

5. Unendlich dimensionale Vektorräume

5.1 Das Lemma von Zorn, der Wohlordnungssatz und das Auswahlaxiom

5.1.1 Def (Ordnungsrelationen)

Eine Menge M mit einer Ordnungsrelation $\leq$ heißt partiell geordnet oder teilgeordnet.

$(M, \leq)$ heißt total geordnet : $(\Leftrightarrow \forall x, y \in M : x \leq y \text{ oder } y \leq x)$.

$(M, \leq)$ heißt wohlgeordnet : $(\Leftrightarrow M$ ist total geordnet und jede nicht-leere Teilmenge hat ein kleinstes Element.

Bsp

1) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet, aber nicht wohlgeordnet.

2) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet.

3) Sei M eine Menge, $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge.
 $A \leq B : (\Leftrightarrow A \subset B)$ ist Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$. $(\mathcal{P}(M), \leq)$ ist i. A. partiell geordnet, aber nicht total geordnet.

5.1.2 Def (Kette)

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge,

$$M \neq \emptyset.$$

1) $K \subset M$ heißt Kette, wenn K bez. $\leq$ total geordnet ist.

2) Sei K eine Kette. $x \in M$ heißt obere Schranke von K , falls $\forall y \in K$:

$$y \leq x.$$

x heißt kleinste obere Schranke, falls

$$y \leq x \quad \forall y \in K \quad \text{und} \quad \forall z: y \leq z \quad \forall y \in K: x \leq z.$$

3) $x \in K \subset M$ ist maximal, falls $\forall y \in K: x \leq y \Rightarrow x = y.$

Ein maximales Element einer Menge K kann mit anderen Elementen aus K nicht vergleichbar sein. Ein maximales Element einer Kette ist das größte.

Bsp

In $(\mathbb{R}, \leq)$ hat jede beschränkte Kette eine kleinste obere Schranke, das Supremum.

Es ist maximal, wenn es enthalten ist.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{2}\}$$

$\sqrt{2}$ ist maximal

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$$

$\sqrt{2}$ ist kleinste obere Schranke, aber nicht maximal

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

hat keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}.$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke.

Bemerkung:

Untere Schranke und minimales Element wird analog definiert.

S.1.3 Zornsches Lemma

Sei $(M, \leq)$, $M \neq \emptyset$, partiell geordnet.
Besitzt jede Kette in M eine obere Schranke, so besitzt M ein maximales Element.

S.1.4 Auswahlaxiom

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen, $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Dann existiert eine Auswahlfunktion $f: I \rightarrow M$ mit $f(i) \in M_i \quad \forall i$.

Die Menge der Auswahlfunktionen heißt $\prod_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$, das kartesische Produkt.

S.1.5 Wohlordnungssatz

Jede Menge X kann wohlgeordnet werden.

5.1.6 Lemma

Sei $(M, \leq)$ partiell geordnet und jede Kette hat eine kleinste obere Schranke. Sei $f: M \rightarrow M$ mit $x \leq f(x) \quad \forall x \in M$. Dann hat f einen Fixpunkt, i.e. $\exists x_0: f(x_0) = x_0$.

Beweis:

Die leere Kette hat eine kleinste obere Schranke x . Es gilt:

$$z \in M, z \leq x \Rightarrow z = x.$$

$M \neq \emptyset$, da $x \in M$.

Wir nennen $N \subset M$ zulässig, wenn für jede Kette $K \subset N$ auch die kleinste obere Schranke von K in N liegt und $f(N) \subset N$.

Sei $\bigcap_{j \in J} N_j$ der Schnitt aller zulässigen Mengen in M .

Sei $K \subset \bigcap_{j \in J} N_j$ eine Kette.
 $\Rightarrow K \subset N_j \quad \forall j \quad \Rightarrow$ die kleinste obere Schranke von K liegt in N_j für alle j .
Da N_j zulässig, ist die kleinste obere Schranke von K in $\bigcap_{j \in J} N_j$.

obere Schranke von K ist in N_j ,

$$f(N_j) \subset N_j$$

$\Rightarrow$ die kleinste obere Schranke von K
ist in $\bigcap_{j \in J} N_j$ und $f(\bigcap_{j \in J} N_j) \subset \bigcap_{j \in J} N_j$.

