4. Projektiver Raum und Grassmannsche

4.1 Projektiver Raum

4.1.1 Def (Projektiver Raum)

Sei V ein K-Vektorraum.

$\mathbb{P}(V) = \{ U \subset V \mid U \text{ 1-dim Unterraum} \}$

heißt der <u>projektive Raum</u> zu V.

Falls $V = K^{n+1}$ schreiben wir

$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_K := \mathbb{P}(K^{n+1}) = \{ \text{1-dim Unterräume von } K^{n+1} \}$

$= \{ \text{Geraden durch } 0 \text{ in } K^{n+1} \}$, er

heißt der n-dimensionale projektive Raum.

4.1.2 Def

Seien $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$.

Setze $x \sim y :\Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : x = \lambda y$

4.1.3 Lemma

Die Relation aus 4.1.2 ist eine Äquivalenzrelation.

<u>Beweis:</u> Mit $\lambda = 1$ folgt $x \sim x$, also die Reflexivität.

Sei $x \sim y \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : \ x = \lambda y \Rightarrow$
$y = \frac{1}{\lambda} x \Rightarrow y \sim x \Rightarrow$ Symmetrie.

Sei $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow \exists \lambda, \mu \neq 0$:
$x = \lambda y$, $y = \mu z \Rightarrow x = (\lambda \mu) z$ und
$\lambda \mu \neq 0 \Rightarrow x \sim z \Rightarrow$ Transitivität

$\square$

<u>4.1.4 Notation:</u> Für einen Punkt $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ ist die Äquivalenzklasse $(x_0 : \dots : x_n) = [(x_0, \dots, x_n)]$
$= \overline{(x_0, \dots, x_n)}$

Man nennt dies die <u>homogenen Koordinaten</u>.

<u>4.1.5 Lemma</u>

$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

<u>Beweis:</u>

$$K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \ \longrightarrow \ \mathbb{P}(K^{n+1})$$
$$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto \langle (x_0, \dots, x_n) \rangle$$

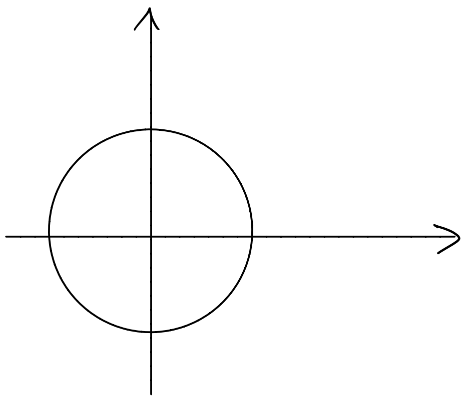
Wohldefiniert: $x \sim y \Rightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$

Surjektiv: Für jeden Unterraum wähle einen Erzeuger.

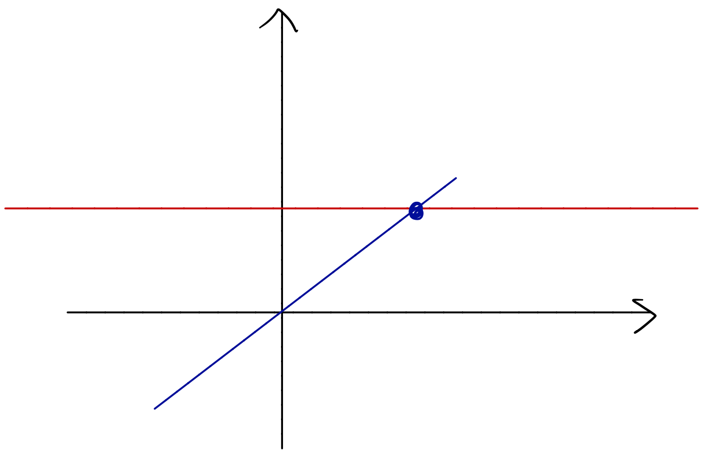
Injektiv: $\langle x \rangle = \langle y \rangle \implies x \sim y$. $\square$

Bsp:

1) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$



Identifiziere gegenüberliegende Punkte.



