UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2024

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 27.05.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathbb{Z}_{42}$.

Aufgabe 2 $(4 + 4 + 4 = 12$ Punkte)

Man kann die Gruppe $\mathbb{S}_4$ als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Tetraeders mit Ecken $1, 2, 3$ und 4 auffassen. Sei dazu M_{AB} für $1 \leq A, B \leq 4$, $A \neq B$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Die Permutation (12) etwa vertauscht die Ecken 1 und 2 und wird mit der Spiegelung an der Ebene E_{12} identifiziert, die senkrecht zu $\overline{12}$ durch M_{12} geht. Wir definieren die Geraden $d_1 := M_{12}M_{34}$, $d_2 := M_{13}M_{24}$ und $d_3 := M_{14}M_{23}$ (siehe Abbildung). Entsprechend ist

- $(12) \circ (34)$ eine Drehung um d_1.
- $(13) \circ (24)$ eine Drehung um d_2.
- $(14) \circ (23)$ eine Drehung um d_3.

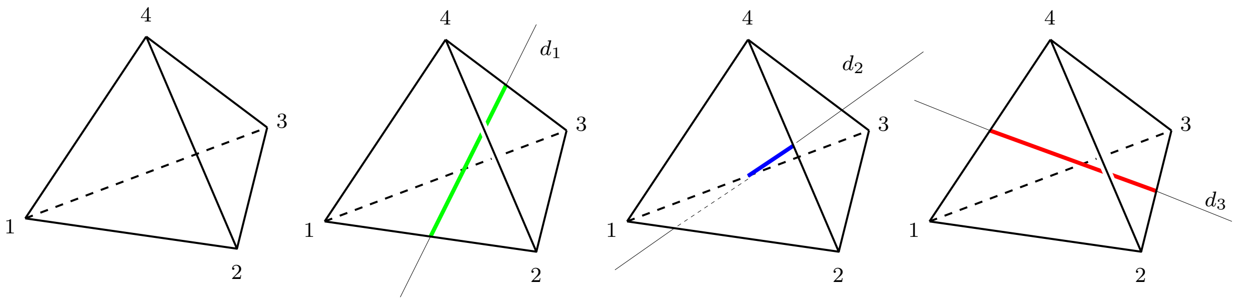

Abbildung 1: Ein gleichseitiger Tetraeder mit Ecken $1, 2, 3, 4$ und die Geraden d_1, d_2, d_3.

Sei σ eine beliebige Permutation aus $\mathbb{S}_4$, dann legt σ eine Bijektion $\varphi_\sigma : \{d_1, d_2, d_3\} \to \{d_1, d_2, d_3\}$ fest durch $\varphi_\sigma(M_{ij}M_{kl}) = M_{\sigma(i)\sigma(j)}M_{\sigma(k)\sigma(l)}$ für paarweise verschiedene $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{(12)}(d_1) &= \varphi_{(12)}(M_{12}M_{34}) = M_{21}M_{34} = d_1, \\
\varphi_{(12)}(d_2) &= \varphi_{(12)}(M_{13}M_{24}) = M_{23}M_{14} = d_3, \\
\varphi_{(12)}(d_3) &= \varphi_{(12)}(M_{14}M_{23}) = M_{24}M_{13} = d_2.
\end{aligned}$$

Zu jedem φ_σ bekommt man auf diese Weise eine eindeutig festgelegte Permutation $\Phi(\sigma) \in \mathbb{S}_3$ (z.B. $\Phi((12)) = (23) \in \mathbb{S}_3$, weil $\varphi_{(12)}$ d_2 mit d_3 vertauscht und d_1 auf sich selbst abbildet). Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ durch $\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, wobei die $\Phi(\sigma)$ wie oben aus einem σ konstruiert wird.

(*Hinweis: Anschaulich tut die Abbildung Φ folgendes: Jedes $\sigma \in \mathbb{S}_4$ kann als Abbildung des Tetraeders auf sich selbst interpretiert werden (z.B. ist (12) ein Spiegelung an der Ebene senkrecht zu $\overline{12}$ durch M_{12}. Eine solche Abbildung bildet dann auch jede der Gerade d_i, $i = 1, 2, 3$, wieder auf ein anderes d_j ab. Dieser Vorgang liefert ebenfalls die Permutation $\Phi(\sigma)$.*)

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis benutzen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Betrachten Sie die Teilmenge $H := \{\mathrm{id}, (12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23)\}$ von $\mathbb{S}_4$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{Kern}(\Phi) = H$ und folgern Sie, dass

- H eine Normalteiler ist.
- es einen Isomorphismus von $\mathbb{S}_4/H$ nach $\mathbb{S}_3$ gibt.

(c) Listen Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse von (12) bzw. (34) auf und überzeugen Sie sich davon, dass die Komposition in $\mathbb{S}_4/H$ wohldefiniert ist, indem Sie das Produkt dieser Klassen mit verschiedenen Vertretern berechnen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass $[A_n, A_n] = A_n$ für $n \geqslant 5$ gilt. Insbesondere hat A_n damit keinen nicht-trivialen Normalteiler dessen Faktorgruppe abelsch ist (Satz 2.3.5. aus der Vorlesung).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Zykel der Form $(12k)$ für $k = 3, ..., n$ ein Erzeugendensystem von A_n bilden. Betrachten Sie nun Kommutatoren der Form $[(12k), (12)(34)]$ für $k \geqslant 5$ und ähnliche Kommutatoren für $k = 3, 4$.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Es sei F die freie Gruppe erzeugt von $A = \{x, y\}$. Beweisen Sie, dass die von x^2, xyx^{-1} und y erzeugte Untergruppe G ein Normalteiler vom Index 2 in F ist. Vom Index 2 heißt hierbei $|F/G| = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass G die freie Gruppe erzeugt von 3 Elementen ist.

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.