$x \in N_j \forall j$, da die leere Kette
in N_j ist $\forall j$.

$$\Rightarrow \bigcap_{j \in J} N_j \neq \emptyset.$$

Wir können damit M durch $\bigcap_{j \in J} N_j$
und f durch die Einschränkung
ersetzen, d.h. wir setzen zusätzlich
voraus: M besitzt keine von M
verschiedene zulässige Menge.

Für allgemeine M folgt die Aussage
dann, da wir mit unserem Beweis
einen Fixpunkt in $\bigcap_{j \in J} N_j \subset M$ finden.

Ein Punkt $x \in M$ heißt Trennpunkt,
wenn für $y \in M: y < x \Rightarrow f(y) \leq x$.

Beh 1 Für einen Trennpunkt
 $x \in M$ gilt $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$
 $\forall y \in M$.

Beweis: Setze

$$P = \{y \in M : y \leq x \text{ oder } f(x) \leq y\}$$

Wir zeigen, P ist zulässig, damit
folgt $P = M$ und damit Beh 1. Dazu:

1) Kleinste obere Schranken von Ketten:

Sei $K \subset P$ Kette, $z \in M$ die
kleinste obere Schranke von K .

Ist x eine obere Schranke von K ,
so folgt $z \leq x$ und damit $z \in P$.

Ist x keine obere Schranke von K ,
so existiert $y \in K$ mit $y \not\leq x$.

Da $K \subset P$ ist dann $f(x) \leq y$

$$\Rightarrow f(x) \leq y \leq z \Rightarrow z \in P.$$

2) $f(P) \subset P$:

Sei $y \in P$. Ist $y < x$ so folgt

$f(y) \leq x$, da x Trennpunkt, also

$$f(y) \in P.$$

Es gilt $f(x) \leq f(x)$, also $f(x) \in P$.

Damit ist $f(y) \in P \quad \forall y: y \leq x$.

Sei $y \in P$ mit $f(x) \leq y$, dann
ist $f(x) \leq y \leq f(y) \Rightarrow f(y) \in P$.

Also ist P zulässig und Beh 1
gezeigt.

Aus Beh 1 folgt für einen
Trennpunkt x : $\forall y \in M$:

$$y \leq x \quad \text{oder} \quad f(x) \leq y \quad \Rightarrow$$

$$y \leq x \quad \text{oder} \quad x \leq f(x) \leq y \quad \Rightarrow$$

Beh 1': Jedes Element in M ist
mit einem Trennpunkt vergleichbar.

Beh 2 Jedes Element von M ist ein
Trennpunkt.

Beweis: Wir zeigen, die Menge Q der
Trennpunkte ist zulässig. Dazu:

1) Kleinste obere Schranken von Ketten:

Sei $K \subset \mathbb{Q}$ eine Kette, z kleinste obere Schranke von K in M .

zz: z ist Treppunkt, also
für $y \in M, y < z \Rightarrow f(y) \leq z$.

Sei $y \in M, y < z \Rightarrow y$ ist keine obere Schranke von $K \Rightarrow$

$\exists x \in K: x \not\leq y$.

Es gilt $x \in K \subset \mathbb{Q}$ ist Trepppunkt.
Beh 1) $\xRightarrow{\quad} y < x \xRightarrow{x \text{ Trepppunkt}} f(y) \leq x$

Da z obere Schranke von K folgt

$$f(y) \leq x \leq z \Rightarrow f(y) \leq z$$

$\Rightarrow z$ ist Trepppunkt $\Rightarrow z \in \mathbb{Q}$.

2) $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$:

Sei $x \in \mathbb{Q}$.

zz: $f(x)$ ist Trepppunkt, also
für $y < f(x) \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.