Jede Gerade durch 0 schneidet die rote Gerade $\{y=1\}$ in einem Punkt, außer der Geraden $\{y=0\}$. Für sie fügen wir einen Punkt ∞ hinzu. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2) In $\mathbb{R}^3$ sei ein Betrachter mit Auge im 0-Punkt. Jeder Punkt auf dem Boden $(\mathbb{R}^2)$ legt eine Gerade fest (durch Anschauen). Es fehlen die zum Boden

parallelen Geraden durch 0.

Daher ist $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$,

wir können den Horizont als projektive Gerade auffassen.

4.1.6 Def (Affine Karten)

Setze $U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n_K$

die i-te (affine) Karte des $\mathbb{P}^n$.

Wohldefiniert: falls $x \sim y$ mit $x_i \neq 0$, dann ist auch $y_i \neq 0$.

Wir können U_i mit K^n identifizieren:

$$\varphi_0 : U_0 \longrightarrow K^n$$
$$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$$\left(\text{bzw. } \varphi_i : U_i \longrightarrow K^n \right.$$
$$\left.(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right)$$

Wohldefiniert: $x \sim y \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y$

$$\Rightarrow \frac{x_i}{x_0} = \frac{\lambda y_i}{\lambda y_0} = \frac{y_i}{y_0}.$$

Bijektiv: Die Umkehrabbildung ist

$$K^n \longrightarrow U_0 \qquad \text{denn}$$
$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto (1 : z_1 : \dots : z_n)$$

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (1 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{1}, \dots, \frac{z_n}{1}\right) = (z_1, \dots, z_n)$$

und

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \mapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right) = (x_0 : \dots : x_n).$$

Das Komplement $\mathbb{P}^n \setminus U_0 = \{(x_0 : \dots : x_n) \mid x_0 = 0\} = \mathbb{P}(\{x_0 = 0\}) \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

Damit haben wir eine Identifikation
$$\mathbb{P}^n = K^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$$

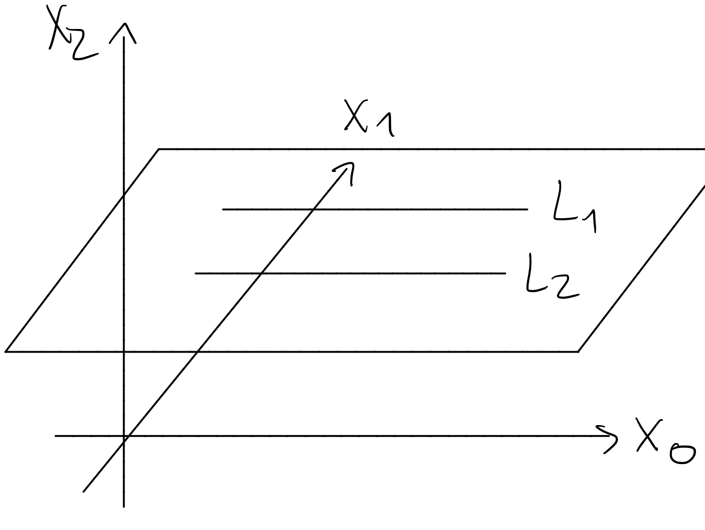
$\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, \dots, n\}$ heißt der <u>Standardatlas</u> von $\mathbb{P}^n$, es gilt
$$\mathbb{P}^n = \bigcup U_i.$$

<u>Bemerkung</u>: Dabei handelt es sich um einen Begriff aus der Theorie der <u>Mannigfaltigkeiten</u>. Eine

Mannigfaltigkeit "sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^n$", Bsp. Erdoberfläche.
Mit einem Atlas werden verschiedene Bereiche einer Mannigfaltigkeit (z.B. der Erde) durch Karten abgedeckt, die wie $\mathbb{R}^n$ sind.

<u>Bsp</u> (Kartenwechsel)

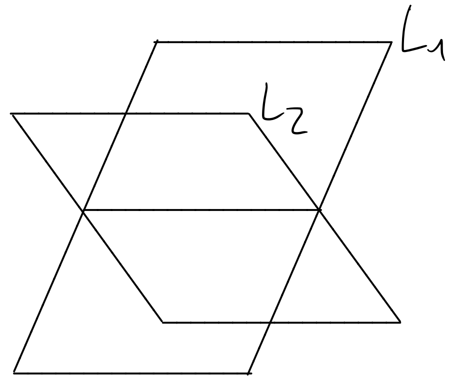
Perspektivisches Zeichnen ist der Übergang von einer Karte zur anderen.
Sei $n=2$.
Parallele Geraden in einer Karte schneiden sich im Horizont, bzw. in der anderen Karte.



