UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2024

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 06.05.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+2=8 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a = p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ und $b = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$, wobei $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschiedene Primzahlen sind.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(s_i, r_i)}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(s_i, r_i)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$ab = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$$

gilt und schlussfolgern Sie, dass $\mathrm{kgV}(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ immer existiert und bis auf Vorzeichen eindeutig ist.

Aufgabe 2 (2+2+2=6 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 2.1.5 aus der Vorlesung (Aussagen 1-3).

Aufgabe 3 (2+3=5 Punkte)

(a) Es sei $\sigma \in \mathbb{S}_{15}$ gegeben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ als Produkt von disjunkten Zykeln, d.h. sodass je zwei Zykel dieser Darstellung kein gemeinsames Element besitzen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $\sigma \in \mathbb{S}_n$ mit $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ eine Zerlegung in disjunkte Zykel. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{ord}(\sigma_k))$$

gilt, wobei $\mathrm{ord}(\sigma) := min\{n \in \mathbb{N}_{>0} | \sigma^n = id\}$ *die Ordnung von* σ bezeichne und das kgV von mehreren Zahlen analog zum kgV von zwei Zahlen definiert ist.

Aufgabe 4 (1+1+1+1*=3 +1* Punkte)

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \exp : (\mathbb{R}, +) &\to (\mathbb{C} \backslash \{0\}, \cdot) \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass exp ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(\exp)$.

(c) Zeigen Sie, dass $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

(d) Zu welcher Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist $\mathbb{R}/\mathrm{Ker}(\exp)$ isomorph und warum?

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.