Sei $y < f(x)$. Da x ein

Trepppunkt ist folgt mit Beh 1

$$y \leq x.$$

Falls $y = x$ gilt $f(y) = f(x) \leq f(x)$.

Falls $y < x$ gilt, da x Trennpunkt,
 $f(y) \leq x \leq f(x)$.

Damit ist $f(x)$ Trennpunkt.

Beh 2 ist bewiesen.

Beh 3: f hat einen Fixpunkt.

Beweis: Wegen Beh 2 besteht M
nur aus Trennpunkten. Wegen Beh 1)
ist M total geordnet, also selbst
eine Kette.

Damit existiert eine kleinste obere
Schranke von M in M , also ein
maximales Element z .

Es gilt $z \leq f(z)$ u. V.

und $f(z) \leq z$, da z maximal

Antisymmetrie
 $\Rightarrow f(z) = z$.

□

S. 1.7 Korollar

Sei $(M, \leq)$ partiell geordnet, jede Kette in M hat eine kleinste obere Schranke. Dann gibt es ein maximales Element in M .

Beweis: Die leere Kette besitzt als kleinste obere Schranke das minimale Element von M , $M \neq \emptyset$. Angenommen, es gäbe kein maximales Element. Dann ist zu jedem $x \in M$ die Menge $M_x := \{y \in M \mid x < y\}$ nicht leer.

Mit dem Auswahlaxiom S. 1.4

$\exists f: M \rightarrow M$ mit $f(x) \in M_x$
 $\forall x \in M$. Dann gilt $x < f(x) \forall x$,
insbesondere $x \leq f(x) \forall x$.

S. 1.6
 $\implies$ f hat einen Fixpunkt

$x_0 = f(x_0) \nlessgtr$, da $x < f(x) \forall x$
 $\square$

S. 1.8 Satz

Sei $M \neq \emptyset$, M partiell geordnet.

Dann gibt es eine maximale Kette in M .

Beweis: Die Menge der Ketten ist bezüglich Inklusion partiell geordnet.

Für jede Kette K von Ketten ist $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ eine kleinste

obere Schranke von $\mathcal{K}$. Dann folgt mit S. 1.7, daß es eine maximale Kette gibt.

Beweis des Zornschen Lemmas S. 1.3:

Sei $K \subset M$ eine maximale Kette (sie existiert wegen S. 1.8).

Sei $z \in M$ eine obere Schranke von K .

Für $y \in M$ mit $z \leq y$ ist

$K \cup \{y\}$ ebenfalls eine Kette,

da $\forall x \in K : x \leq z \leq y$ gilt.

Da K maximal ist, folgt

$$y \in K \Rightarrow y \leq z \Rightarrow y = z.$$

Damit ist z maximal.

□

Beweis des Wohlordnungssatzes 5.1.5:

Setze

$$M = \{ (Y, R) \mid Y \subset X, R \text{ Wohlordnung auf } Y \}$$

$$\subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X \times X).$$

$M \neq \emptyset$, denn einelementige Teilmengen von X sind wohlgeordnet.

$$\text{Setze } (Y_1, R_1) \leq (Y_2, R_2) : \Leftrightarrow$$

$$Y_1 \subset Y_2 \text{ und } R_1 = R_2 \cap (Y_1 \times Y_1)$$

(i.e. die Relation R_2 stimmt auf Y_1 mit R_1 überein) und

jedes Element aus $Y_2 \setminus Y_1$ ist größer als jedes Element von Y_1 bzgl. R_2 .

Beh Jede Kette $K \subset M$ hat eine obere Schranke.

Sei $K = \{ (Y_i, R_i)_{i \in I} \} \subset M$
eine Kette. Dann ist $Y = \bigcup Y_i \subset X$
und $R = \bigcup R_i$ eine Ordnung auf Y .

R ist Wohlordnung:

Sei $N \subset Y$ eine nicht-leere Teilmenge.