Wir identifizieren die Karte $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ mit $\{x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ein Punkt p auf L_1 entspricht der Geraden durch O und p.

Ganz L_1 entspricht der Ebene, die von O und L_1 aufgespannt wird.
Für die parallelen Geraden L_1, L_2 erhalten wir



Wenn wir dieses Bild mit $U_0 = \{x_0 = 1\}$ schneiden, sehen wir den Schnittpunkt.

In Koordinaten:

Sei $L_1 = \{(t:1:1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$L_2 = \{(t:2:1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Für $t \neq 0$ sind die Punkte $(1 : 1/t : 1/t)$ bzw. $(1 : 2/t : 1/t)$, für $t \to \infty$ erhalten wir als Schnittpunkt in U_0 den Punkt $(1:0:0)$.

Für Parallelen anderer Steigung, z.B.
$L_1 = \{(t:t:1)\}$, $L_2 = \{(t:1+t:1)\}$
erhalten wir für $t \to \infty$ den Schnittpunkt $(1:1:0)$.

Für jede Steigung gibt es also

einen unendlich fernen Schnittpunkt der Geradenschar im Horizont.

4.1.7 Def Sei $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n_K$ ein n-dimensionaler projektiver Raum. Ein <u>linearer Unterraum</u> der Dimension d ist die Menge der Punkte $\mathbb{P}(W)$, wobei $W \subset V$ ein $d+1$-dimensionaler Unterraum ist.

4.2 Grassmannsche

4.2.1 Def (Grassmannsche)

$G(k,n) := \{ M \subset K^n \text{ Unterraum} \mid \dim M = k \}$

heißt die <u>Grassmannsche</u> (Varietät oder Mannigfaltigkeit).

Bsp: $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}_K$

4.2.2 Satz (Einbettung der Grassmannschen in einen projektiven Raum)

$G(k,n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k K^n)$:

$\langle v_1, \dots, v_k \rangle \longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$

ist wohldefiniert und eine Bijektion auf die zerlegbaren Elemente.

4.2.3 Lemma:

Sei $m \leq \dim V = n$, $0 \neq \alpha \in \Lambda^m V$.

$\phi_\alpha : V \longrightarrow \Lambda^{m+1} V : v \longmapsto v \wedge \alpha$

Es gilt:

$(v_1, \ldots, v_r)$ Basis von $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) \Rightarrow$

$$\alpha = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge \beta \text{ mit } \beta \in \Lambda^{m-r} V.$$

Insbesondere ist α zerlegbar $\Leftrightarrow$

$$\dim(\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)) = m.$$

Beweis:

Ergänze $v_1, \ldots, v_r$ zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Dann gilt

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} c_{i_1 \cdots i_m} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_m}$$

und $0 = v_j \wedge \alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} c_{i_1 \cdots i_m} v_j \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_m}$

$$= \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_m \\ i_l \neq j}} c_{i_1 \cdots i_m} v_j \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_m}$$

$\Longrightarrow$

$c_{i_1 \cdots i_m} = 0$ $\forall$ Indizes $i_1, \dots, i_m$ mit $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$.

Also $v_1 \wedge \alpha = \dots = v_r \wedge \alpha = 0$ $\Longrightarrow$

$c_{i_1 \cdots i_m} = 0$ $\forall$ $i_1, \dots, i_m$ mit $\{1, \dots, r\} \not\subset \{i_1, \dots, i_m\}$.

Damit können wir $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ aus jedem Summanden von α rausziehen und erhalten

$\alpha = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge \beta$ mit $\beta \in \Lambda^{m-r} V$.

Sei $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi_\alpha)) = m$. Durch die vorherige Aussage erhalten wir

$\alpha = v_1 \wedge \dots \wedge v_m \cdot c$ ist zerlegbar.

Sei umgekehrt $\alpha = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ zerlegbar. Da $\alpha \neq 0$ sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$.

