K -Vektorraum-Isomorphismus

$$\text{End}_K(V) \longrightarrow \text{Mat}(n, K)$$

$$f \longmapsto {}_B M_B(f),$$

$$\text{da } {}_B M_B(f \circ g) = {}_B M_B(f) \cdot {}_B M_B(g)$$

ist es sogar ein K -Algebren-Isomorphismus.

3.3.2 Def (Äußere Algebra)

Sei V ein K -Vektorraum.

Die äußere Algebra von V ist

$$\Lambda V := \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r V,$$

wobei $\Lambda^0 V := K$,

die direkte Summe der äußeren Produkte von V .

ΛV besitzt die Struktur eines K -Vektorraums, wir wollen jetzt noch ein Produkt definieren, so daß es eine K -Algebra wird.

3.3.3 Satz (Das Dachprodukt/Wedge-Produkt)

Sei V ein K -Vektorraum, $r, s \geq 1$.

Dann $\exists!$ bilineare Abbildung

$$m: \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s) \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$$

Beweis: Wähle $(x_1, \dots, x_r) \in V^r$ fest.

Die Abbildung

$$V^s \longrightarrow \wedge^{r+s} V$$

$$(y_1, \dots, y_s) \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$$

ist multilinear und alternierend.

Wegen der universellen Eigenschaft erhalten wir daraus eine lineare

$$\begin{aligned} \text{Abbildung } \wedge^s V &\longrightarrow \wedge^{r+s} V \\ y_1 \wedge \dots \wedge y_s &\longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} V^r &\longrightarrow \text{Hom}(\wedge^s V, \wedge^{r+s} V) \\ (x_1, \dots, x_r) &\longmapsto (y_1 \wedge \dots \wedge y_s \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist multilinear und alternierend, daher erhalten wir ein

lineares

$$\begin{aligned} \mu: \wedge^r V &\longrightarrow \text{Hom}(\wedge^s V, \wedge^{r+s} V) \\ x_1 \wedge \dots \wedge x_r &\longmapsto (y_1 \wedge \dots \wedge y_s \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s) \end{aligned}$$

Wir definieren

$$m: \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

$$(a, b) \longmapsto \mu(a)(b)$$

Dabei gilt: m ist bilinear und

$$m(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s) =$$

$$\mu(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)(y_1 \wedge \dots \wedge y_s) =$$

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s.$$

Die Abbildung m ist eindeutig mit dieser Eigenschaft, da es die einzige Abbildung ist, für die

$$V^r \times V^s \longrightarrow \Lambda^r V \times \Lambda^s V$$

$$(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \xrightarrow{\quad} \Lambda^{r+s} V$$

$$\xrightarrow{\quad} x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$$

kommutiert.

□

Wir setzen außerdem für $r \geq 0$:

$$m: \underbrace{\Lambda^0 V}_{=K} \times \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^r V$$

$$(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$$

3.3.4 Lemma (Eigenschaften des Dach-Produkts)

Sei V ein K -Vektorraum, $\wedge$ das
Dachprodukt auf $\wedge V$.

Seien $a, b, c \in \wedge V$.

1) $\wedge$ ist assoziativ: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

2) $1 \in \wedge^0 V = K$ ist neutrales
Element

3) $\wedge$ ist distributiv mit der
Addition,

$$(a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$$

$$a \wedge (b+c) = a \wedge b + a \wedge c$$

4) $\wedge$ ist verträglich mit der
Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b).$$

Beweis: 3), 4) folgen aus der Multilinearität der Abbildung m aus 3.3.3.

1) ist klar auf dem zerlegbaren Elementen und gilt wegen 3), 4) damit für alle.

2) folgt aus der Def. $\square$

3.3.5 Def (graduierte Algebra)

1) Eine graduierte K -Algebra ist eine K -Algebra A zusammen mit einer Zerlegung $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ von

A als direkte Summe von Untervektorräumen A_n , wobei für das Produkt gilt $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$.

2) Eine graduierte K -Algebra ist kommutativ, falls das Produkt kommutativ ist.

3) Eine graduierte K -Algebra

ist antikommutativ, falls $\forall a \in A_n$,
 $b \in A_m$ gilt $a \circ b = (-1)^{nm} b \circ a$.

Bsp $K[x] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K[x]_n$

mit $K[x]_n = \{\text{Polynome vom Grad } n\}$
ist eine kommutative graduierte
 K -Algebra.

3.3.6 Lemma (Antikommutativität des Doppelprodukts)

Sei V ein K -Vektorraum, $r, s \geq 0$.

Für $a \in \wedge^r V$, $b \in \wedge^s V$ gilt

$$a \wedge b = (-1)^{rs} b \wedge a.$$

Beweis:

Es genügt, dies auf den zerlegbaren
Elementen nachzurechnen.