Sei $x \in N \Rightarrow \exists i : x \in Y_i \Rightarrow$

$N \cap Y_i \neq \emptyset$ und in (Y_i, R_i)
existiert in $N \cap Y_i$ bez. R_i ein
minimales Element z .

Es gilt $z \leq y \quad \forall y \in N \cap Y_i$

Sei $y \in N$, da die Y_i ineinander
enthalten sind $\exists j \in I :$

$y \in Y_j, (Y_i, R_i) \leq (Y_j, R_j)$

Ist $y \in Y_i$, so ist $z \leq y$.

Ist $y \in Y_j \setminus Y_i$, so ist y
größer als jedes Element von
 Y_i n. V. $\Rightarrow z \leq y$.

Also ist z ein kleinstes Element von N und (Y, R) ist wohlgeordnet.

$\Rightarrow (Y, R) \in M$ und es ist obere Schranke der Kette.

Zorn $\Rightarrow M$ besitzt ein maximales Element (Z, S) .

Wäre $Z \subsetneq X$, so existiert $w \in X \setminus Z$. Wir können die Wohlordnung auf Z auf $Z \cup \{w\}$ erweitern, indem wir $w \geq z$ setzen. $\downarrow$ zur

Maximalität von Z .

$\Rightarrow Z = X$ und X ist wohlgeordnet. $\square$

S. 1, 9 Satz

Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom.

Beweis:

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen. $M = \bigcup_{i \in I} M_i$.

Betrachte eine Wohlordnung auf M .
Dann existiert die Auswahlfunktion
 $f: I \rightarrow M: i \mapsto \text{kleinstes Element von } M_i$. $\square$

S. 2 Basen in unendlich-dimensionalen Vektorräumen

S. 2.1 Satz (Existenz von Basen)

Sei V ein Vektorraum.

Sei F eine linear unabhängige Familie in V und E ein Erzeugendensystem. Dann $\exists$ Basis B mit $F \subset B \subset E$.

S. 2.2 Korollar Sei V ein Vektorraum.

1) Jede linear unabhängige Familie F' in V kann

zu einer Basis ergänzt werden.

2) Jedes Erzeugendensystem E' von V kann zu einer Basis ausgedünnt werden.

3) V besitzt eine Basis.

Beweis:

1) S. 2.1 mit $F = F'$, $E = V$

2) S. 2.1 mit $F = \emptyset$, $E = E'$

3) S. 2.1 mit $F = \emptyset$, $E = V$. $\square$

Beweis der Existenz von Basen,
Satz S. 2.1:

Setze

$M = \{G \subset V, G \text{ linear unabhängig}, F \subset G \subset E\}$

$F \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$.

M ist bez. $\subset$ partiell geordnet.

Beh: Jede Kette in M besitzt
eine obere Schranke.
(Voraussetzung Zorn).

Sei K eine Kette in M .

Setze $X := \bigcup_{G \in K} G$.

Es gilt $G \subseteq X \quad \forall G \in K$.

Wir zeigen $X \in M$, dann ist X eine obere Schranke von K .

Da $F \subset G \subset E \quad \forall G \in K$ gilt
auch $F \subset X \subset E$.

Noch zz: X ist linear unabhängig.

Sei dazu $x_1, \dots, x_n \in X$ und
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

$\exists G_1, \dots, G_n \in K$ mit $x_i \in G_{i_0}$.

Da K eine Kette ist, kann man
die $G_i, i=1, \dots, n$, vergleichen und
das maximale wählen, sei also
 i_0 so, daß $G_i \subset G_{i_0} \quad i=1, \dots, n$
und damit $x_i \in G_{i_0} \quad i=1, \dots, n$.

Da G_{i_0} linear unabhängig,
folgt aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \quad \lambda_i = 0$

$\forall i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow X$ ist linear unabhängig

$\Rightarrow X$ ist obere Schranke von K .

Zorn
 $\Rightarrow M$ besitzt ein maximales
Element B .