Es gilt $v_i \wedge \alpha = 0$ $i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \subset \operatorname{Ker}(\Phi_\alpha)$.

Sei $v \in \operatorname{Ker}(\Phi_\alpha)$, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

$$\Rightarrow 0 = v \wedge \alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \wedge \alpha =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i \wedge \alpha) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i v_i \wedge \alpha$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \; v_i \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_m$$

Bis auf Umsortierung sind die Summanden Elemente einer Basis von $\Lambda^{m+1} V$, daher folgt $\lambda_i = 0$ $i = m+1, \dots, n$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(\Phi_\alpha) = m$. $\square$

<u>Beweis</u> vom Satz über die Einbettung der Grassmannschen, 4.2.2:

Wohldefiniert: Seien $v_1, \dots, v_k$, $v_1', \dots, v_k'$ Basen des k-dimensionalen Unterraums $U \in G(k,n)$.

$\exists\ a_{ij} \in K:\quad v_i' = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_j \quad i=1,\dots,k.$

Der Basiswechsel $A = (a_{ij})$ erfüllt $\det(A) \neq 0$.

Aus 3.2.2 (Koordinatendarstellung) folgt

$v_1' \wedge \dots \wedge v_k' = \det(A) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

In $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ gilt also

$[v_1' \wedge \dots \wedge v_k'] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k].$

Wir geben eine Umkehrabbildung auf den zerlegbaren Elementen an:

$[v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \longmapsto \operatorname{Ker}(\Phi_{v_1 \wedge \dots \wedge v_k})$

Aus 4.2.3 folgt

$\dim(\operatorname{Ker}(\Phi_{v_1 \wedge \dots \wedge v_k})) = k$, also ist $\operatorname{Ker}(\Phi_{v_1 \wedge \dots \wedge v_k}) \in G(k,n)$.

Da der Kern nicht von einem skalaren Vielfachen abhängt, ist die Umkehrabbildung wohldefiniert.

Aus 4.2.3 folgt, daß es die

Umkehrabbildung ist. $\square$

<u>4.2.4 Def</u> (Plückerkoordinaten)

Sei $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ein Unterraum in $G(k,n)$, sei

$v_i = \sum a_{ij} e_j$.

Wir schreiben die (a_{ij}) als Zeilen in die Matrix A und erhalten als Koordinaten in $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ die Determinanten der Matrizen aus den Spalten $i_1, \dots, i_k$ (3.2.2, Koordinatendarstellung).

Dies nennt man die <u>Plückerkoordinaten</u> von U.

<u>Bsp:</u> $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

liefert $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und

die Plückerkoordinaten

$$\begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ (1 : & 1 : & 1 : & 0 : & 0 : & 0). \end{array}$$

4.2.5 Satz (Grassmannsche als Mannigfaltigkeit)

$$G(k,n) = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} G(k,n) \cap U_{i_1,\dots,i_k}$$

wobei $U_{i_1,\dots,i_k}$ die affinen Karten des $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ bezeichnet.

$$G(k,n) \cap U_{i_1,\dots,i_k} \cong \mathrm{Mat}(k \times (n-k), K)$$
$$\cong K^{k\cdot(n-k)}$$

Insbesondere ist $G(k,n)$ eine $k\cdot(n-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\binom{n}{k}-1$-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

Beweis:

Sei U ein Unterraum in $G(k,n)$.
Sei A eine Matrix mit Basisvektoren von U als Zeilen.
Wir können A in reduzierte Zeilenstufenform bringen, ohne den Zeilenraum U zu ändern.

Die Pivotspalten haben dann $\det \neq 0$.
Damit liegt U in $U_{i_1, \dots, i_k}$ für die Pivotspalten $i_1, \dots, i_k$ und die erste Gleichheit folgt.

Seien OE $1, \dots, k$ die Pivotspalten, i.e. $A \sim \left(\mathbb{1}_k \,\middle|\, \begin{matrix} b_{1k+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{kk+1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix} \right)$

Damit ist $G(k,n) \cap U_{1,\dots,k} \cong$
$\mathrm{Mat}(k \times (n-k), K) \cong K^{k \cdot (n-k)}$

$\square$