Sei $a = x_1 \wedge \dots \wedge x_r$, $b = y_1 \wedge \dots \wedge y_s$

$$\begin{aligned} b \wedge a &= y_1 \wedge \dots \wedge y_s \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_r \\ &= (-1)^s x_1 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r \end{aligned}$$

$$= \dots = (-1)^{rs} x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s \quad \square$$

Zusammen ergibt sich folgender Satz:

3.3.7 Satz (Äußere Algebra)

$\wedge V$ ist mit dem Doppelprodukt eine graduierte, antikommutative K -Algebra.

3.3.8 Def

Für $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ sei
 $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_s\}$ mit
 $j_1 < \dots < j_s$. Setze

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_r) := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

Dies ist das Vorzeichen, das wir erhalten, wenn wir in

$x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ die $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$
 nach vorne sortieren.

3.3.9 Lemma

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_r) = (-1)^{\sum_{k=1}^r i_k - \binom{r+1}{2}}$$

Beweis:

Ein Paar (k, l) kann nur dann Fehlstand sein, wenn $k \leq r < l$.

Für festes k ist $(i_k - 1) - (k - 1)$ die Anzahl der Fehlstände (k, l) , denn von den Zahlen $1, \dots, i_k - 1$, die kleiner sind als i_k und daher potentiell Fehlstände liefern können, wenn sie nach k kommen, sind $i_1, \dots, i_{k-1}$ vor i_k .

$$\Rightarrow \# \text{ Fehlstände} = \sum_{k=1}^r (i_k - k) = \sum_{k=1}^r i_k - \binom{r+1}{2}.$$

□

3.3.10 Satz (Allgemeiner Laplacescher Entwicklungssatz)

Sei $A \in \text{Mat}(n, K)$, $1 \leq r \leq n$.

Sei $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ und

$$1 \leq j_1 < \dots < j_{n-r} \leq n \quad \text{mit} \\ \{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-r}\}.$$

Dann gilt

$$\det(A) = \varepsilon(i_1, \dots, i_r).$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n \\ \{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} \varepsilon(k_1, \dots, k_r) A(k_1, \dots, k_r / i_1, \dots, i_r) \\ \bullet A(l_1, \dots, l_{n-r} / j_1, \dots, j_{n-r})$$

$$\{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$$

Bsp: $r=1, \quad i_1=1$ liefert

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A \text{ ohne 1. Zeile und } j. \text{ Spalte}),$$

die bekannte Laplacesche Entwicklung nach der ersten Zeile.

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$r=2, \quad \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$$

Summand für $\{k_1, k_2\} = \{1, 2\}$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} -$$

$\{1, 3\}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} +$$

$\{1, 4\}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$\{2, 3\}$

$$- \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{pmatrix} +$$

$\{2, 4\}$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$\{3, 4\}$

$$- \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Beweis des Laplaceschen Entwicklungssatzes

3.3.10:

$a_1, \dots, a_n$ bezeichne die Zeilen von A .

Dann gilt wegen 3.2.2

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \det(A) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_n &= \varepsilon(i_1, \dots, i_r) a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_r} \wedge a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_{n-r}} \\ &= \varepsilon(i_1, \dots, i_r) \cdot (a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_r}) \wedge (a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_{n-r}}) \end{aligned}$$

3.2.2

=

$$3.2.2 \quad = E(i_1, \dots, i_r) \cdot \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} A(k_1, \dots, k_r | i_1, \dots, i_r) e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_r} \right)$$

$$\wedge \left(\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_{n-r} \leq n} A(l_1, \dots, l_{n-r} | j_1, \dots, j_{n-r}) e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_{n-r}} \right)$$

fehlende
Summanden
haben
Mehrfachbelegungen

$$\downarrow = E(i_1, \dots, i_r) \cdot$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n \\ \{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} A(k_1, \dots, k_r | i_1, \dots, i_r) A(l_1, \dots, l_{n-r} | j_1, \dots, j_{n-r}) \cdot e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_r} \wedge e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_{n-r}}$$

$$= E(i_1, \dots, i_r) \cdot$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n \\ \{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} E(k_1, \dots, k_r) A(k_1, \dots, k_r | i_1, \dots, i_r) \cdot A(l_1, \dots, l_{n-r} | j_1, \dots, j_{n-r}) \cdot e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_{n-r}}$$

$$\Rightarrow \det(A) = E(i_1, \dots, i_r) \cdot$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n \\ \{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} E(k_1, \dots, k_r) A(k_1, \dots, k_r | i_1, \dots, i_r) \cdot A(l_1, \dots, l_{n-r} | j_1, \dots, j_{n-r})$$

□