

Aufgabe 1**(8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die das Kongruenzgleichungssystem

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

lösen.

Aufgabe 2**(8 Punkte)**

Schreiben Sie den Tensor

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$$

als minimale Summe von reinen Tensoren, d.h. als Summe von Matrizen vom Rang 1.

Aufgabe 3**(4 Punkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $B_n := (1, x^1, \dots, x^n)$ die Standardbasis des $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ und sei $B_n^\vee$ die zu B_n duale Basis. Geben Sie die Basisdarstellung von $\text{ev}_{-2,n} : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{K}, p \mapsto p(-2)$ bezüglich $B_n^\vee$ an.

Aufgabe 4**(8 Punkte)**

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe G . Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist, wenn G/U aus 2 Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 5**(3+3+3=9 Punkte)**

Sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie jeweils die Ordnung von $[4], [5], [9] \in \mathbb{Z}_{18}$.
- (b) Bestimmen Sie Untergruppen $U_2, U_6, U_{18} \subset \mathbb{Z}_{18}$ derart, dass die Ordnung von U_i gleich i ist für $i = 2, 6, 18$.
- (c) Geben Sie alle zyklischen Erzeuger für jede der Untergruppen U_i für $i = 2, 6, 18$ aus (b) an.

Aufgabe 6**(8 Punkte)**

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i = 1, \dots, n$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{f \wedge f}$ von $f \wedge f : \bigwedge^2 V \rightarrow \bigwedge^2 V$.

Aufgabe 7**(8 Punkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $f \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad 2 oder 3. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 8**(7 Punkte)**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $J := \{a \in R \mid \exists n : a^n \in I\}$ ein Ideal in R ist.