Beh B ist Basis.

B ist linear unabhängig, da $B \in M$.

Angenommen, B würde nicht
erzeugen. Dann ist insbesondere
 $B \subsetneq E$ und $E \not\subset \langle B \rangle$, denn

sonst $V = \langle E \rangle \subset \langle B \rangle$.

Damit existiert $x \in E \setminus \langle B \rangle$.

Sei $B = (x_i \mid i \in I)$, seien

$\lambda, \lambda_i \in K$ mit $\lambda x + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$.

Wäre $\lambda \neq 0$, so wäre

$$x = \sum_{i \in I} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) x_i \in \langle B \rangle \quad \text{↯}$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$, da B

linear unabhängig

$\Rightarrow B \cup \{x\}$ linear unabhängig.

Da $F \subset B \subset B \cup \{x\} \subset E$ folgt
 $B \cup \{x\} \in M$ $\nsubseteq$ zur Maximalität
von B .

□

S.2.3 Satz (Austauschsatz)

Sei V ein Vektorraum.

Ist $B \subset V$ eine Basis und
 F eine linear unabhängige Familie,
so $\exists$ Teilfamilie B' von B , so
daß $B' \cup F$ Basis ist.

Beweis:

Wähle $F = F'$ und $E = B \cup F'$ im
Satz S.2.1 über die Existenz
von Basen.

□

Beispiele:

1) $K[x]$ hat die abzählbare Basis
 $(x^i \mid i \in \mathbb{N})$.

2) Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
Beh: Eine Basis von $\mathbb{R}$ als
 $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist überabzählbar.

Angenommen, es gäbe eine abzählbare Basis $(x_i | i \in \mathbb{N})$. Setze

$V_n := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Dann ist

$V_n \cong \mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$ abzählbar, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Dann ist $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ eine

abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, die mit dem Cantorschen Diagonalverfahren wieder abzählbar ist.

(M_i abzählbare Mengen,

$M_0 = \{ a_{00} \rightarrow a_{01} \rightarrow a_{02} \rightarrow a_{03} \dots$

$M_1 = \{ a_{10} \leftarrow a_{11} \leftarrow a_{12} \dots$

$M_2 = \{ a_{20} \rightarrow a_{21} \leftarrow \dots$

$\vdots$)

$\nsubseteq$, denn R ist überabzählbar.

3) $V = \{ \text{rationale Cauchyfolgen} \}$

ist $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

$U = \{ \text{Nullfolgen} \} \subset V$ ist

Unterraum. Betrachte

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}: (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

φ ist linear (Grenzwertsätze),

$\ker \varphi = U$. φ ist surjektiv (jede reelle Zahl läßt sich durch rationale annähern, Intervallschachtelung).

$$\Rightarrow V/U = V/\ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$$

Damit hat schon V/U eine überabzählbare Basis, also auch V .

$$4) \quad V = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Funktion} \}$$

ist $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Für $p \in \mathbb{R}$ setze

$$f_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq p \\ 1 & x = p \end{cases}$$

Dann ist $(f_p \mid p \in \mathbb{R})$ linear

unabhängig:

$$\text{Sei } \sum \lambda_p f_p = 0 \Rightarrow$$

$$\sum \lambda_p f_p(x) = \lambda_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diese Familie ist bereits überabzählbar, aber keine Basis.

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 1$ wird nicht erzeugt, denn in jedem $\sum \lambda_p f_p$ gibt es nur endlich viele $\lambda_p \neq 0$ und daher nur endlich viele Funktionswerte ungleich 0.

S.2.4 Satz (Mächtigkeit von Basen)

Sei V ein Vektorraum,
 $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_j \mid j \in J)$
seien Basen.

Dann sind I und J gleichmächtig.

Bemerkung:

Nicht jede linear unabhängige Familie der Mächtigkeit einer Basis ist schon eine Basis.

Z.B. ist in $K[x]$

$(x^{2n} \mid n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig

und abzählbar, aber keine Basis.